G-Structures Entières et Modules de Wach

Lionel Dorat

Received: December 18, 2006

Communicated by Ulf Rehmann

Abstract. In this paper, we study the tannakian properties of the Fontaine-Laffaille functor $\mathbf{V_{cris}}$ thanks to the theory of Wach's modules. We construct a point of the torsor linking cristalline representations and weakly admissible filtered modules, preserving the lattices in the sens of the Fontaine-Laffaille correspondance.

2000 Mathematics Subject Classification: 11F80, 11F85, 11S20, 11S23
Keywords and Phrases: Représentations galoisiennes, représentations cristallines, représentations entières, modules filtrés, (ϕ, Γ)-modules

Introduction

Dans tout ce travail, p est un nombre premier impair, $\mathcal{K}$ un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié et de corps résiduel k parfait de caractéristique p. Nous noterons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, c'est donc l'anneau des entiers de $\mathcal{K}$. Tous trois sont munis d'une action de Frobenius, notée σ. Fixons $\overline{\mathcal{K}}$ une cloture algébrique de $\mathcal{K}$, et posons $\Gamma_{\mathcal{K}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{K})$. Nous noterons $\mathbb{C}$ le complété de $\overline{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{X} : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_p^*$ désignera le caractère cyclotomique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (c'est-à-dire que $g(z) = z^{\mathcal{X}(g)}$ pour tout $g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$ et pour toute racine de l'unité $z \in \overline{\mathcal{K}}$ d'ordre une puissance de p). Nous allons étudier les représentations continues de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie.
Nous nous restreindrons aux représentations cristallines, condition vérifiée dans bien des cas issus de la géométrie (par exemple, pour le module de Tate ou la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ d'une variété abélienne ayant bonne réduction). L'avantage de ces représentations est que J.-M. Fontaine et P. Colmez ont montré dans [Fon94b] et [CF00] qu'elles forment une catégorie tannakienne, qui est $\otimes$-équivalente à la catégorie tannakienne des φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$ faiblement admissibles (c'est à dire ceux qui ont des réseaux fortement divisibles).

Le foncteur qui induit cette équivalence de catégories se décrit de la manière suivante : si V est une représentation p-adique cristalline, le φ-module filtré associé est $\mathbf{D_{cris,p}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$ (le quasi-inverse est donné par : pour D un φ-module filtré faiblement admissible, $\mathbf{V_{cris,p}}(D) = \mathrm{Fil}^0(D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris})^{\varphi}$). De plus, l'application

$$\mathbf{V_{cris,p}}(D) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \to D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris}$$

issue de la multiplication de B_{cris} est un isomorphisme (préservant l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, la filtration, et le morphisme φ). Cela peut se traduire de la façon suivante : en notant w_V le foncteur oubli qui à la $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline V associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à V, et w_D celui qui associe le $\mathcal{K}$-espace vectoriel sous-jacent à $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$, alors les $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre $w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}$ sur le foncteur fibre w_D, $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$, forment un torseur sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_V)_{|\mathcal{K}}$ et sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_D)$, qui est non vide sur B_{cris}.
Du côté des φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$, nous disposons de la notion de réseaux fortement divisibles (dont l'existence est une condition nécessaire et suffisante pour que le module soit faiblement admissible), qui sont des φ-modules filtrés sur W (cf. paragraphe 1.3). J.-M. Fontaine et G. Laffaille ont montré dans [FL82] que, si la longueur de la filtration est strictement plus petite que $p - 1$, il existe une équivalence de catégories abéliennes entre réseaux fortement divisibles d'un module filtré faiblement admissible, et les réseaux stables de la représentation cristalline associée.
Plus précisément, à M un φ-module filtré sur W vérifiant $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$ et $\mathrm{Fil}^{2-p}(M) = M$, ils associent le réseau $\mathbf{V_{cris}}(M) = \mathrm{Fil}^0(M \otimes_W A_{cris})^{\varphi^0}$, et cette construction induit un foncteur exact, pleinement fidèle (dont nous noterons $\mathbf{D_{cris}}$ un quasi-inverse). Deux problèmes apparaissent : la condition sur la filtration n'est pas stable par produit tensoriel, et l'application naturelle

$$\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \to M \otimes_W A_{cris}$$

n'est pas un isomorphisme (le déterminant est une puissance de t, non inversible dans A_{cris}). De plus, une question naturelle se pose : est-ce qu'il existe un point f de $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$ qui envoie un réseau galoisien sur celui qui lui correpond d'après la correspondance de Fontaine-Laffaille ? Répondre à ces questions revient à étudier les propriétés tannakiennes de $\mathbf{V_{cris}}$.
L'idée va être d'introduire la théorie des modules de Wach de L. Berger (voir [Ber04]), qui à un réseau d'une $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline associe un (φ, Γ)-module dont un quotient redonne le φ-module filtré sur W correspondant à la théorie de Fontaine-Laffaille. L'intérêt des modules de Wach est leur compatibilité avec le produit tensoriel (le module de Wach d'un produit tensoriel est le produit tensoriel des modules de Wach). Le problème se ramène alors à : pouvons-nous à partir d'un φ-module filtré sur W reconstruire le module de Wach correspondant ? Pouvons-nous le faire de manière à ce que cette construction soit fonctorielle ?

Le résultat technique principal de cet article est la construction à partir des idées de N. Wach d'un foncteur de la catégorie des modules de Fontaine-Laffaille vers la catégorie des modules de Wach. Plus précisément, notons $\mathbf{MF_W^{-h}}$ la catégorie des φ-modules filtrés N libres sur W tels que $\mathrm{Fil}^{-h}(N) = N$, $\mathrm{Fil}^1(N) = \{0\}$ (cf. paragraphe 1.3 pour plus de détails) et $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} >$ la catégorie engendrée par $\mathbf{MF_W^{-h}}$ pour les opérations de sous-objets, objets quotients, produit tensoriel et somme directe, $\mathbf{V_{cris}}$ le foncteur de Fontaine-Laffaille, $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-h}}$ la catégories des duaux des modules de Wach de hauteur h (ce qui correspond à des modules de Wach d'après la définition de [Ber04]), et $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-}}$ la réunion sur $h \geq 0$ des $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-h}}$, $\mathbf{N}$ le foncteur "module de Wach", $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ le foncteur de Fontaine pour les (φ,Γ)-module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, $\mathbf{V_{cris,p}}$ le foncteur de Fontaine pour les φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$ admissibles, et $j : S \to \mathcal{O}_\mathcal{E}$ qui induit le foncteur extension des scalaires j^* de la catégorie des modules de Wach vers la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Théorème 1. *Soit h un entier compris entre 0 et $p-2$, alors il existe un foncteur F^- exact, préservant le produit tensoriel, fidèle et pleinement fidèle de $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} >$ vers $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-}}$. Restreint à $\mathbf{MF_W^{-h}}$, ce foncteur est essentiellement surjectif sur $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-h}}$. De plus, pour tout objet M de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $\mathrm{F}^-(M)$ est fonctoriellement isomorphe à $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(M))$. Dans le cas général, $\mathrm{F}^-(M)$ s'interprète encore comme le module de Wach du réseau galoisien correspondant au (φ,Γ)-module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ engendré par $\mathrm{F}^-(M)$. En outre, $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ j^* \circ \mathrm{F}^-$ est isomorphe (comme foncteur) à $\mathbf{V_{cris,p}}$ une fois p rendu inversible, et à $\mathbf{V_{cris}}$ une fois restreint à la catégorie $\mathbf{MF_W^{-h}}$.*

Remarque 1. *Ce théorème est optimal, dans le sens où nous ne pouvons espérer que F^- soit essentiellement surjectif sans la restriction sur h.*

Pour illuster, le théorème nous dit essentiellement que le diagramme suivant est commutatif (où bien sûr il faut resteindre la catégorie des réseaux des représentations cristallines à ceux à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}^{\mathbf{cris,h}}_{\mathbb{Z}_\mathbf{p}}(\Gamma_\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\mathbf{D_{cris}}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\mathbf{N}"] & \mathbf{MF_W^{-h}} \arrow[l, shift left, "\mathbf{V_{cris}}"] \arrow[d, dotted, shift right, "\mathrm{F}^-"'] \\
\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}"] & \mathbf{\Gamma\Phi M_S^{-h}} \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, shift right, "\bmod \pi"']
\end{tikzcd}$$

et, une fois p rendu inversible,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}^{\mathbf{cris}}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p}}(\Gamma_\mathcal{K}) \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}_\mathcal{E}"] \arrow[dr, "\mathbf{N}"] & \mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} > \otimes \mathcal{K} \arrow[l, "\mathbf{V_{cris,p}}"] \arrow[d, dotted, shift right, "\mathrm{F}^-"'] \\
\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{et}}_{\mathcal{E}} \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}_\mathcal{E}"] & \mathbf{\Gamma\Phi M}^{-}_{\mathbf{S}[\frac{1}{\mathbf{p}}]} \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, shift right, "\bmod \pi"']
\end{tikzcd}$$

où F^- est fidèle, pleinement fidèle, préserve le produit tensoriel, et suivant les cas, peut être essentiellement surjectif (et $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} > \otimes \mathcal{K}$ représente juste la catégorie formée des objets de $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} >$ où nous avons rendu p inversible, c'est à dire la catégorie engendrée pour les opérations de produit tensoriel, somme directe, sous-objet et objet quotient, par les modules filtrés sur $\mathcal{K}$ admissibles à pente compris entre 0 et $-h$).

Remarque 2. *Dans l'article nous étudierons aussi le cas plus général des φ-modules filtrés de type fini sur W (donc ayant éventuellement de la p-torsion).*

De ce théorème, nous en déduisons le corollaire voulu :

Théorème 2. *Il existe un point du torseur $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$ à coefficient dans le corps $\widehat{\mathcal{E}}_{nr}$ qui préserve les réseaux de Fontaine-Laffaille, c'est à dire qui identifie les réseaux stables par Galois des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, \frac{p-2}{2}]\!]$ au W-module filtré correspondant par la théorie de Fontaine-Laffaille.*

Pour obtenir un résultat sur $\mathcal{K}$ plutôt que sur $\widehat{\mathcal{E}}_{nr}$, il faut modifier le problème. Considérons G un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$ et une représentation $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$. Supposons donnée une immersion fermée α de G dans GL_U, pour U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, telle que la représentation $\alpha \circ \rho$ de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (dans $GL(U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$) soit cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec h un entier compris entre 0 et $\frac{p-2}{2}$. Notons $V = U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Par un théorème de Chevalley, il existe un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V_G dans $\bigoplus_i \mathrm{End}(V)^{\otimes i}$ (en faisant agir GL_V naturellement sur V^* et trivialement sur V, dans $\mathrm{End}(V) = V \otimes V^*$) tel que $G \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ soit le groupe algébrique formé de l'ensemble des éléments de GL_V qui laissent stable V_G. Alors, par le foncteur de Fontaine-Laffaille, nous pouvons définir naturellement un groupe G_D sur $D = \mathbf{D_{cris,p}}(V)$ comme l'ensemble des éléments de GL_D laissant stable $\mathbf{D_{cris,p}}(V_G)$. Un corollaire de la proposition 6.3.3 de [Fon79] nous donne l'existence d'un élément de $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)(\mathcal{K})$, donc en particulier d'un isomorphisme de $\mathcal{K}$-modules

$$f : V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K} \to D$$

qui identifie $G \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}$ à G_D. Le comportement de f vis-à-vis des réseaux est à priori inconnu. Pour l'étudier, nous introduisons un G-torseur $\mathbf{Isom}$ défini sur W, qui est heuristiquement le G-torseur obtenu à partir de $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$ (c'est à dire une forme sur W du $G \times_W \mathcal{K}$ torseur obtenu à partir de $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$). Le résultat suivant se montre alors en montrant que $\mathbf{Isom}$ est un G-torseur trivial sur W :

Théorème 3. *Sous les hypothèses précédentes, si $M = \mathbf{D_{cris}}(U)$, il existe un sous-groupe algébrique G_M de GL_M sur W, avec $G_M \times_W \mathcal{K} = G_D$, et il existe f un isomorphisme de W-modules de $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sur M, qui identifie G à G_M.*

$$f : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M$$

De plus, si U' est un réseau de $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ laissé stable par l'action de G, alors $f[\frac{1}{p}]$ envoie $U' \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sur $\mathbf{D_{cris}}(U')$.

Remarque 3. *Ce théorème nous donne en particulier que les réseaux U et M ont la même position vis à vis du groupe G.*

Avec des hypothèses plus fortes sur α, nous pouvons affaiblir l'hypothèse sur h. Une application directe de ce résultat concerne la semi-simplifiée d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate petits : le groupe algébrique H engendré par l'image de Galois sur $\mathbb{Q}_p$ est alors connexe et réductif, donc en appliquant les résultats cités dans [Tit79] (paragraphe 3.2 et 3.4.1), il existe un groupe algébrique lisse G défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que $G(\mathbb{Z}_p)$ contienne l'image de Galois, et dont la fibre générique est H. Le Théorème 3 s'applique alors.

Table des matières

1 RAPPELS

1.1 RAPPELS SUR LES (φ, Γ)-MODULES

1.1.1 DÉFINITION DE $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$

Soit R l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ formées d'éléments de $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{K}}}/p\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{K}}}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n (cf. [Fon82], p. 535). C'est un anneau parfait de caractéristique p, muni d'une valuation ; son corps résiduel s'identifie à k. Son corps des fractions $\operatorname{Fr} R$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p, et R est intégralement clos dans $\operatorname{Fr} R$.
Si A est une k-algèbre, $W(A)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A. Notons $\mathbb{Z}_{p^s} = W(\mathbb{F}_{p^s})$, $\mathbb{Z}_p^{nr} = W(\overline{\mathbb{F}_p})$, $W = W(k)$, $W_{\mathcal{K}}(A) = \mathcal{K} \otimes_W W(A) = W(A)[\frac{1}{p}]$ et si $a \in A$, $[a] = (a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ le représentant de Teichmüller de a dans $W(A)$. Le Frobenius $x \in A \mapsto x^p \in A$ s'étend à $W(A)$ en φ (encore appelé l'endomorphisme de Frobenius) par fonctorialité, ainsi qu'à $W_{\mathcal{K}}(A)$; nous noterons σ le Frobenius sur W et sur $\mathcal{K}$ (si $\lambda \in W$, $\sigma(\lambda) := \varphi(\lambda)$). En particulier ceci s'applique à $W(R)$, $W(\operatorname{Fr} R)$ et $W_{\mathcal{K}}(\operatorname{Fr} R)$.
D'autre part, le groupe $\Gamma_{\mathcal{K}}$ opère par fonctorialité sur R, $\operatorname{Fr} R$ et $W(\operatorname{Fr}(R))$, et les anneaux $W(R)$, $W(\operatorname{Fr} R)$ et $W_{\mathcal{K}}(R)$ s'identifient à des sous-anneaux de $W_{\mathcal{K}}(\operatorname{Fr} R)$ stables par φ et $\Gamma_{\mathcal{K}}$.
Notons $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}(\bar{\mathcal{K}})$ le module de Tate du groupe multiplicatif et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_p(i) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes i}$ et $\mathbb{Z}_p(-i)$ son dual. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module T, et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons $T(i) = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$.
Le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\mathbb{G}_m)$ s'identifie au sous $\mathbb{Z}_p$-module du groupe multiplicatif des unités de R congrues à 1 modulo l'idéal maximal, formé des x tels que $x^{(0)} = 1$. Choisisons un générateur de ce module, c'est-à-dire un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et considérons l'élément $\pi = [\varepsilon] - 1$ dans $W(R)$. Alors l'adhérence S de la sous W-algèbre de $W(R)$ engendrée par π s'identifie à l'algèbre $W[\![\pi]\!]$ des séries formelles en π à coefficients dans W ; de plus S est stable par φ et $\Gamma_{\mathcal{K}}$, et nous avons les relations suivantes :

$$\varphi(\pi) = (1 + \pi)^p - 1$$

$$g(\pi) = (1 + \pi)^{\mathcal{X}(g)} - 1$$

pour $g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$.
Soit $\mathcal{K}_n$ le sous corps de $\bar{\mathcal{K}}$ engendré sur $\mathcal{K}$ par les racines p^n-ièmes de l'unité, et $\mathcal{K}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$. Notons $\Gamma = \operatorname{Gal}(\mathcal{K}_\infty/\mathcal{K})$ et $H_{\mathcal{K}}$ le noyau de la projection de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur Γ. Le groupe $H_{\mathcal{K}}$ agit trivialement sur S. Si Γ_f est le sous-groupe de torsion de Γ, posons $S_0 = S^{\Gamma_f}$ ainsi que $\Gamma_0 = \Gamma/\Gamma_f$; J.-M. Fontaine a montré (cf. [Fon90], p. 268-273) que $S_0 = W[\![\pi_0]\!]$, où $\pi_0 = -p + \sum_{a\in\mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$. Notons $q = p + \pi_0$. S_0 est munie d'une action naturelle de Γ_0.

Notons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ le complété pour la topologie p-adique de $S[\frac{1}{\pi}]$. C'est l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, noté $\mathcal{E}$. Comme π est inversible dans $W(\operatorname{Fr} R)$, l'inclusion de S dans $W(R)$ se prolonge en un plongement de $S[\frac{1}{\pi}]$ dans $W(\operatorname{Fr} R)$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'identifie à l'adhérence de $S[\frac{1}{\pi}]$ dans $W(\operatorname{Fr} R)$ pour la topologie p-adique, tandis que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\frac{1}{p}]$ s'identfie à un sous-corps de $W_{\mathcal{K}}(\operatorname{Fr} R)$. Alors si $E = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p$, $\mathcal{O}_E = S/pS = k[\![\tilde{\pi}]\!]$, où $\tilde{\pi}$ est la réduction modulo p de π.
De plus, si $\hat{\mathcal{E}}_{nr}$ désigne l'adhérence dans $W_{\mathcal{K}}(\operatorname{Fr} R)$ de l'extension maximale non ramifiée $\mathcal{E}_{nr}$ de $\mathcal{E}$ contenue dans $W_{\mathcal{K}}(\operatorname{Fr} R)$ et $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$ son anneau des entiers, $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}/p$ est une clôture séparable E^{sep} de E, avec une identification des groupes de Galois

$$H_{\mathcal{K}} = \operatorname{Gal}(E^{sep}/E) = \operatorname{Gal}(\mathcal{E}_{nr}/\mathcal{E}).$$

1.1.2 (φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes

Nous ne considérerons des (φ, Γ)-modules que sur S ou $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (nous considérerons aussi des (φ, Γ_0)-modules définis sur S_0). Soit A l'un des anneaux précédent. Un (φ, Γ)-module sur A est un A-module muni d'un endomorphisme φ, semi-linéaire par rapport à σ muni en plus d'une action continue de Γ, semi-linéaire par rapport à l'action de Γ sur A, cette action commutant avec l'endomorphisme φ. Nous les supposerons toujours *étale*, c'est à dire de type fini sur A et tels que l'application linéaire $\varphi : M^{\sigma} \to M$, déduite de φ en posant $\varphi(\lambda \otimes x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda \in A$ et $x \in M$ est bijective. Les (φ, Γ)-modules étales (avec comme morphismes les morphismes A-linéaires commutants à φ et à Γ) définissent une $\otimes$-catégorie abélienne notée $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}}$ (cf. [Fon90] p.273).
Appelons représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ la donnée d'un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Un morphisme sera une application $\mathbb{Z}_p$-linéaire commutant à l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ est défini de même.
J.-M. Fontaine a montré dans [Fon90] (p. 274) qu'il existait une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ induite par le foncteur $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(T) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_{\mathcal{K}}}$ pour T une $\mathbb{Z}_p$-représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, et son quasi inverse $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{N}) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{N})^{\varphi=1}$. La multiplication dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ induit alors une application naturelle et fonctorielle :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \xrightarrow{\psi_{\mathcal{N}}} \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$$

pour $\mathcal{N}$ un objet de la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$.

1.2 Représentations cristallines

1.2.1 Représentations cristallines

Pour la définition de A_{cris} et de $t := \log([\varepsilon])$, nous renvoyons à [Fon94a] par exemple. Nous noterons $B_{cris} = A_{cris}[\frac{1}{t}]$. Soit V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, et $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(V)$ une représentation continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Définissons $\mathbf{D_{cris,p}}$ par

$$\mathbf{D_{cris,p}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$$

Alors $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Définition 4. *La représentation* (ρ, V) *est cristalline si* $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Notons $\mathbf{Rep_{\mathbb{Q}_p,cris}(\Gamma_{\mathcal{K}})}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma_{\mathcal{K}})}$ formée par les représentations cristallines. Définissons $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ la catégorie des φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$: un objet D de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration $(\mathrm{Fil}^i(D))_{i\in\mathbb{Z}}$ formée de sous-espaces vectoriels, fitration qui est décroissante, exhaustive séparée, et muni d'une application σ-semi-linéaire bijective $\varphi : D \to D$. $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est alors naturellement un φ-module filtré. Un élément de l'"image essentiel du foncteur $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ restreint à $\mathbf{Rep_{\mathbb{Q}_p,cris}(\Gamma_{\mathcal{K}})}$ est appelé admissible. Notons $\mathbf{MF}^{\mathbf{ad}}_{\mathcal{K}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ formée des modules admissibles.
$\mathbf{Rep_{\mathbb{Q}_p,cris}(\Gamma_{\mathcal{K}})}$ et $\mathbf{MF}^{\mathbf{ad}}_{\mathcal{K}}$ sont deux catégories tannakiennes, le foncteur $\mathbf{D_{cris,p}}$ induit une équivalence de $\otimes$-catégories entre ces deux catégories, et un quasi-inverse est donné par le foncteur $\mathbf{V_{cris,p}}(D) = \left(\mathrm{Fil}^0(D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris})\right)^{\varphi=1}$. L'application naturelle (provenant de la multiplication dans B_{cris})

$$\mathbf{V_{cris,p}}(D) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \to D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris} \tag{5}$$

est alors une bijection.

1.2.2 Poids de Hodge-Tate

Rappelons que pour $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ une représentation continue sur un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ peut s'étendre à $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}$ via $g(v \otimes x) = \rho(g)(v) \otimes g(x)$. Notons alors pour $i \in \mathbb{Z}$, $V_{\mathbb{C}}\{i\} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | \forall g \in \Gamma_{\mathcal{K}},\, g(v) = \mathcal{X}(g)^i v\}$. $V_{\mathbb{C}}\{i\}$ est un $\mathcal{K}$-sous espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ tel que l'injection $V_{\mathbb{C}}\{i\} \to V_{\mathbb{C}}$ s'étend en une injection $\mathbb{C}$-linéaire

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_{\mathbb{C}}\{i\} \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to V_{\mathbb{C}}$$

Alors V est dit de Hodge-Tate si cette injection est une bijection. Les poids de Hodge-Tate sont alors les $i \in \mathbb{Z}$ tels que $\dim_{\mathcal{K}} V_{\mathbb{C}}\{i\} \neq 0$. Si V est cristalline, alors elle est de Hodge-Tate, et ses poids de Hodge-Tate sont les opposées des sauts de la filtration de $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$.

1.3 Rappels sur les φ-modules

La catégorie qui va nous interesser est la catégorie $\mathbf{MF_{W,tf}}$ dite des φ-modules filtrés sur W, dont les objets sont les W-modules N de type fini, muni

– d'une filtration décroissante exhaustive et séparée formée de sous-modules $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$;
– pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'une application σ-semi-linéaire $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i(N) \to N$ telle que $\varphi^i|_{\mathrm{Fil}^{i+1}(N)} = p\varphi^{i+1}$;
– il existe $i \in \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Fil}^i(N) = \{0\}$;
– les $\mathrm{Fil}^i(N)$ sont des facteurs directs dans N ;
– $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^i(\mathrm{Fil}^i(N)) = N$.

Les morphismes de cette catégorie sont donnés par les applications W-linéaires compatibles aux filtrations et commutants aux φ^i. C'est une $\otimes$-catégorie qui est abélienne, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui possède des Hom internes (cf. [Win84]).

Soit X (respectivement X_s pour $s \in \mathbb{N}^*$) le groupe additif des applications périodiques (respectivement ayant s pour période) de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Le Frobenius σ agit sur X par $\forall\xi \in X, \forall i \in \mathbb{Z}$, $\sigma(\xi)(i) = \xi(i+1)$, et laisse donc stable les X_s.

Pour tout objet N de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, si $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un scindage de $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$, posons pour $x \in N$ tel que $x = \sum_i x_i$ avec $x_i \in N_i$, $f_N(x) = \sum_i \varphi^i_N(x_i)$. Soit pour tout $\xi \in X$, le W-module $N\{\xi\} := \{x \in N | f^j_N(x) \in N_{\xi(j)}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}\}$. Le φ-module filtré N est dit *élémentaire* si $N = \oplus_{\xi\in X} N\{\xi\}$.

Lemme 6. *Si N est un module élémentaire, dont le module sous-jacent est libre sur W ou sur k, alors il existe une base $(e^i_\xi)_{\xi\in X,\, 1\le i\le \mathrm{rg}(N\{\xi\})}$ de N telle que pour tout ξ, $(e^i_\xi)_{1\le i\le \mathrm{rg}(N\{\xi\})}$ soit une base de $N\{\xi\}$ et de plus $\varphi^{\xi(0)}(e^i_\xi) = e^i_{\sigma(\xi)}$.*

J.-P. Wintenberger a montré dans [Win84] :

Théorème 7. *Pour tout objet N de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, il existe un et un seul scindage de la filtration de N tel que*
– *il existe un (unique) $u_N \in Aut_W(N)$ tel que le φ-module filtré $(N, (N_i), u_N^{-1} \circ f_N)$ soit élémentaire ;*
– *N/pN ait une suite de composition dont les quotients successifs sont des modules élémentaires.*

Ce scindage vérifie les propriétés de fonctorialité attendues.

Posons enfin $\mathbf{MF^{[a,b]}_{W,tf}}$ (resp. $\mathbf{MF^{[a,b]}_{W}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ formée des W-modules M (resp. modules libres) tels que $\mathrm{Fil}^a(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^{b+1}(M) = \{0\}$. Notons $\mathbf{MF^{-h}_{W,tf}} = \mathbf{MF^{[-h,0]}_{W,tf}}$, $\mathbf{MF^{h}_{W,tf}} = \mathbf{MF^{[0,h]}_{W,tf}}$ et $\mathbf{MF^{\pm h}_{W,tf}} = \mathbf{MF^{[-h,h]}_{W,tf}}$ (de même sans le symbole tf). Pour terminer, nous désignerons par $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$ la catégorie engendrée par $\mathbf{MF^{h}_{W}}$ dans la catégorie $\mathbf{MF_{W,tf}}$ pour les opérations de sous-objet, objet quotient, somme directe et produit tensoriel.

Soit D un φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ admissible. Alors il possède des sous-réseaux fortement divisible, M, c'est-à-dire un réseau M vérifiant $\sum_{i\in\mathbb{Z}} p^{-i}\varphi(\mathrm{Fil}^i(D) \cap M) = M$. En posant $\mathrm{Fil}^i(M) = \mathrm{Fil}^i(D) \cap M$, $\varphi^i = p^{-i}\varphi|_{\mathrm{Fil}^i(M)}$, M devient un φ-module filtré sur W. Réciproquement, si M est un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ libre sur W, en posant $D := \mathcal{K} \otimes_W M$, $\mathrm{Fil}^i(D) := \mathcal{K} \otimes_W \mathrm{Fil}^i(M)$, et pour $x_i \in \mathrm{Fil}^i(M)$, $\varphi(x_i) := p^i\varphi^i(x_i)$, l'objet D ainsi construit est un φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible (et donc en fait admissible) dont M est un réseau fortement divisible. Par contre, différents M peuvent donner le même D. Nous noterons D_M ce φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible construit à partir de M.

1.4 Le théorème de Fontaine-Laffaille

DÉFINITION 8. *Pour tout objet M de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tel que $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$, soit $\mathbf{V_{cris}}(M)$ la représentation galoisienne définie par :*

$$\mathbf{V_{cris}}(M) = \left(\mathrm{Fil}^0(M \otimes_W A_{cris})\right)^{\varphi^0}$$

Si M est libre comme W-module, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre (c'est un sous-réseau de $\mathbf{V_{cris,p}}(D_M)$).

THÉORÈME 9 (Théorème de Fontaine-Laffaille). *Si nous nous restreignons à la sous-catégorie pleine des M vérifiant $\mathrm{Fil}^{2-p}(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$, alors le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ ainsi défini est exact et pleinement fidèle. De plus si M est libre sur W, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un réseau de la représentation galoisienne associée à D_M (c'est-à-dire que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{V_{cris}}(M)) = \mathrm{rg}_W(M)$).*

Nous noterons $\mathbf{D_{cris}}$ un quasi-inverse à $\mathbf{V_{cris}}$ (Il est donc défini sur la catégorie formée par les réseaux des représentations cristallines sur $\mathbb{Q}_p$ de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$, et leurs quotients, à valeurs dans $\mathbf{MF^{2-p}_{W,tf}}$).

2 Construction du foncteur

2.1 Rappels sur $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$

Notons $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ ($\mathbf{\Gamma\Phi M^h_S}$ se définit de la même façon) la sous-catégorie pleine de la catégorie des (φ, Γ_0)-modules sur S_0 (cf. paragraphe 1.1) formée des objets $\mathcal{N}$ vérifiant :
- le S_0-module sous-jacent est de type fini et sans p'-torsion (i.e. pour tout élément irréductible λ de S_0 non associé à p, $\mathcal{N}$ est sans λ-torsion),
- le S_0-module $\mathcal{N}/\varphi(\mathcal{N} \otimes_\sigma S_0)$ est annulé par q^h (où $q = \pi_0 + p$),
- le groupe Γ_0 agit trivialement sur $\mathcal{N}/\pi_0\mathcal{N}$.

Elle est abélienne si $0 \le h \le p-2$, et l'inclusion $j : S_0 \to \mathcal{O}_\mathcal{E}$ induit un foncteur $j^* : \mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}} \to \mathbf{\Gamma\Phi M^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}}$ pleinement fidèle qui est une équivalence de catégorie pour $0 \le h \le p-2$ sur son image essentielle (cf. [Fon90], p.301). Si $\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, alors $j^*(\mathcal{N})$ a pour espace sous-jacent $\mathcal{N} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Nous ferons souvent l'abus de notation de n'écrire que l'espace sous-jacent pour désigner $j^*(\mathcal{N})$.

Si $0 \leq h \leq p-2$ et $\mathcal{N}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, N. Wach a montré qu'il est possible de munir $N = \mathcal{N}/\pi_0 N$ d'une structure de φ-module filtré sur W en posant

$$\mathrm{Fil}^r N = \{x \in N \text{ tels qu'il existe un relèvement } \widehat{x} \in \mathcal{N} \text{ de } x \text{ avec } \varphi(\widehat{x}) \in q^r\mathcal{N}\}$$

et pour tout $x \in \mathrm{Fil}^r N$, $\varphi^r(x)$ égal à l'image de $\frac{\varphi(\widehat{x})}{q^r}$ dans N. Elle a alors démontré le théorème suivant (cf. [Wac97], p.231) :

Théorème 10. *Soit $0 \leq h \leq p-2$. Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, le φ-module filtré $i^*(\mathcal{N}) = \mathcal{N}/\pi_0\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$; le foncteur i^* ainsi défini est exact et fidèle.*

2.2 Foncteur entre $\mathbf{MF^h_W}$ et $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$

N. Wach a donné les idées pour construire un quasi-inverse à i^* : à partir d'un objet N de $\mathbf{MF^h_W}$ avec $0 \leq h \leq p-2$ et d'une base adaptée à la filtration, elle a construit un objet $\mathcal{N}$ tel que $i^*(\mathcal{N}) = N$. Nous allons montrer qu'en se fixant un scindage fonctoriel de la filtration, nous rendons cette construction fonctorielle.

Proposition 11. *Soit $\mathbf{MF^+_{W,tf}}$ la sous-catégorie pleine formée de la réunion des $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ (définition analogue pour $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^+_{S_0}}$). A tout scindage fonctoriel de la filtration des objets de $\mathbf{MF^+_{W,tf}}$ nous pouvons associer un foncteur de $\mathbf{MF^+_{W,tf}}$ vers $\mathbf{\Phi M^{\acute{e}t}_{S_0}}$ (la catégorie des φ-modules sur S_0 dont l'extension à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ donne un φ-module étale), qui soit fidèle, additif, exact, et qui préserve le produit tensoriel.*

Démonstration. Si N est un objet de $\mathbf{MF^+_{W,tf}}$, et $N = \oplus N_i$ le scindage de la filtration, il suffit de construire sur $N \otimes_W S_0$ une structure de φ-module par : l'application φ^i étant défini sur $\mathrm{Fil}^i(N)$, elle se restreint à N_i, permettant de poser φ_N égal à $q^i\varphi^i$ sur N_i, c'est-à-dire

$$\forall x \in N_i,\ \varphi_N(x) = q^i\varphi^i(x)$$

Nous prolongeons cette définition à $N \otimes_W S_0$ tout entier en utilisant la semi-linéarité de φ_N. Les propriétés de fonctorialité découlent alors de celles du scindage de la filtration. Au niveau des flèches, ce foncteur est construit de la manière suivante : si $f : N \to N'$ est un morphisme de φ-modules filtrés, le foncteur lui associe $f \otimes \mathrm{Id}$. $\square$

Remarque 12. *Le fait qu'il existe un scindage de la filtration fonctoriel (notamment préservant le produit tensoriel) nous est donné par le théorème 7.*

Remarque 13. *Nous pouvons étendre ce foncteur de la même façon en un foncteur de la catégorie des φ-modules filtrés libres sur W vers $\mathbf{\Phi M^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}}$, qui préserve sous-objet, objet quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.*

N. Wach a montré la proposition suivante (cf. le lemme 3.1.6 p.233 de [Wac97]) :

Proposition 14. *Supposons $0 \leq h \leq p-2$. Alors pour tout objet N de $\mathbf{MF_W^h}$, il existe une unique action de Γ_0 sur $N \otimes_W S_0$ triviale modulo π_0 et commutant au φ_N construit comme dans la proposition 11. Le module $N \otimes_W S_0$ est alors muni d'une structure de (φ, Γ_0)-module sur S_0 et devient un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$..*

C'est le point de départ pour montrer le théorème suivant :

Théorème 15. *Supposons $0 \leq h \leq p-2$. Il existe un $\otimes$-foncteur F additif, exact, fidèle et pleinement fidèle de $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$ dans $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^+}$, qui composé avec le foncteur oubli donne juste le foncteur extension des scalaires de W à S_0. De plus, il induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{MF_{W,tf}^h}$ et $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$, dont un quasi-inverse est i^*.*

Démonstration. La *première étape* consiste à construire F sur $\mathbf{MF_W^h}$. Soit N un objet de $\mathbf{MF_W^h}$ (donc libre comme W-module). Considérons $N \otimes_W S_0$: comme $0 \leq h \leq p-2$, il existe une unique action de Γ_0 sur $N \otimes_W S_0$ qui commute à φ et est triviale modulo π_0 (c'est le lemme 3.1.6 p.233 de [Wac97]). Le (φ, Γ_0) module ainsi défini, noté $\mathrm{F}(N)$, est bien un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$. Il faut voir que nous définissons bien ainsi un foncteur. Comme la structure de φ-module provient d'un scindage de la filtration qui préserve le produit tensoriel, l'unicité de l'action de Γ_0 nous donnera bien que F préserve le produit tensoriel (tant que celui-ci reste dans $\mathbf{MF_W^h}$). L'exactitude provient de la même raison. N. Wach a montré (lemme 3.1.1.2 de [Wac97]) qu'il existe un unique générateur topologique g_0 de Γ_0 tel que $\frac{g_0(q)-q}{q\pi_0} = 1$ modulo qS_0. Il suffit donc d'étudier l'action de g_0. Choisissons une base adaptée à la graduation $(e_i)_{1\leq i \leq d}$ (c'est-à-dire : si r_i est le plus grand entier tel que $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i}(N)$, alors pour tout r, $(e_i)_{r_i=r}$ est une base de N_r), et si $(a_{i,j})$ est la matrice des applications φ^r dans cette base, l'action de φ est donné par :

$$\varphi(e_j) = q^{r_j} \sum_{1\leq i \leq d} a_{i,j} e_i$$

Avant de montrer que F préserve les sous objets, nous allons étudier plus en détail l'action de g_0.

N. Wach construit l'action de g_0 sur $N \otimes_W S_0$ par récurrence modulo π_0^n. Nous avons besoin de voir cette action d'une autre façon : soit $G = (g_{i,j})$ la matrice dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$ définie par $g_0(e_j) = \sum_i g_{i,j} e_i$, et $A = (a_{i,j}) \in GL_{\mathrm{rg}(N)}(W)$ donnant l'action de φ^j sur e_j. Alors, en écrivant $\varphi \circ g_0(e_j) = \sum_{i,k} \varphi(g_{i,j}) a_{k,i} q^{r_i} e_k$ et $g_0 \circ \varphi(e_j) = \sum_{i,k} g(a_{i,j}) g_{k,i} g(q)^{r_j} e_k$, la commutativité $\varphi \circ g_0 = g_0 \circ \varphi$ nous donne pour G l'équation $AQ\varphi(G) = Gg_0(A)g_0(Q)$ avec Q la matrice correspondant à $Q(e_j) = q^{r_j} e_j$ (et $g_0(A) = A$ puisque A est à coefficients dans W). Donc G est un point fixe de l'application $f : H \mapsto AQ\varphi(H)g_0(Q^{-1})g_0(A^{-1})$ (et le lemme 3.1.6 p.233 de [Wac97] affirme juste l'unicité d'un tel point fixe à coefficients dans S_0, qui soit congru à Id modulo π_0). Notons I la matrice identité dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}$ et $G_n = f^{(n)}(I)$ (c'est-à-dire la composée n fois de f appliquée à I). Alors, en utilisant que $G - I \in \pi_0 M_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$, nous allons montrer :

Lemme 16. *La matrice G est la limite de la suite G_n.*

Démonstration. Notons $\varphi^{(n)}$ la composée n fois de φ et introduisons alors $B_n = AQ\varphi(A)\varphi(Q)\cdots\varphi^{(n-1)}(A)\varphi^{(n-1)}(Q)$ qui est une matrice à coefficients dans S_0. Nous avons $G_n = B_n\varphi^{(n)}(I)g_0(B_n^{-1})$, et comme G est un point fixe de f, $G = B_n\varphi^{(n)}(G)g_0(B_n^{-1})$, d'où l'égalité $G_n - G = B_n\varphi^{(n)}(I-G)g_0(B_n^{-1})$. Notons $G = I - \pi_0 H$ avec $H \in M_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$, alors nous avons $G_n - G = \varphi^{(n)}(\pi_0)B_n\varphi^{(n)}(H)g_0(B_n^{-1})$. Or, comme A est inversible (dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}(W)$), les seuls dénominateurs possibles sont les puissances de $g_0(q)^{r_i}$, et comme $0 \leq r_i \leq p-2$, nous pouvons écrire $G_n - G = \frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}}G'_n$ avec $G'_n = B_n\varphi^{(n)}(H)g_0\big(\varphi^{(n-1)}(q^{p-2}Q^{-1})\varphi^{(n-1)}(A^{-1})\cdots q^{p-2}Q^{-1}A^{-1}\big)$ qui est une matrice à coefficients dans S_0.
Donc tout revient à montrer que $\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}}$ tend vers 0. Nous avons $g_0(q) = v_g q$ avec v_g inversible dans S_0, par conséquent le fait que φ et g_0 commutent nous donne l'égalité

$$\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\big(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\big)^{p-2}} = \frac{(v_g\varphi(v_g)\cdots\varphi^{(n-1)}(v_g))^{2-p}}{(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q))^{p-2}}\varphi^{(n)}(\pi_0)$$

En utilisant que $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$ pour u un certain inversible dans S_0, nous obtenons que $\varphi^{(n)}(\pi_0) = (q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q))^{p-1}\pi_0 u\varphi(u)\cdots\varphi^{(n-1)}(u)$. Donc,

$$\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\big(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\big)^{p-2}} = \pi_0\frac{u\varphi(u)\cdots\varphi^{(n-1)}(u)}{(v_g\varphi(v_g)\cdots\varphi^{(n-1)}(v_g))^{p-2}}q\varphi(q)\cdots\varphi^{(n-1)}(q)$$

et, puisque $q\varphi(q)\cdots\varphi^{(n-1)}(q)$ tend vers 0 dans S_0 (q est dans l'idéal maximal de S_0, idéal qui est stable par φ), nous pouvons conclure que $\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}}$ tend vers 0 dans S_0, c'est à dire que G_n tend vers G. □

Montrons alors la proposition suivante (qui est le point technique clé de cet article) :

Proposition 17. *Soit $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, L un sous-objet (dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$) de $M := \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$, alors l'action de Γ_0 sur $\bigoplus_i \otimes_j \mathrm{F}(N_{i,j}) = M \otimes_W S_0$ laisse stable $L \otimes_W S_0$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour l'action du générateur g_0 de Γ_0. Fixons pour chaque $N_{i,j}$ une base $(e_k^{(i,j)})$ adaptée à la graduation. Notons $G^{(i,j)}$ la matrice de l'action de g_0 sur cette base et $C^{(i,j)}$ la matrice donnant l'action de φ sur $N_{i,j} \otimes_W S_0$ (avec les notations précédentes, $C = AQ$). Alors, par le lemme précédent nous avons $\lim_{n\to+\infty} G_n^{(i,j)} = G^{(i,j)}$ avec $C^{(i,j)}\varphi(G_n^{(i,j)})g_0(C^{(i,j)})^{-1} = G_{n+1}^{(i,j)}$ et $G_0^{(i,j)} = I^{(i,j)}$.

Prenons $(u[l])_l$ une base de L, et notons $(u[l]_k^{(i,j)})$ les coordonnées de $u[l]$ dans la base $(e_k^{(i,j)})$. Nous voulons montrer (par récurrence) que $\bigoplus_i \otimes_j G_{n+1}^{(i,j)} g_0(u_k^{(i,j)})$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $(u[l]_k^{(i,j)})$, pour u élément quelconque de $L \otimes_W S$ (et $(u_k^{(i,j)})$ ses coordonnées). Remarquons que par linéarité, il suffit de le montrer pour u égal aux $u[l]$.

Comme L est un sous-objet de M, nous avons $L \otimes_W S_0$ qui est stable par φ. Or φ induit une bijection de $L \otimes_W S_0[\frac{1}{q}]$. Cela se traduit alors en disant $\bigoplus_i \otimes_j C^{(i,j)}\varphi(u[l']_k^{(i,j)})$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $(u[l]_k^{(i,j)})$, et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q^N \big(\otimes_j C^{(i,j)}\big)^{-1}(u[l']_k^{(i,j)})$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $\varphi(u[l]_k^{(i,j)})$.

Par conséquent, $g_0(q)^N g_0\big(\otimes_j C^{(i,j)}\big)^{-1}\big(g_0(u[l']_k^{(i,j)})\big)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $\big(g_0(\varphi(u[l]_k^{(i,j)}))\big)$, ceci pour tout l'.

Puis, $\bigoplus_i \otimes_j \varphi(G_n^{(i,j)}) g_0\big(\varphi(u[l']_k^{(i,j)})\big) = \varphi\big(\bigoplus_i \otimes_j G_n^{(i,j)} g_0(u[l']_k^{(i,j)})\big)$ est pour tout l' une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $\big(\varphi(u[l]_k^{(i,j)})\big)$, cela provient de notre hypothèse de récurrence.

En reprenant que $\bigoplus_i \otimes_j C^{(i,j)}\varphi(u[l']_k^{(i,j)})$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $(u[l]_k^{(i,j)})$ pour tout l', et en mettant bout à bout ces affirmations, nous obtenons que

$$g_0(q)^N \bigoplus_i \otimes_j G_{n+1}^{(i,j)} g_0(u[l']_k^{(i,j)}) = \\ g_0(q)^N \bigoplus_i \otimes C^{(i,j)} \otimes \varphi(G_n^{(i,j)}) g_0\big(\otimes C^{(i,j)}\big)^{-1}(g_0(u[l']_k^{(i,j)}))$$

est pour tout l' une combinaison linéaire (à coefficients dans S_0) des $(u[l]_k^{(i,j)})$. Par conséquent, si $g^{[n]}$ désigne l'application g_0-linéaire construite à partir de la matrice $\bigoplus_i \otimes_j G_n^{(i,j)}$ (l'hypothèse de récurrence se traduisant par : $L \otimes_W S_0$ est stable par $g^{[n]}$), alors $g^{[n+1]}(L \otimes_W S_0) \subset \frac{1}{g_0(q)^N} L \otimes_W S_0 = \frac{1}{q^N} L \otimes_W S_0$. Considérons alors $(f_r)_{1\leq r\leq \mathrm{rg}_W(M)}$ une base de M telle qu'il existe $n_r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ avec $(p^{n_r} f_r)$ base de L. Alors $g^{[n+1]}(p^{n_r} f_r) = \sum_s \frac{\alpha_s}{q^N} p^{n_s} f_s$ avec $\alpha_s \in S_0$ (qui dépend de r). Mais, par construction, $g^{[n+1]}(M \otimes_W S_0) \subset M \otimes_W S_0$, alors $g^{[n+1]}(p^{n_r} f_r) = \sum_s p^{n_r} \beta_s f_s$ avec $\beta_s \in S_0$ (qui dépend aussi de r). D'où $p^{n_r}\beta_s = \frac{\alpha_s}{q^N} p^{n_s}$, ce qui implique que q^N divise α_s dans S_0, donc que $g^{[n+1]}(L \otimes_W S_0) \subset L \otimes_W S_0$, ce qui montre bien la récurrence.

Pour initialiser la récurrence ($n = 0$) nous avons $G_0^{(i,j)} = I^{(i,j)}$ (où I est la matrice identité), donc $\bigoplus_i \otimes_j G_0^{(i,j)} g_0(u_k^{(i,j)}) = u_k^{(i,j)}$ pour tout u dans L. D'où par récurrence la propriété est vraie pour tout n. En passant à la limite, la propriété est vrai pour $\bigoplus_i \otimes_j G^{(i,j)}$. Donc l'action de g_0 sur $M \otimes_W S_0$ laisse stable $L \otimes_W S_0$. □

Cette proposition est le coeur du théorème. Elle nous donne en particulier que si N' est un sous-objet de N dans $\mathbf{MF^h_W}$, alors l'action de g_0 sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$. Elle est triviale modulo π_0 : si (e_i) est une base de N, telle qu'il existe $(\alpha_i) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ avec $(p^{\alpha_i} e_i)$ base de N', alors il existe des coefficients $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ dans S_0 tels que $g_0(e_i) = e_i + \pi \sum_{j \neq i} x_{i,j} e_j$ et $g_0(p^{\alpha_i} e_i) = \sum_j y_{i,j} p^{\alpha_j} e_j$. En identifiant les coordonnées, nous avons $y_{i,i} = 1$ et $y_{i,j} p^{\alpha_j} = p^{\alpha_i} x_{i,j} \pi$ si $j \neq i$, donc π divise bien $y_{i,j}$ dans S_0 pour $j \neq i$. Donc l'action de g_0 sur $\mathrm{F}(N)$ se restreint en une action triviale modulo π_0 sur $N' \otimes_W S_0$ qui commute à φ, donc par unicité cette action est celle de $\mathrm{F}(N')$.
La *deuxième étape* consiste alors à définir F sur tout $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$. Le point important est que pour tout objet M de $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$, il existe des objets $N_{i,j}$ dans $\mathbf{MF^h_W}$ et L un sous-objet de $\bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$ tels que M est isomorphe à un quotient M' de L. Considérons alors N un sous-objet de M, et supposons que sur $M \otimes_W S_0$ nous ayons une structure de (φ, Γ_0)-module qui le rende isomorphe à $M' \otimes_W S_0$ muni de la structure de (φ, Γ_0)-module obtenu à partir de celle de $L \otimes_W S_0$ donnée par la proposition 17. Il faut voir que $N' \otimes_W S_0$ (où N' est l'image de N dans M') est stable par Γ_0. En notant $\pi : L \to M'$ la projection naturelle, $\pi^{-1}(N')$ est un sous-objet de L (car c'est le noyau du morphisme $L \to M'/N'$, donc par la remarque 1.4.2 et la proposition 1.4.1 de [Win84], c'est bien un sous-objet de L), donc la proposition 17 nous donne bien que $\pi^{-1}(N') \otimes_W S_0$ est stable par l'action de Γ_0. Par conséquent, $N \otimes_W S_0$ sera bien laissé stable par l'action de Γ_0 de $M \otimes_W S_0$, donc sera un sous-(φ, Γ_0)-module de $M \otimes_W S_0$.
Puis, F se construit par itération : notons $\mathbf{MF_n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, construite en disant qu'un objet de $\mathbf{MF_{n+1}}$ est soit le sous-objet ou le quotient d'un objet de $\mathbf{MF_n}$, soit la somme directe de deux objets de $\mathbf{MF_n}$, soit le produit tensoriel de deux objets de $\mathbf{MF_n}$, soit un objet de $\mathbf{MF_n}$, et posons (pour initialiser la récurrence) $\mathbf{MF_0} = \mathbf{MF^h_W}$. Alors, $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} > = \bigcup \mathbf{MF_n}$, et si F est construit sur $\mathbf{MF_n}$, alors il s'étend naturellement à la somme directe ou le produit tensoriel de deux objets de $\mathbf{MF_n}$, et l'étude précédente montre qu'il s'étend au cas d'un sous-objet, et donc d'un objet quotient, d'un objet de $\mathbf{MF_n}$. Nous pouvons donc donner naturellement une structure de (φ, Γ_0)-module à tout $M \otimes_W S_0$, pour M un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$.
La *troisième étape* s'occupe des morphismes. Pour M et M' deux objets de $\mathbf{MF_{W,tf}} < \mathbf{h} >$, et $f : M \to M'$ un morphisme, nous posons $\mathrm{F}(f) = f \otimes \mathrm{Id}$ (En particulier, le foncteur sera exact (car S_0 est plat sur W) et fidèle). C'est un morphisme de (φ, Γ_0) module : par construction, c'est un morphisme de φ-modules. Puis, $f \oplus \mathrm{Id} : M \oplus M' \to M' \oplus M'$ est un morphisme de φ-modules filtrés, donc par la proposition 1.4.1 de [Win84], $\mathrm{Ker}(f \oplus \mathrm{Id}) = \{x - y | x \in M,\ y \in$

M', $y = f(x)\}$ est naturellement un φ-module filtré, sous-objet de $M \oplus M'$, donc par la proposition 17, $\mathrm{Ker}(f \oplus \mathrm{Id}) \otimes_W S_0$ est laissé stable par l'action naturelle de Γ_0 sur $(M \oplus M') \otimes_W S_0$ (obtenue à partir de celle sur $M \otimes_W S_0$ et $M' \otimes_W S_0$), donc f commute à l'action de Γ_0, car si $x - y \in \mathrm{Ker}(f \oplus \mathrm{Id}) \otimes_W S_0$, dire que $g(x) - g(y) \in \mathrm{Ker}(f \oplus \mathrm{Id}) \otimes_W S_0$, c'est dire que $f(g(y)) = g(x) = g(f(y))$.

Montrons la pleine fidélité. Remarquons que si nous munissons $M \otimes_W S_0$ de la structure de φ-module filtré donnée par $\mathrm{Fil}^i(M \otimes_W S_0) = \{x \in M \otimes_W S_0 | \varphi(x) \in q^i M \otimes_W S_0\}$, et $\varphi^i = \frac{1}{q^i}\varphi$, alors la restriction modulo π_0 est un morphisme de φ-module filtré. Par conséquent, si $f : M \otimes_W S_0 \to M' \otimes_W S_0$ est un morphisme de (φ, Γ_0)-module, alors la réduction modulo π_0 induit $\bar{f} : M \to M'$ un morphisme de φ-modules filtrés. Donc $\bar{f} \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_W S_0 \to M' \otimes_W S_0$ est un morphisme de (φ, Γ_0)-module par le résultat précédent, donc $g = f - \bar{f} \otimes \mathrm{Id}$ aussi, et il se réduit modulo π_0 sur l'application nulle. Notons $\mathcal{M}''$ le noyau de g, c'est un sous (φ, Γ_0)-module de $M \otimes_W S_0$. Nous avons $\pi_0 \mathcal{M}'' = \mathcal{M}'' \cap \pi_0 M \otimes_W S_0$ car $M' \otimes_W S_0$ est sans π_0-torsion. Donc $\mathcal{M}''/\pi_0\mathcal{M}'' \subset M$, et par le lemme du serpent, nous avons égalité, car :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{M}'' \arrow[r] \arrow[d, "u_1"] & M \otimes_W S_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u_2"] & M \otimes_W S_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M \arrow[r, "\bar{g}"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les lignes horizontales sont exactes, u_1 est la réduction modulo π_0 composée avec l'inclusion $\mathcal{M}''/\pi_0\mathcal{M}'' \subset M$, u_2 et u_3 sont la réduction modulo π_0, u_2 est surjectif (u_3 aussi), et l'application naturelle $\mathrm{Ker}(u_2) = \pi_0 M \otimes_W S_0 \to \mathrm{Ker}(u_3) = \pi_0 M \otimes_W S_0$ est surjective. Donc, nous avons $M \otimes_W S_0 = \mathcal{M}'' + \pi_0 M \otimes_W S_0$, l'idéal engendré par π_0 est inclus dans le radical de Jacobson de S_0, $M \otimes_W S_0$ est de type fini sur S_0, donc par le lemme de Nakayama, nous avons $M \otimes_W S_0 = \mathcal{M}''$, donc $f = \bar{f} \otimes \mathrm{Id}$. Par conséquent le foncteur est pleinement fidèle.

La *quatrième étape* est l'étude du foncteur restreint à $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$. Par construction, nous avons $i^* \mathrm{F}(N) = N$ pour tout objet N de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$. Montrons :

LEMME 18. *Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$, libre comme S_0-module, si $N = i^*(\mathcal{N})$, il existe un unique isomorphisme de (φ, Γ_0)-module $\mathrm{F}(N) \to \mathcal{N}$ (qui se réduit modulo π_0 sur l'égalité $N = i^*(\mathcal{N})$).*

Démonstration. Présentons ici une démonstration de ce fait due à N. Wach. Pour cela, considérons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de N, adaptée à la graduation, et $(a_{i,j})$ la matrice des applications φ^r dans cette base (donc l'action de φ est donnée sur $\mathrm{F}(N)$ par $\varphi(e_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{i,j} e_i$). Il faut alors prouver l'existence et l'unicité d'une base (f_i) dans $\mathcal{N}$ vérifiant $\varphi(f_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{i,j} f_i$ avec $e_i = f_i$ modulo π_0. Ce sera suffisant car en posant $h(e_i) = f_i$, nous aurons un

morphisme de φ-module, qui fera commuter l'action de Γ_0 par unicité de celle-ci, et qui modulo π_0 redonnera l'identité.
Par construction du φ-module filtré N, la base (e_i) se relève en une famille $(\hat{e}_i)$ de $\mathcal{N}$ avec $\varphi(\hat{e}_i) \in q^{r_i}\mathcal{N}$. De plus, $\mathcal{N}$ est complet pour la topologie π_0-adique (car S_0 l'est), et modulo π_0, (e_i) est une base, donc $\mathcal{N}$ étant sans torsion, $(\hat{e}_i)$ est une base de $\mathcal{N}$ (nous pourrions aussi invoquer le lemme de Nakayama). Donc, il existe $\hat{a}_{i,j} \in S_0$ tels que :

$$\varphi(\hat{e}_j) = q^{r_j} \sum_{1 \le i \le d} \hat{a}_{i,j}\hat{e}_i$$

et $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j}$ modulo π_0. Posons $\alpha_{i,j} \in S_0$ l'unique élément tel que $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j} + \pi_0\alpha_{i,j}$. Nous cherchons à modifier la base $(\hat{e}_i)$ pour obtenir la base (f_i). Cherchons f_j sous la forme $f_j = \hat{e}_j + \pi_0 c_j$, et posons $b_j = \sum_{1 \le i \le d} \alpha_{i,j}\hat{e}_i$. Alors, puisque $\varphi(\pi_0) = uq^{p-1}\pi_0$,
$\varphi(\hat{e}_j + \pi_0 c_j) = \varphi(\hat{e}_j) + u\pi_0 q^{p-1}\varphi(c_j)$, et en faisant apparaître $\sum_{i=1}^{d} q^{r_j} a_{i,j}\pi_0 c_i$, nous obtenons
$\varphi(\hat{e}_j + \pi_0 c_j) = \sum_{i=1}^{d} q^{r_j} a_{i,j}(\hat{e}_i + \pi_0 c_i) + \pi_0 q^{r_j} b_j + u\pi_0 q^{p-1}\varphi(c_j) - \sum_{i=1}^{d} q^{r_j} a_{i,j}\pi_0 c_i$
autrement dit, nous cherchons les $c_j \in \mathcal{N}$ tels que

$$b_j + uq^{p-1-r_j}\varphi(c_j) - \sum_{1 \le i \le d} a_{i,j}c_i = 0$$

Nous résolvons ce système de manière unique par récurrence modulo π_0^n. A chaque étape, le système se résout en faisant une récurrence modulo p^k, en utilisant que $p - 1 - r_j \ge 1$ (par hypothèse), donc que $q^{p-1-r_j} = 0$ modulo (p, π_0), et que la matrice $(a_{i,j})$ est inversible modulo p. □

Pour terminer la démonstration du théorème (c'est à dire prouver le lemme précédent sans l'hypothèse sur la liberté de N), nous aurons besoin de résultats sur les modules de Wach, qui apparaitront plus loin dans l'article. La fin de la démonstration sera faite à la section 4. □

Pour la suite, nous aurons besoin de faire intervenir un foncteur légèrement différent. Si N est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, son dual $N^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(N, \mathbb{Z}_p)$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$, donc $\mathrm{F}(N^*)$ est bien défini.

Définition 19. *Le foncteur* F^- *est défini sur* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ *pour* $h \le p-2$ *par :*

$$\mathrm{F}^-(N) = \left(\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}\right)^* \ = N \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$$

pour tout objet N *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$. *Il donne bien un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ *(donc est à valeurs dans* $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^{ét}$*). Il s'étend de même à* $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} >$.

REMARQUE 20. *Le foncteur* F *consiste à munir* $N \otimes_W S_0$ *(pour* N *objet de* $\mathbf{MF_W} < \mathbf{h} >$*) d'une structure de* (φ, Γ_0)*-module, et pour avoir un foncteur défini sur* $\mathbf{MF_W^{-h}}$*, nous prenons le dual. Pour retrouver exactement les résultats du théorème 1 cité dans l'introduction, il faudrait définir* F^- *par* $\mathrm{F}^-(N) = \mathrm{F}(N^*)^*$*. Cet objet est le dual d'un* (φ, Γ_0)*-module sur* S_0 *de hauteur* h*, ce n'est donc pas un* (φ, Γ_0)*-module, car l'action de* φ *construite par dualité ne le laisse pas stable (de manière générale, le dual d'un* φ*-module sur* S_0 *n'est pas un* φ*-module). Mais nous verrons plus tard que c'est un module de Wach, au sens de [Ber04]. En étendant les scalaires à* $\mathcal{O}_\mathcal{E}$*, nous retrouvons le foncteur donné dans la définition précédente. Pour éviter d'avoir à introduire la catégorie des duaux des* (φ, Γ_0)*-module sur* S_0 *de hauteur* h*, nous n'utilise rons que la définition 19 (le théorème 1 se déduira alors directement du théorème 15, des propositions 31 et 35, de la remarque 39 et des propriétés des modules de Wach montrées par L. Berger).*

Remarquons que F^- peut être défini sur $\mathbf{MF_{W,tf}^{-h}}$ (puis sur $\mathbf{MF_{W,tf}} < -\mathbf{h} >$) en prenant pour un module de p-torsion le dual de Pontriaguine, et en passant à la limite projective pour le cas général.

REMARQUE 21. *Nous pouvons définir* $\widetilde{\mathrm{F}}$ *sur* $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ *pour* $h \leq \frac{p-2}{2}$ *en posant* $\widetilde{\mathrm{F}}(N) = \mathrm{F}(N \otimes_W W[h]) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}[-h]$ *avec* $\mathcal{O}_\mathcal{E}[-h] = \mathrm{F}(W[h])^*$ *et* $W[-h]$ *l'objet de* $\mathbf{MF_W^{-h}}$ *dont le* W*-module sous-jacent est* W*, avec* $\mathrm{Fil}^i(W[-h]) = \begin{cases} W \text{ si } i \leq -h \\ 0 \text{ si } i > -h \end{cases}$ *et* $\varphi^{-h}(x) = \sigma(x)$*. Alors,* $\widetilde{\mathrm{F}}(N^*)$ *est canoniquement isomorphe à* $\widetilde{\mathrm{F}}(N)^*$ *(cela se voit à l'aide de l'unicité de l'action de* Γ_0 *agissant trivialement modulo* π_0*, et commutant à* φ*, d'après le lemme 3.1.6 de [Wac97]), et* $\widetilde{\mathrm{F}}$ *s'étend alors en un foncteur sur* $\mathbf{MF_W} < \pm\mathbf{h} >$ *qui a des propriétés similaires à celles de* F*, et qui préserve le dual.*

3 LIEN ENTRE LE FONCTEUR ET LES MODULES DE WACH

3.1 FONCTORIALITÉ DE g_N

Rappelons le Théorème 1' de N. Wach (cf. [Wac97]) :

THÉORÈME 1'. *Si* $\mathcal{N}$ *est un objet de* $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$ *avec* $0 \leq h \leq p-2$*, alors* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(i^*(\mathcal{N}), A_{cris})$ *est isomorphe (en tant que représentation galoisienne) à* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$.

Enoncé dans le cadre (et avec les notations) qui nous intéresse, il devient :

THÉORÈME 1'. *Si* N *est un objet de* $\mathbf{MF_{W,tf}^{-h}}$ *avec* $0 \leq h \leq p-2$*, alors il existe un isomorphisme* $g_N : \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N)) \to \mathbf{V_{cris}}(N)$ *de représentations galoisiennes. Si en plus* N *est libre, en passant au dual, cela donne un isomorphisme de représentations galoisiennes* ${}^t g_N^{-1} : \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\left(\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}\right) \to \mathbf{V_{cris}}(N)^*$.

Nous allons vérifier que cet isomorphisme est fonctoriel :

Théorème 22. *Pour tout objet N de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, l'application g_N construite par N. Wach vérifie les propriétés de fonctorialité suivante :*

1. *pour tout morphisme $f : N \to N'$ entre deux objets N et N' de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, nous avons $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(f) \circ g_N = g_{N'} \circ \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(f))$ (cela s'applique en particulier pour l'injection d'un sous-objet, ou pour la projection sur un objet quotient).*
2. *pour tout objet N et N' de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, $g_{N\oplus N'} = g_N \oplus g_{N'}$;*
3. *pour tout objet N et N' de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, pour tout sous-objet L de $N \otimes N'$ tel que L soit un objet de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, l'application $g_N \otimes g_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(L))$ est égale à g_L. En particulier, si $N \otimes N'$ est un objet de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, alors $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$;*

Remarque 23. *Le point (3) montre en particulier que $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes N')$ est égal à $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N')$ dès que N, N' et $N \otimes N'$ sont des objets de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$.*

Rappelons la construction de g_N : N. Wach construit l'isomorphisme modulo p^n pour tout n à partir des morphismes d'anneaux (avec $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$) : $A_S^+/p^n \to W_n(R)/\pi_0$ et $A_{cris}/p^n \to W_n(R)/\pi_0$. Notons $\mathcal{N} := \mathrm{F}^-(N)$. Nous avons la bijection $\mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}/p^n) := (\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+/p^n)^\varphi \to (\mathcal{N} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}/p^n})^\varphi$ (cf [Fon90], p.296, où c'est exprimé pour le foncteur contravariant). Or, N. Wach a montré que pour N objet de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, le schéma suivant

$$\begin{tikzcd}
N/p^n \otimes_W A_{cris}/p^n \arrow[r, "k_N"] & N/p^n \otimes_W W_n(R)/\pi_0 & \mathcal{N}/p^n \otimes_{S_0} A_S^+/p^n \arrow[l, "j_{\mathcal{N}}"'] \\
\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N/p^n) \arrow[u, hook, "k"] & & \mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}/p^n) \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

induit un isomorphisme de représentations galoisiennes de $\mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}/p^n)$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N/p^n)$, c'est-à-dire que $K_N = k_N \circ k$ et $J_{\mathcal{N}} = j_{\mathcal{N}} \circ j$ sont toutes les deux injectives, et ont même image dans $N/p^n \otimes_W W_n(R)/\pi_0$.
Tout ceci passe à la limite projective, et nous obtenons l'application g_N bijective :

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_W A_{cris} \arrow[r, "k_N"] & N \otimes_W W(R)/\pi_0 & \mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+ \arrow[l, "j_{\mathcal{N}}"'] \\
\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N) \arrow[u, hook, "k"] \arrow[ur, "K_N"'] & & \mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}) \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[ul, "J_{\mathcal{N}}"] \arrow[ll, "g_N"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{V}_{\mathbf{A}_\mathbf{S}^+}(\mathcal{N}/p^n) = (\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+)^{\varphi=1} = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{N} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$.

Démonstration du théorème 22. Pour la fonctorialité au niveau des flèches, il suffit de remarquer que le diagramme suivant est commutatif (car $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(f))$

est juste $f \otimes \mathrm{Id}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(N)) \arrow[r, "\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(f))"] \arrow[d, hook] & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(N')) \arrow[d, hook] \\
N \otimes A_S^+ \arrow[r, "f\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{L}}"'] & N' \otimes A_S^+ \arrow[d, "j_{\mathcal{L}'}"] \\
N \otimes W(R)/\pi_0 \arrow[r, "f\otimes \mathrm{Id}"] & N' \otimes W(R)/\pi_0 \\
N \otimes A_{cris} \arrow[r, "f\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[u, "k_L"] & N' \otimes A_{cris} \arrow[u, "k_{L'}"'] \\
\mathbf{V_{cris}}(N) \arrow[r, "\mathbf{V_{cris}}(f)"] \arrow[u, hook] & \mathbf{V_{cris}}(N') \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Le fait que $g_{N\oplus N'} = g_N \oplus g_{N'}$ se montre de la même façon. Il reste donc à voir le cas du produit tensoriel : considérons N et N' deux objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{-\mathbf{h}}$ avec $h \leq p-2$. Soit L un sous-objet de $N \otimes N'$ qui est dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{-\mathbf{h}}$, posons $\mathcal{L} = L \otimes_W S_0$. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_W A_{cris} \arrow[r, hook] \arrow[d, "k_L"] & (N \otimes_W A_{cris}) \otimes_{A_{cris}} (N' \otimes_W A_{cris}) \arrow[d, "k_N \otimes k_{N'}"] \\
L \otimes_W W(R)/\pi_0 \arrow[r, hook] & \big(N \otimes_W W(R)/\pi_0\big) \otimes_{W(R)/\pi_0} \big(N' \otimes_W W(R)/\pi_0\big) \\
\mathcal{L} \otimes_{S_0} A_S^+ \arrow[r, hook] \arrow[u, "j_{\mathcal{L}}"] & (\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+) \otimes_{A_S^+} (\mathcal{N}' \otimes_{S_0} A_S^+) \arrow[u, "j_{\mathcal{N}} \otimes j_{\mathcal{N}'}"]
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, l'application $K_N \otimes K_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est égale à K_L, et l'application $J_{\mathcal{N}} \otimes J_{\mathcal{N}'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ est égale à $J_{\mathcal{L}}$.

Le point important est que L étant un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{-\mathbf{h}}$ (par hypothèse), ce sont bien des bijections, et ce sont celles qui permettent de construire g_L.

Donc $g_N \otimes g_{N'}$ envoie $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ sur $\mathbf{V_{cris}}(L)$ si L est un sous-objet de $N \otimes N'$ qui soit dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{-\mathbf{h}}$, et plus exactement, l'application $g_N \otimes g_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ est égale à g_L.

Si $N \otimes N'$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{-\mathbf{h}}$, le résultat précédent avec $L = N \otimes N'$ nous donne $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$. □

Remarque 24. *Nous montrons de même que pour* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *objets de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ *avec* $0 \leq h \leq p-2$*, et pour* L *un sous-objet de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$ *qui soit dans* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*, alors* $\bigoplus \otimes g_{\mathrm{F}^-(N_{i,j})}$ *restreinte à* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(L))$ *est égale à* g_L*.*

Nous pouvons traduire ces résultats en disant :

Théorème 25. *Soit* $0 \leq h \leq p-2$*, et notons* $\mathcal{G}$ *le foncteur exact de la catégorie* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ *vers la catégorie des représentations continues de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$ *sur les* $\mathbb{Z}_p$*-modules de rang fini, défini par : si* N *objet de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*,* $\mathcal{G}(N) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(N))$*. Alors il existe* g *un isomorphisme de foncteurs entre* $\mathcal{G}$ *et* $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}$*. De plus, nous pouvons supposer que :*

- *pour tous objet* N *et* N' *de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*, tel que* $N \otimes N'$ *soit encore un objet de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*, nous avons* $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$ *;*
- *pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*, pour tout sous-objet* L *(dans* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$*) de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$*, l'application* $\bigoplus \otimes g_{N_{i,j}}$ *restreinte à* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(L))$ *est égale à* g_L*.*

3.2 Lien entre $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ et $\mathbf{\Gamma \Phi M^h_S}$

Avant de parler de modules de Wach (qui sont des S-modules), il faut comprendre l'extension des scalaires $S_0 \to S$.

Lemme 26. $S = \bigoplus_{0\leq i\leq p-2} S_i$*, où si* $x \in S_i$ *et* $g \in \Gamma_f$ *est* $[\alpha]$ *(le relèvement de Teichmuller de* $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$*), alors* g *agit sur* x *par* $g(x) = [\alpha]^i x$*.*

Démonstration. L'application $p_i = \frac{1}{|\Gamma_f|} \sum_{g\in\Gamma_f} \mathcal{X}(g)^{-i} g$ est un projecteur dont l'image est S_i, et les p_i vérifient $\sum_{0\leq i\leq p-2} p_i = \mathrm{Id}$. □

Lemme 27. *S a une base normale sur S_0, c'est à dire qu'il existe* $e \in S$ *tel que* $(g(e))_{g\in\Gamma_f}$ *soit une base de* S *sur* S_0*. De plus,* p *ne divise aucun* $p_i(e)$*.*

Démonstration. En effet, il suffit de le montrer modulo p (et ensuite de relever une base normale de $k[[\pi]]$ sur $k[[\pi_0]]$, puisque S_0 est complet pour la topologie p-adique). Or, Fontaine a montré dans [Fon90], page 270, que le corps des fractions de $k[[\pi]]$, $k((\pi))$, est une extension galoisienne cyclique de degré $p-1$ (donc modérément ramifiée) de $k((\pi_0))$, dont le groupe de Galois est donné par Γ_f. Donc, par un théorème de E. Noether, il existe une base normale pour les anneaux d'entiers correspondants. Enfin, si $\overline{e}$ est cette base (modulo p), alors $p_i(\overline{e}) = \sum_g \frac{\mathcal{X}(g)^{-i}}{|\Gamma_f|} g(\overline{e})$ est non nul (puisque chaque coordonnée suivant la base $(g(\overline{e}))$ est non nulle (même modulo p)), donc $p_i(e)$ sera bien non divisible par p si e relève $\overline{e}$. □

En particulier, nous avons $S_i = p_i(e)S_0$ (car $p_i(e)S_0 \subset S_i$, puis $e \in \oplus_i p_i(e)S_0$, $\oplus_i p_i(e)S_0$ est donc un S_0-module contenant e et stable par Γ_f, donc $S = \oplus_i p_i(e)S_0 \subset \oplus_i S_i = S$). Puis, remarquons que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, donc pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, nous avons les $p_i(\mathcal{M})$ en somme directe dans $\mathcal{M}$. Enfin, $p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f} \subset p_i(\mathcal{M})$, et $p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est isomorphe comme S_0-module à $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ car $\mathcal{M}$ est sans p'-torsion, et p ne divise pas $p_i(e)$. Donc, nous avons que pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0 p_i(e)$ s'injecte dans $\mathcal{M}$.

PROPOSITION 28. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, alors $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$. De plus, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0 = \mathcal{M}/\pi$. Enfin, si $\mathcal{M}$ est S-libre, alors $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est S_0-libre.*

Démonstration. Nous avons que $p_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Or, comme l'action de Γ_f est triviale modulo π, nous avons que pour tout $x \in \mathcal{M}$, $x - p_0(x) \in \pi\mathcal{M}$, donc si $\mathcal{N}$ est le S-module engendré par $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ (c'est à dire que $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$ d'après la remarque précédent la proposition), alors $\mathcal{M} = \mathcal{N} + \pi\mathcal{M}$, donc comme $\mathcal{M}$ est de type fini sur S, et que l'idéal engendré par π est dans le radical de S, le lemme de Nakayama nous donne que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.
Puis, $\mathcal{M}$ est de type fini sur S, donc sur S_0 (car S est un S_0-module libre de rang fini par le lemme 27), donc engendré sur S_0 par exemple par la famille finie (m_i). Alors, $p_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est engendré par la famille $(p_0(m_i))$ (car p_0 est un morphisme de S_0-modules), donc est de type fini. De plus, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ étant inclus dans $\mathcal{M}$, il est sans p'-torsion.
Ensuite, nous avons que $\pi\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\Gamma_f} = \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f}$: pour S, l'égalité $\pi S \cap S_0 = \pi_0 S_0$ provient juste de ce que π_0 est un multiple de π, donc $\pi_0 S_0 \subset \pi S \cap S_0$, et pour la réciproque, que $S_0 = W[[\pi_0]]$. Cela se traduit par la suite exacte de S_0-modules

$$0 \longrightarrow \pi_0 S_0 \longrightarrow S \longrightarrow S/\pi S \oplus S/S_0 \longrightarrow 0$$

(la surjectivité vient juste de ce que $S/\pi = W$, et que $W \subset S_0$), et en tensorisant par $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ au dessus de S_0, nous avons la suite exacte de S_0-modules

$$0 \longrightarrow \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\pi \oplus \mathcal{M}/\mathcal{M}^{\Gamma_f} \longrightarrow 0$$

ce qui traduit bien $\pi\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\Gamma_f} = \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Par conséquent, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0$ s'injecte dans $\mathcal{M}/\pi$, et l'action de Γ_0 provient de celle sur $\mathcal{M}/\pi$, qui est triviale par définition. De plus, nous avons vu que pour tout $x \in \mathcal{M}$, $x - p_0(x) \in \pi\mathcal{M}$, donc comme $p_0(x) \in \mathcal{M}^{\Gamma_f}$, l'application naturelle $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0 \to \mathcal{M}/\pi$ (dont nous avons vu l'injectivité) est surjective. Par conséquent, si $\mathcal{M}$ est S-libre, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0$ est W-libre et $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est sans π_0-torsion, et donc S_0 étant complet pour la topologie π_0-adique, une W-base de $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0$ se relève en une S_0-base de $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$.
Enfin, φ commute à Γ, donc laisse stable $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$, donc induit un morphisme $\varphi_0 : \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0 \to \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Pour étudier le conoyau, remarquons d'abord que $x \otimes y \in S_0 \otimes_\sigma S_0 \mapsto \varphi(x)y \in S_0$ et $x \otimes y \in S \otimes_\sigma S \mapsto \varphi(x)y \in S$ sont des

isomorphismes (préservant l'action naturelle de Γ_f), donc $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] \simeq S_0[\frac{1}{q}]$ et $S\otimes_{\sigma(S)}S[\frac{1}{q}] \simeq S[\frac{1}{q}]$ (puisque $S[\frac{1}{q}]$ est plat sur S et $S_0[\frac{1}{q}]$ est plat sur S_0). Par conséquent, $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S \simeq S \otimes_{\sigma(S)} S$ et $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S[\frac{1}{q}] \simeq S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$; plus présicément, si $y_i \in S \otimes_{\sigma(S)} S$ s'envoye dans S sur $p_i(e)$ (nous pouvons supposer que $y_0 = 1$ car $p_0(e)$ est inversible dans S_0), alors $S \otimes_{\sigma(S)} S = \oplus_i S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i$ et $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] y_i$ (c'est bien le même y_i, car $S \otimes_{\sigma(S)} S$ s'injecte dans $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$, puisque $S \otimes_{\sigma(S)} S$ est sans q-torsion). Et l'action naturelle de Γ_f sur $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$ revient à dire que $g(y_i) = \mathcal{X}(g)^i y_i$ pour $g \in \Gamma_f$. Puisque $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$, nous avons que $\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] y_i$. Donc, $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$ s'injecte naturellement dans $\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$, et $(\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$.
Ensuite, $\varphi : \mathcal{M} \otimes_\sigma S \to \mathcal{M}$ est injective, de conoyau tué par q^h (par définition), donc comme $S[\frac{1}{q}]$ est plat sur S, φ induit une bijection $\varphi : \mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] \to \mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}]$. Puis, $S[\frac{1}{q}] = \oplus_i S_0[\frac{1}{q}] p_i(e)$, donc $\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}] = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}] p_i(e)$, donc $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}]$ s'injecte dans $\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}]$ et $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S[\frac{1}{q}] = (\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$. Par conséquent, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}] \\ \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[u, hook, "i"] & \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}] \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, avec φ bijective, i et j injective, et φ (qui commute à l'action de Γ_f) qui identifie $(\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$ à $(\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$, donc φ_0 est bijective (donc $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\varphi_0(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0)$ est de q-torsion, donc tué par une puissance de q car $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est de type fini sur S_0).
Soit alors $x \in \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Par définition, il existe $y \in \mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i$ tel que $\varphi(y) = q^h x$. La commutativité du diagramme et la bijectivité de φ_0 nous donne que $y \in \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$. Donc nous avons $y \in \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]\big) \cap \big(\oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i\big) = \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]\big) \cap \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0\big) = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0$.
En définitive, nous avons bien que $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\varphi_0(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0)$ est tué par q^h.
Finalement, nous avons bien que $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$. □

Remarque 29. *De la même façon que pour S_i, nous montrons pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma \Phi M^h_S}$ que $p_i(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_i = p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f}$.*

Théorème 30. *L'extension des scalaires de S_0 à S induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ et $\mathbf{\Gamma \Phi M^h_S}$, préservant suites exactes et produit tensoriel (si ce dernier est encore dans la catégorie). Un quasi-inverse est donné par les points fixes par Γ_f.*

Démonstration. L'essentielle surjectivité se prouve en remarquant que si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un morphisme de $\mathbf{\Gamma \Phi M^h_S}$, alors comme il commute à l'action de

Γ_f, f induit bien un morphisme de (φ, Γ_0)-modules entre $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ et $\mathcal{N}^{\Gamma_f}$ (qui redonne f en étendant les scalaires de S_0 à S). Le reste est immédiat à partir des résultats précédents. $\square$

3.3 Modules de Wach

L. Berger a défini dans [Ber04] le module de Wach $\mathbf{N}(T)$ d'un réseau T d'une $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate négatifs comme l'unique S-sous-module de $\mathbf{D}^+(T) := (A_S^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_\mathcal{K}}$ (avec $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$) vérifiant :
– $\mathbf{N}(T)$ est un S-module libre de rang la dimension de V ;
– l'action de Γ préserve $\mathbf{N}(T)$ et est triviale sur $\mathbf{N}(T)/\pi\,\mathbf{N}(T)$;
– il existe un entier $r \geq 0$ tel que $\pi^r\,\mathbf{D}^+(T) \subset \mathbf{N}(T)$.
Il définit de même le module de Wach $\mathbf{N}(V)$ d'une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate négatifs. L'unicité donne en particulier que $\mathbf{N}$ va préserver somme directe et produit tensoriel, ce qui nous intéressera tout particulièrement.
Donnons un résultat plus précis que le Théorème 1' de N. Wach :

Proposition 31. *Si N est un objet de $\mathbf{MF}_\mathbf{W}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N)$ (qui identifie $\mathrm{F}^-(N) = N \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$ à $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))$) envoie $N \otimes_W S$ sur $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N))$ (le module de Wach associé à $\mathbf{V_{cris}}(N)$).*

Démonstration. En passant au dual, cela revient à dire que $\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} S$ est isomorphe à $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N)^*)$ par fonctorialité du module de Wach envers le dual. Appelons $T = \mathbf{V_{cris}}(N)^*$ et $r \leq p-2$ l'entier tel que $\mathrm{Fil}^r(N^*) \neq \{0\}$, $\mathrm{Fil}^{r+1}(N^*) = \{0\}$. Remarquons que la structure de (φ, Γ_0)-module de $\mathrm{F}(N^*)$ induit une structure de (φ, Γ)-module sur $N^* \otimes_W S$, et que $N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S$ est le dual (au sens généralisé des modules de Wach) d'un (φ, Γ)-module de hauteur finie (puisque égale à r) sur S, donc par le résultat de J.-M. Fontaine (cf [Fon90], p.296), les périodes de $N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S$ sont dans A_S^+. Par conséquent, $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\big((N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S) \otimes_S \mathcal{O}_\mathcal{E}\big) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}) = T = ((N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S) \otimes_S A_S^+)^\varphi \subset N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+$.
Puis, l'identification de $\mathcal{N}$ avec $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}))$ pour $\mathcal{N}$ un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est induite par la multiplication dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$. Donc, comme $T \subset N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+$, nous avons $\mathbf{D}^+(T) \subset ((N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+) \otimes A_S^+)^{H_\mathcal{K}}$ qui est identifié à $(N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+)^{H_\mathcal{K}} = N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S$. Donc la dernière condition de la définition d'un module de Wach, $\pi^r\,\mathbf{D}^+(T) \subset N^* \otimes_W S$, est vérifiée.

Lemme 32. *Sous les notations précédentes, nous avons l'inclusion $\mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$.*

Remarque 33. *La démonstration donnée ci-dessous est exactement l'idée principale de la démonstration de l'unicité du module de Wach (cf. proposition II.1.1 de [Ber04])*

Démonstration. Notons $\mathcal{N}_1 = \mathbf{N}(T)$ et $\mathcal{N}_2 = N^* \otimes_W S$. $\mathcal{N}_1 \subset \mathbf{D}^+(T)$ par définition, donc nous avons l'inclusion $\pi^r \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$. Soit $x \in \mathcal{N}_1$ et s l'entier tel que $\pi^s x \in \mathcal{N}_2$, mais $\pi^s x \notin \pi\mathcal{N}_2$. Choisisons $x \notin \pi\mathcal{N}_1$ tel qu'en plus s soit maximal, ce qui fait que $\pi^s\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$. Comme $\pi^s x \in \mathcal{N}_2$ et que Γ agit trivialement sur $\mathcal{N}_2/\pi\mathcal{N}_2$, nous avons pour tout $g \in \Gamma$ que $(g-1)(\pi^s x) \in \pi\mathcal{N}_2$, et nous pouvons écrire $(g-1)(\pi^s x) = g(\pi^s)(g(x)-x) + (g(\pi^s)-\pi^s)x$. Comme Γ agit trivialement sur $\mathcal{N}_1/\pi\mathcal{N}_1$, et que $\pi^s\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$, nous avons que $g(\pi^s)(g(x)-x) \in \pi\mathcal{N}_2$, et donc que $(g(\pi^s)-\pi^s)x \in \pi\mathcal{N}_2$, ce qui est une contradiction si $s \geq 1$, parce qu'alors $g(\pi^s) - \pi^s = (\mathcal{X}(g)^s - 1)\pi^s + \cdots$. Donc nous avons bien $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$, autrement dit $\mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$. □

L'étude du paragraphe précédent nous donne que le S_0-module $\mathcal{N} = \mathbf{N}(T)^{\Gamma_f}$ est libre et $\mathbf{N}(T) = \mathbf{N}(T)^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$. Utilisons alors le fait que le foncteur F est essentiellement surjectif (à cause de l'hypothèse sur h) pour dire que $\mathcal{N}$ est isomorphe en tant que (φ, Γ_0)-module à $\mathrm{F}(N^*)$, donc $\mathbf{N}(T)$ est isomorphe au (φ,Γ)-module $N^* \otimes_W S$. Notons i cet isomorphisme.
Remarquons que $\mathbf{N}(T) \otimes_S \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(T) = N^* \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, car une représentation cristalline est de hauteur finie. Par conséquent, i induit un isomorphisme de $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(T)$ qui envoye $\mathbf{N}(T)$ sur $N^* \otimes_W S$, et comme il préserve $D^+(T)$, nous obtenons bien $N^* \otimes_W S \subset D^+(T)$, donc $N^* \otimes_W S = \mathbf{N}(T)$ car il vérifie toutes les conditions de la définition du module de Wach. □

Nous pouvons alors en déduire la proposition qui nous intéresse :

Proposition 34. *Soit $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, L un sous-objet (dans $\mathbf{MF}^{+}_{\mathbf{W}}$) de $M = \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$. Alors les isomorphismes de modules de Wach*

$$^t\,\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N^*_{i,j}}) : \mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N^*_{i,j})^*) \to N_{i,j} \otimes_W S$$

identifient $L \otimes_W S$ à un module de Wach.

Démonstration. Les isomorphismes $^t\,\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N^*_{i,j}})$ induisent un isomorphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} {}^t\,\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N^*_{i,j}}) : \mathbf{N}(\bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{V_{cris}}(N^*_{i,j})^*) \to M \otimes_W S$$

(puisque le module de Wach préserve le produit tensoriel). Nous utiliserons cet isomorphisme pour identifier ces deux espaces.
Notons (e_i) une base de M telle que $(p^{\alpha_i} e_i)$ soit une base de L, avec $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Notons aussi $n = \mathrm{rg}_W(M)$.
La proposition 17 affirme que $L \otimes_W S$ est stable par l'action de Γ. Considérons alors la sous-représentation galoisienne T de $U_M := \bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{V_{cris}}(N^*_{i,j})^*$ définie par $T = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(L \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Montrons que $\mathbf{N}(T) = L \otimes_W S$, c'est-à-dire vérifions les conditions qui caractérisent un module de Wach :

– $L \otimes_W S \subset T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (U_M \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+)^{H_K} = \mathbf{D}^+(T)$: l'inclusion provient de ce que $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et $\mathbf{N}(U_M) = M \otimes_W S$ via l'isomorphisme (et donc $M \otimes_W S \subset D^+(U_M) = (U_M \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+)^{H_K}$) ; l'égalité se montre en considérant les coordonnées suivant la base (e_i), car si $x \in T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (U_M \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+)^{H_\mathcal{K}}$, alors il existe $(\beta_i) \in (A_S^+)^n$ et $(\delta_i) \in \mathcal{O}^n_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ avec $x = \sum_i \beta_i e_i = \sum_i p^{\alpha_i}\delta_i e_i$, donc $\beta_i = p^{\alpha_i}\delta_i$ pour tout i, donc $\beta_i \in p^{\alpha_i} A_S^+$ pour tout i, ce qui donne $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (U_M \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+)^{H_\mathcal{K}} \subset \mathbf{D}^+(T)$ (l'inclusion réciproque étant immédiate) ;

- $L \otimes_W S$ est un S-module libre de rang égal à celui de T sur $\mathbb{Z}_p$ (qui est celui de $L \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, donc celui de L sur W) ;
- l'action de Γ laisse stable $L \otimes_W S$ (c'est la proposition 17) et est triviale modulo π : l'action de Γ sur $M \otimes_W S$ étant triviale modulo π par construction, pour $\gamma \in \Gamma$, pour i fixé, il existe $(x_j) \in S^{n-1}$ et $(y_j) \in S^n$ tels que $\gamma(e_i) = e_i + \pi \sum_{j\neq i} x_j e_j$ et $\gamma(p^{\alpha_i} e_i) = \sum_j y_j p^{\alpha_j} e_j$; donc $y_i = 1$ et $p^{\alpha_j} y_j = \pi x_j p^{\alpha_i}$ pour $j \neq i$, donc π divise y_j dans S pour $j \neq i$.
- il existe r un entier positif tel que $\pi^r\,\mathbf{D}^+(U_M) \subset M \otimes_W S$, donc ce r donne $\pi^r\,\mathbf{D}^+(T) \subset M \otimes_W S \cap L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = L \otimes_W S$. En effet, si $x \in M \otimes_W S \cap L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, alors il existe $(\beta_i) \in S^n$ et $(\delta_i) \in \mathcal{O}^n_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ avec $x = \sum_i \beta_i e_i = \sum_i p^{\alpha_i}\delta_i e_i$, donc $\beta_i = p^{\alpha_i}\delta_i$ pour tout i, donc $\beta_i \in p^{\alpha_i} S$ pour tout i, ce qui donne $M \otimes_W S \cap L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \subset L \otimes_W S$ (l'inclusion réciproque étant immédiate).

D'où, nous avons bien $\mathbf{N}(T) = L \otimes_W S$. □

Ce qui nous intéressera tout particulièrement, c'est le corollaire suivant :

PROPOSITION 35. *Soit $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \le h \le p-2$, L un sous-objet (dans $\mathbf{MF_W^-}$) facteur direct (comme W-module) de $M = \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$.*

Alors les isomorphismes de modules de Wach

$$\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_{N_{i,j}}) : N_{i,j} \otimes_W S \to \mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N_{i,j}))$$

induisent un isomorphisme de module de Wach

$$L \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$$

où $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L) := \mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})$.

Démonstration. Les isomorphismes $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_{N_{i,j}})$ induisent un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_M) := \bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_{N_{i,j}}) : M \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M))$$

Par dualité, il suffit de voir que si $L_0 = M/L$, alors $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_M)$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L_0^*)$ sur $L_0^* \otimes_W S$. Posons $T = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(L_0^* \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E})$. La proposition précédente nous donne bien que $\mathbf{N}(T) = L_0^* \otimes_W S$ (via $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_M)$).
Puis, une propriété du module de Wach nous permet de conclure : $\mathbf{N}(T[\frac{1}{p}])/\pi$ s'identifie à $\mathbf{D_{cris,p}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ (par le théorème III.4.4 de [Ber04]), et l'application g_M envoie $\mathbf{N}(T)/\pi$ sur L_0^*, donc nous avons bien que $\mathbf{D_{cris,p}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = L_0^* \otimes_W \mathcal{K}$, donc que $T = \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L_0^*)$. □

Remarque 36. *Si M' est le quotient du L considéré dans la proposition 35 par le sous-objet L' (facteur direct comme W-module), alors $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_M) : L\otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$ (qui induit aussi un isomorphisme $L' \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L'))$) induit par passage au quotient un isomorphisme $M' \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M'))$.*

Corollaire 37. *Soit $0 \leq h \leq p-2$. Soit M et M' deux objets de $\mathbf{MF_W} < \mathbf{h} >$, et $f : M \to M'$ un morphisme de φ-modules filtrés. Alors $\mathbf{V}_\mathcal{E}(\mathrm{F}(f)\otimes \mathrm{Id}_\mathcal{E}) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f)$.*

Démonstration. Soient $N_{i,j}$ et $N'_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF^h_W}$, L un sous-objet de $\oplus\otimes N_{i,j}$ et L_0 un sous-objet facteur direct de L, tel que $M = L/L_0$, L' un sous-objet de $\oplus\otimes N'_{i,j}$ et L'_0 un sous-objet facteur direct de L', tel que $M' = L'/L'_0$. Nous allons montrer que les isomorphismes $\oplus\otimes \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_{N_{i,j}})$ et $\oplus\otimes \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_{N'_{i,j}})$ identifient $f\otimes \mathrm{Id}$ à $\mathbf{D}_\mathcal{E}(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f))$.
Pour cela, il suffit d'utiliser la fidélité et la pleine fidélité de F combiné au théorème 30 (pour pouvoir dire que la réduction modulo π est injective sur les morphismes de (φ,Γ)-module entre $M\otimes_W S$ et $M'\otimes_W S$), plus le fait que $\mathbf{D}_\mathcal{E}(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f))$ modulo π redonne f (d'après les résultats de L. Berger dans [Ber04]). □

Corollaire 38. *Soit M et M' deux objets de $\mathbf{MF_W} < \mathbf{h} >$, et $f : M \to M'$ un morphisme φ-modules filtrés. Alors $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f)$ envoye $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(M\otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E})$ dans $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(M'\otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E})$. En particulier, en passant au dual, $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$ devient un foncteur en posant $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(f) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent, et de ce que si T et T' sont deux $\mathbb{Z}_p$-représentations cristallines, alors un morphisme de (φ,Γ)-modules $g : \mathbf{N}(T) \to \mathbf{N}(T')$ induit $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g) : T = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{N}(T)\otimes_S \mathcal{O}_\mathcal{E}) \to T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{N}(T')\otimes_S \mathcal{O}_\mathcal{E})$. □

Remarque 39. *D'après ce qui précède, le foncteur $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$ et le foncteur $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \circ \mathrm{F}^-$, tous deux définis sur $\mathbf{MF_W} < -\mathbf{h} >$ et à valeurs dans $\mathbf{Rep}^{\mathbf{cris}}_{\mathbb{Z}_\mathbf{p}}(\Gamma_\mathcal{K})$, sont isomorphes (l'isomorphisme est donné par la transformation naturelle g).*

4 Fin de la démonstration du théorème 15

Théorème 40. *Pour $0 \leq h \leq p-2$, le foncteur F de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ vers $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ a pour image essentielle $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$.*

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser le théorème 31 qui nous dit que pour N objet de $\mathbf{MF^h_W}$, $\mathrm{F}(N)\otimes_{S_0} S$ est le module de Wach de $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N^*)^*$. Commençons par montrer :

Proposition 41. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$) de p-torsion, et $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{M}\otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E})$ la $\mathbb{Z}_p$-représentation galoisienne correspondant au (φ,Γ)-module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ obtenu à partir de $\mathcal{M}$. Alors il existe $T'' \subset T$ deux*

$\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes cristallines (c'est à dire que le module sous-jacent est libre sur $\mathbb{Z}_p$, et en rendant p inversible nous avons une représentation cristalline) à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h, 0]\!]$ telles que T' s'identifie au quotient de T par T''.

Démonstration. Le Théorème 1' de [Wac97] (et la proposition 31) donne que $T' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(\mathbf{V_{cris}}\left(\mathrm{Hom}_W(i^*(\mathcal{M}), \varinjlim W/p^n)\right), \varinjlim \mathbb{Z}_p/p^n\right)$. En notant X^* le dual de Pontriaguine d'un module de torsion X, cela s'écrit plus simplement en $T' = \mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)^*$. Puis, puisque $(\mathcal{M}/\pi_0)^*$ est un objet de la catégorie $\mathbf{MF^{-h}_{W,tf}}$, la proposition 1.6.3 de [Win84] nous donne qu'il existe $M_1 \in \mathbf{MF^{-h}_W}$ et un épimorphisme $M_1 \to (\mathcal{M}/\pi_0)^*$. Le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ étant exact, il existe donc une $\mathbb{Z}_p$-repésentation cristalline T_1 ($T_1 = \mathbf{V_{cris}}(M_1)$) dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[\![0, h]\!]$ et un épimorphisme $T_1 \to \mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$.
Comme $\mathcal{M}$ est supposé de p-torsion, $\mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$ est de p-torsion et de type fini, donc il existe un entier n tel que $p^n \mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right) = \{0\}$. Alors T_1/p^n se surjecte toujours sur $\mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$, et en passant au dual de Pontriaguine, T' s'injecte dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1/p^n, \varinjlim \mathbb{Z}_p/p^n\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_1, \mathbb{Z}_p)/p^n$ (car T_1 est un $\mathbb{Z}_p$-module libre). Si f est la projection canonique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1, \mathbb{Z}_p\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1, \mathbb{Z}_p\right)/p^n$, alors $T = f^{-1}(T')$ convient (et il suffit de prendre T'' égal au noyau de la projection $f|_T$). □

PROPOSITION 42. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$) de p-torsion, $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{M} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E})$ et $T'' \subset T$ les représentations données par la proposition ci-dessus. Alors $\mathcal{M} \otimes_{S_0} S$ s'identifie à $\mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(T'')$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \otimes_{S_0} S$ et $\mathcal{M}_2 = \mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(T'')$ (tous les deux vus dans le (φ, Γ)-module $\mathcal{M} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}$, car $\mathbf{N}(T) \cap \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T") = \mathbf{N}(T'')$: en effet, notons $\mathcal{N} = \mathbf{N}(T) \cap \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T") = \mathbf{N}(T) \cap T'' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$ qui est stable par l'action de Γ, nous avons que $\mathcal{N} \cap \pi\, \mathbf{N}(T) = \pi \mathcal{N}$ puisque π est inversible dans $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$, donc $\mathcal{N}/\pi$ s'injecte dans $\mathbf{N}(T)/\pi$, donc Γ agit bien trivialement sur $\mathcal{N}$. Puis, $T'' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^+_S)^{H_\mathcal{K}} = \mathbf{D}^+(T'')$, car si (e_i) est une base de T telle que $(p^{\alpha_i} e_i)$ est une base de T'' (avec $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), alors un élément x de l'intersection s'écrit $x = \sum_i x_i e_i = \sum_i p^{\alpha_i} y_i e_i$ avec $x_i \in A^+_S$ et $y_i \in \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$; donc $y_i \in p^{-a_i} A^+_S \cap \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}} = A^+_S$ si $\alpha_i \neq +\infty$, et $\{0\}$ sinon, donc $x \in T'' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^+_S$ et est fixé par $H_\mathcal{K}$, donc $T'' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^+_S)^{H_\mathcal{K}} \subset \mathbf{D}^+(T'')$ (l'inclusion réciproque étant immédiate). Donc nous avons $\mathcal{N} \subset \mathbf{D}^+(T'')$ puisque $\mathbf{N}(T) \subset (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^+_S)^{H_\mathcal{K}} = \mathbf{D}^+(T)$. Enfin, $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T) \subset \mathbf{N}(T)$, donc $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T'') \subset \mathbf{N}(T)$, et comme $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T'') \subset T'' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$, nous avons bien que $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T'') \subset \mathcal{N}$. Ces conditions caractérisent le module de Wach de T'', donc $\mathbf{N}(T) \cap \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T") = \mathbf{N}(T''))$.
D'après les résultats p.296 de [Fon90] (l'égalité entre $\mathbf{D^*_S}$ et $j_* \circ \mathbf{D}^*_\mathcal{E}$) (ou bien le lemme III.5 de [Col99]), nous avons $\mathcal{M}_1 \subset \mathbf{D}^+(T')$ et $\mathcal{M}_2 \subset \mathbf{D}^+(T')$, puisque tout deux sont des S-modules de type fini stables par φ et p-étales (puisque de q-hauteur finie). Puis, l'action de Γ est triviale modulo π dans les deux cas (puisque c'est le cas par définition sur $\mathbf{N}(T)$, et que l'action de Γ_0 est triviale modulo π_0 sur $\mathcal{M}$).

D'après le Théorème III.3.1 de [Ber04], nous avons l'inclusion $\pi^h T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathbf{N}(T) \otimes_S A_S^+$. Par conséquent, en projetant nous obtenons que $\pi^h T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+$. Par définition, nous avons que $\mathbf{D}^+(T') \subset \mathbf{D}^+(T') \otimes_S A_S^+ \subset T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+$, donc en prenant les points fixes sous l'action de $H_{\mathcal{K}}$, nous avons $\mathbf{D}^+(T') \subset \big(\mathbf{D}^+(T') \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} \subset \big(T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathbf{D}^+(T')$. Donc, en prenant les points fixes sous $H_{\mathcal{K}}$ dans l'inclusion $\pi^h T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+$, nous obtenons que $\pi^h \mathbf{D}^+(T') \subset \big(\mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}}$. Donc nous avons $\pi^h \mathbf{D}^+(T') \subset \mathcal{M}_2$ en vertu du lemme :

Lemme 43. *Soit $\mathcal{N}$ un S-module de type fini sans p'-torsion, alors $\big(\mathcal{N} \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.2.7 de [Fon90], qui nous donne (sous les hypothèses du lemme) une filtration décroissante $\mathcal{N}_i$ de $\mathcal{N}$, telle que $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ est soit S/p-libre, soit S-libre. La propriété cherchée est stable par suite exacte, c'est à dire vérifie que si $0 \to \mathcal{N}'' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}' \to 0$ est une suite exacte de S-modules, et que $\big(\mathcal{N}'' \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}''$, $\big(\mathcal{N}' \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}'$, alors $\big(\mathcal{N} \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}$. Donc il suffit de montrer le lemme pour $\mathcal{N}$ qui est S-libre ou S/p-libre, ce qui provient de ce que $(A_S^+)^{H_{\mathcal{K}}} = S$ et $(A_S^+/p)^{H_{\mathcal{K}}} = S/p$. □

Puis $\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M}_1$ est le dual (de Pontriaguine) d'un (φ, Γ)-module sur S de hauteur inférieure ou égale à h, sans p'-torsion, donc $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E})$ vérifie $T' = (\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} A_S^+)^\varphi$ (cf [Fon90], p.296) puisque $0 \le h$. Donc $T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} A_S^+$, et en prenant les points fixes sous $H_{\mathcal{K}}$ (et par le lemme précédent), nous obtenons $\mathbf{D}^+(T') \subset \frac{1}{\pi^h}\mathcal{M}_1$, donc $\pi^h \mathbf{D}^+(T') \subset \mathcal{M}_1$.
Ces conditions impliquent que la démonstration du lemme 32 s'applique ici (car $h \le p-2$, pour que nous ayons si $0 \le s \le h$, $\mathcal{X}(g)^s - 1$ inversible dans $\mathbb{Z}_p$ (c'est à dire $\mathcal{X}(g)^s - 1 \neq 0$ modulo p) pour un $g \in \Gamma$), et donc $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. □

Remarque 44. *L'unicité d'un tel module n'est plus vrai en général : dans S/pS, S/pS et $\pi^{p-1}S/pS$ sont deux S-modules de type fini, avec action de Γ triviale modulo π, et si $T = \mathbf{V}_{\mathbf{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{O}_\mathcal{E}/p)$ (c'est à dire $\mathbb{F}_p$ avec l'action triviale), alors $\mathbf{D}^+(T) = S/pS$, donc la dernière condition est aussi vérifiée.*

Il ne reste donc plus qu'à passer d'un module sur S à un module sur S_0, ce qui est donné par le lemme suivant (qui est une conséquence immédiate de l'égalité $S = \bigoplus_{0 \le i \le p-2} S_i$) :

Lemme 45. *Soit $\mathcal{M}$ un S_0-module, alors $\big(\mathcal{M} \otimes_{S_0} S\big)^{\Gamma_f} = \mathcal{M}$.*

Ces propositions et ces lemmes mis bout à bout nous donnent le théorème dans le cas d'un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ de p-torsion. C'est à dire que si $\mathcal{M}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ (avec $0 \le h \le p-2$) de p-torsion, alors il existe M un objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ tel que $\mathcal{M} = \mathrm{F}(M)$. Et plus précisément, nous avons

$M = i^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\pi$. Donc, dans le cas où $\mathcal{M}$ n'est pas supposé de p-torsion, nous avons que $\mathcal{M}/p^n = \mathrm{F}(i^*(\mathcal{M}/p^n))$ pour tout n, donc en passant à la limite projective, nous obtenons bien que $\mathcal{M} = \mathrm{F}(i^*(\mathcal{M}))$, ce qui donne bien l'essentielle surjectivité de F, et donc termine la démonstration du théorème 40 (et donc du théorème 15).

5 Le point du torseur

5.1 Conséquence des théorèmes précédents

Pour tout objet N de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \le h \le p-2$, construisons f_N comme la composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{g_N^{-1}} & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{\psi_{\mathrm{F}^-(N)}} & F^-(N) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \\ & & & & \| \\ & & & & N \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \end{array}$$

où ψ est l'isomorphisme de Fontaine (cf. paragaraphe 1.1.2), g_N l'isomorphisme de N. Wach (cf. paragraphe 3.1), et F^- est le foncteur construit à la fin de la partie 2.

De la proposition 35 nous déduisons (toujours à $0 \le h \le p-2$ fixé) :

Proposition 46. *Pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\le j\le n,\, 1\le i\le n_j}$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, pour tout sous-φ-module filtré L facteur direct (comme W-module) de $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, l'application $\bigoplus \otimes \mathsf{f}_{N_{i,j}}$ envoie $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ bijectivement sur $L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.*

Démonstration. Rappelons que $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L) = \mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})$.

Comme corollaire de la proposition 35, l'inverse de la fonction $\psi^{-1}_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbf{V_{cris}}(N))} \circ \big(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_N) \otimes \mathrm{Id}\big)$ vérifie la propriété recherchée, car $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_N)$ envoie $L \otimes_W S$ sur $\mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$, donc $L \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sur $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$. Il suffit alors de remarquer que $\mathsf{f}_N = \psi_{\mathrm{F}^-(N)} \circ \big(g_N^{-1} \otimes \mathrm{Id}\big) = \big(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_N^{-1}) \otimes \mathrm{Id}\big) \circ \psi_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbf{V_{cris}}(N))}$ par commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{g_N^{-1} \otimes \mathrm{Id}} & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbf{V_{cris}}(N))}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathrm{F}^-(N)}} \\ \mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbf{V_{cris}}(N)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow[\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_N^{-1}) \otimes \mathrm{Id}]{} & \mathrm{F}^-(N) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \end{array}$$

car $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ et $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ sont des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre. □

En combinant ce résultat et celui de la remarque 24, nous obtenons

Proposition 47. *Si L est un sous-objet dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ de $\bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$ avec $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, alors $\mathbf{V_{cris}}(L) \subset \bigoplus_i \otimes_j \mathbf{V_{cris}}(N)_{i,j}$.*

Remarque 48. *Cette propriété peut être montré directement, en utilisant les propriétés des périodes des Lubin-Tate (qui donnent par produit les périodes des modules élémentaires) et le fait qu'un φ-module filtré simple est élémentaire, donc que (par Jordan-Hölder) tout φ-module filtré tué par p a une filtration dont le gradué associé est somme directe de modules élémentaires.*

Combiné avec le Théorème 1', et en introduisant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les foncteurs exacts de la catégorie $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$-modules libres de rang fini, définis par : si M objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, $\mathcal{F}_1(M) = \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et $\mathcal{F}_2(M) = M \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, nous obtenons :

Théorème 49. *Pour $0 \leq h \leq p-2$ fixé, il existe f un isomorphisme de foncteur entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. De plus, vis à vis du produit tensoriel, l'isomorphisme peut être choisi de telle sorte que :*

- *pour tous objets M et N de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ tels que $M \otimes N$ est encore un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V_{cris}}(N \otimes M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "\mathsf{f}_{N\otimes M}"] \arrow[d] & (N \otimes M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[d] \\
(\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \otimes (\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \arrow[r, "\mathsf{f}_M \otimes \mathsf{f}_N"'] & (N \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \otimes (M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})
\end{tikzcd}$$

- *pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, pour tout sous-objet L de $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$ dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, l'application $\bigoplus \otimes \mathsf{f}_{N_{i,j}}$ restreinte à $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est égale à f_L ;*
- *pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, pour tout sous-$\varphi$-module filtré L facteur direct (comme W-module) de $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, l'application $\bigoplus \otimes \mathsf{f}_{N_{i,j}}$ envoie $\big(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ bijectivement sur $L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.*

Il faut juste regarder le comportement de f vis à vis du dual pour pouvoir déduire du théorème 49 le théorème 2 de l'introduction.

5.2 f et le dual

Pour la suite, nous aurons besoin de définir f_N pour N ayant des poids à la fois positifs et négatifs (par exemple si $N = \mathrm{End}(M)$ pour M un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$). Rappelons que $W[-h]$ est l'objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ dont le W-module sous-jacent est W, avec $\mathrm{Fil}^i(W[-h]) = \begin{cases} W \text{ si } i \leq -h \\ 0 \text{ si } i > -h \end{cases}$ et $\varphi^{-h}(x) = \sigma(x)$. Rappelons que $\mathbb{Z}_p(h)$ est la représentation galoisienne $\mathbb{Z}_p(1)^{\otimes h}$ pour $h \geq 0$ (et $\mathbb{Z}_p(h) = \mathbb{Z}_p(-h)^*$ si $h \leq 0$), et que $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}(h) = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(h)$. Nous pouvons alors définir :

Définition 50. *Supposons $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$. Posons $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-h)$ pour N objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(f) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f)$ restreinte à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ pour $f : N \to N'$ flèche de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$. Pour tout objet N de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ nous pouvons définir $\overline{\mathsf{f}}_N$ de la façon suivante : remarquons que $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes \mathbb{Z}_p(-h)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}(-h)$, et notons $\mathsf{f}_h = {}^t\mathsf{f}^{-1}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[-h]}$, alors $\overline{\mathsf{f}}_N$ est l'isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{\mathsf{f}_{N\otimes W[-h]}\otimes \mathsf{f}_h} & \big((N \otimes W[-h]) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}\big) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[h] \\ & & \downarrow \\ & & N \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \end{array}$$

Nous avons bien que $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \simeq \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(W[-h]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-h) \simeq \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N)$ de manière naturelle pour N un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, car $N \otimes W[-h]$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-2\mathbf{h}}$, et comme $2h \leq p-2$, nous pouvons appliquer la remarque 23.

Un quasi-inverse de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$ est donné par $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathbf{cris}}(V \otimes \mathbb{Z}_p(h)) \otimes_W W[h]$.
Une façon naturelle de voir $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ dans $N \otimes_W A_{cris}$ est de dire que

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) = \mathrm{Fil}^0(N \otimes_W t^{-h} A_{cris})^{\varphi} t^{-h}$$

Avant de continuer de regarder les propriétés de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$, introduisons $\overline{g}_N$ pour N un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ si $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ de la même façon que précédemment. De la proposition 35 et de la remarque 36, nous déduisons :

Corollaire 51. *Pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\, 1\leq i\leq m}$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, pour tout sous-objet L facteur direct (comme W-module) de $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{m} N_{i,j}$ et pour tout quotient M de L, les applications $\overline{g}_{N_{i,j}}$ induisent un isomorphisme de représentations de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, de $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(M \otimes W[-mh])) \otimes \mathbb{Z}_p(-mh)$ sur un réseau de $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_M)$ (qui est l'image de $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N_{i,j})$ par l'application projection).*

Puis, pour l'étude vis à vis du dual, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 52. *Pour tout objet N de $\mathbf{MF}^{\pm\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, l'application surjective naturelle*

$$N \otimes N^* \xrightarrow{\pi} W$$

induit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \simeq \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)^*$$

dont le crochet de dualité correspond à $\mathbf{V}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(\pi)$.

Démonstration. Soient $l \in \mathbb{N}$ et $l' \in \mathbb{N}$ tels que $N \otimes W[-l]$ et $N^* \otimes W[-l']$ soient des objets de $\mathbf{MF}^{-\mathbf{2h}}_{\mathbf{W}}$. Puis, W désigne l'objet trivial de $\mathbf{MF}^{\pm\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$, et donc π induit une application $\mathrm{F}^-(\pi) : \mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l']) \to \mathcal{O}_\mathcal{E}[-(l+l')]$, dont l'application linéaire sous-jacente est toujours celle obtenue par le crochet de dualité (c'est juste $\pi \otimes \mathrm{Id}$), donc induit un isomorphisme entre le dual de $\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_l$ et $\mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l'])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_{l'}$ (où $\varphi(e_r) = q^r e_r$ et $g(e_r) = \frac{\mathcal{X}(g)^{-r}\pi^{-r}}{g(\pi^{-r})}$ pour $g \in \Gamma$). Cet isomorphisme de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-modules est en fait un isomorphisme de (φ, Γ)-module, car $\mathrm{F}^-(\pi)$ est un morphisme de (φ, Γ)-modules. Comme $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ préserve le dual, en notant $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-l) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\big(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l]) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_l\big)$ et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l'])) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-l') = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\big(\mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l']) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_{l'}\big)$, nous avons que l'application $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(\pi))$ identifie le dual de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)$ (comme représentation de $\Gamma_\mathcal{K}$) à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)^*$.
Or, $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ (via $\overline{g}_N$) et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*)$ (via $\overline{g}_{N^*}$). Pour conclure, il suffit d'invoquer la commutativité du diagramme suivant (d'après le corollaire 37) :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N) \otimes \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*) \arrow[r, "\overline{g}_N \otimes \overline{g}_{N^*}"'] \arrow[d, "\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(\pi))"'] & \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \arrow[d, "\mathbf{V}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(\pi)"'] \\
\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(W)) \arrow[r, "\overline{g}_W"'] & \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(W)
\end{tikzcd}$$

□

Nous en déduisons alors :

Lemme 53. *Sous les conditions du lemme 52, l'application $\bar{\mathsf{f}}_N$ est fonctorielle vis à vis du dual, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "({}^t\bar{\mathsf{f}}_N)^{-1}"] \arrow[d] & N^* \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[d] \\
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "\bar{\mathsf{f}}_{N^*}"] & N^* \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}
\end{tikzcd}$$

D'où, en rassemblant tout ceci, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 54. *Soit* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, *et notons* $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ *le foncteur exact de la catégorie* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ *vers la catégorie des* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$*-modules libres de rang fini, défini par : si* N *objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1(N) = \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$. *Alors il existe* $\bar{\mathsf{f}}$ *un isomorphisme de foncteurs entre* $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$, *préservant le dual. Nous pouvons supposer de plus :*

- *pour tous objet* N *et* N' *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, *tel que* $N \otimes N'$ *soit encore un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, $\bar{\mathsf{f}}_{N\otimes N'} = \bar{\mathsf{f}}_N \otimes \bar{\mathsf{f}}_{N'}$ *;*
- *pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\, 1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, *pour tout sous-*$\varphi$*-module filtré* L *facteur direct (comme* W*-module) de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, *l'application* $\bigoplus \otimes \bar{\mathsf{f}}_{N_{i,j}}$ *envoie* $(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N_{i,j})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ *bijectivement sur* $L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.

6 POSITION DES RÉSEAUX

Pour tout ce paragraphe, nous supposerons donnés $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$ une représentation cristalline à valeurs dans les point sur $\mathbb{Z}_p$ d'un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$, G, et U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n, avec $\alpha : G \to GL_U$ une immersion fermée.

6.1 DESCRIPTION DES GROUPES PLATS SUR $\mathbb{Z}_p$

Notons $U_W = U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$. Identifions G avec son image dans GL_U. Nous allons donner une définition plus exploitable de $G_W = G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ dans un cas particulier :
Prenons une base de U et supposons que l'immersion de G dans GL_U induise une immersion dans End_U (c'est-à-dire $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}/I)$).
Notons $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$ les polynômes de degré total inférieur ou égal à d. Le groupe GL_U agit sur $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]$ par : pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R, si $f \in R[X_{i,j}]$, et $s \in GL_U(R)$, alors $\eta_s(f)$ est le polynôme défini par $\eta_s(f)(y) = f(s^{-1}y)$. Cette action est linéaire et laisse stable $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$.

PROPOSITION 55. *Soit* $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}/I)$ *un groupe algébrique plat sur* $\mathbb{Z}_p$, *soient* $(f_1, \cdots, f_r)$ *des générateurs de l'idéal* I, *et si* d *est le maximum des degrés totaux des* f_i, *posons* $E = I \cap \mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$. *Alors* E *est facteur direct, et pour toute* $\mathbb{Z}_p$*-algèbre* R, *si* $E_R = E \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, $G(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) = E_R\}$.

REMARQUE 56. *Si* $\alpha : G \to GL_U$ *n'induit pas une immersion fermée de* G *dans* End_U, *il suffit de composer* α *avec une immersion fermée* $\beta : GL_U \to GL_{U'}$ *tel que* β *induise une immersion fermée de* GL_U *dans* $\mathrm{End}_{U'}$. *Par exemple,* $U' = U \oplus \mathbb{Z}_p$ *avec* $\beta = \mathrm{Id} \oplus \frac{1}{\det}$, *ou bien* $U' = U \oplus U^*$ *(où* U^* *est le dual de* U*)*

avec $\beta(g) = (g, {}^t g^{-1})$. Par contre, le E donné par la proposition 55 dépendra du morphisme β considéré.

Démonstration. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 57. *Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R, le module $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$.*

Démonstration. Pour tout k, notons $E_k = I \cap \mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$. Le module $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini, et $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}/E_k$ est sans p-torsion car il s'injecte dans $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}/I$ qui est plat sur $\mathbb{Z}_p$ (par hypothèse). Donc le module E_k est un $\mathbb{Z}_p$-module libre facteur direct dans $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$. Donc E_k est un facteur direct de $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]$, par conséquent $E_k \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$. Or, I est la réunion des E_k, donc $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$. □

Au passage, nous avons démontré une assertion de la proposition, à savoir que $E := E_d$ est facteur direct.

Notons H le groupe algébrique défini par $H(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) = E_R\}$. L'application naturelle $H \to GL_U$ est une immersion fermée et $H(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) \subset E_R\}$ car E est facteur direct. Nous voulons montrer que $H = G$. Si $s \in GL_U(R)$ vérifie $\eta_g(E_R) = E_R$, alors pour tout i, $\eta(s)(f_i) \in E_R \subset I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc $\eta(s)(f_i)(Id) = 0$ car $Id \in G(R)$. Donc, par définition de l'action, $f_i(s^{-1}) = 0$ pour tout i, donc la famille (f_i) étant une famille de générateurs de l'idéal I sur $\mathbb{Z}_p$, nous obtenons $s^{-1} \in G(R)$, or G est un groupe, donc $s \in G(R)$, ce qui montre l'inclusion $H(R) \subset G(R)$. Donc il existe un monomorphisme $H \to G$.

Montrons que c'est une immersion fermée : le morphisme $H \to GL_U$ est une immersion fermée, et α est par hypothèse une immersion fermée de G dans GL_U. Donc, en notant $A[K]$ l'algèbre affine d'un groupe K, les flèches $A[GL_U] \to A[G]$ et $A[GL_U] \to A[H]$ sont surjectives, et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A[G] \arrow[d] & A[GL_U] \arrow[l, two heads] \arrow[dl, two heads] \\ A[H] & \end{tikzcd}$$

par conséquent, la flèche $A[G] \to A[H]$ est surjective, donc $H \to G$ est bien une immersion fermée.

Nous allons maintenant montrer que G et H ont même fibre générique. Pour cela, donnons une description de G semblable à celle de H :

Lemme 58. *Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R, nous avons*

$$G(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g\big((I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}\big) = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}\}$$

Démonstration. Fixons R, et posons $M = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}$. Si $s \in GL_U(R)$ vérifie $\eta_g(M) = M$, alors pour tout i, $\eta(s)(f_i) \in M \subset I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc

$\eta(s)(f_i)(Id) = 0$ car $Id \in G(R)$. Donc, par définition de l'action, $f_i(s^{-1}) = 0$ pour tout i, donc la famille (f_i) étant une famille de générateurs de l'idéal I sur $\mathbb{Z}_p$, nous obtenons $s^{-1} \in G(R)$, or G est un groupe, donc $s \in G(R)$, ce qui montre une inclusion.
L'inclusion réciproque sera un corollaire du lemme de Yoneda : d'abord, il suffit de montrer que $\eta_s(M) \subset M$, car η est une action de groupe. Puis, si $s \in G(R)$ et $f \in M$, notons $P = \eta(s)(f)$. Pour toute R-algèbre B, pour tout $g \in G(B)$, nous avons $P(g) = f(s^{-1}g) = 0$ car $s^{-1}g \in G(B)$ et $f \in I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc P est dans $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ (et de bon degré, donc $P \in M$) par la remarque suivante :
Soit $G = \operatorname{Spec}(A/I)$ un groupe algébrique au dessus d'un anneau R, alors si $J = \{f \in A|$ pour toute R-algebre B, $\forall g \in G(B)$, $f(g) = 0\}$, nous avons $I = J$. En effet, si $K = \operatorname{Spec}(A/J)$, alors $K(B) \subset G(B)$ car $I \subset J$, puis la définition de J nous dit que pour tout $\varphi : A/I \to B$, J est inclus dans $\operatorname{Ker}(\varphi)$, d'où se factorise en $\varphi : A/J \to B$, J, donc $G(B) \subset K(B)$. Le lemme de Yoneda donne alors $G = K$, donc $I = J$. □

LEMME 59. *Soit S/R une extension d'anneau, supposons que S est plat sur R. Alors,* $((I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}) \otimes_R S = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} S) \cap S[X_{i,j}]_{\leq d}$.

Démonstration. En effet, notons $M_1 = I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, $M_2 = R[X_{i,j}]_{\leq d}$ et $M_3 = R[X_{i,j}]$, alors nous voulons voir que $(M_1 \cap M_2) \otimes_R S = (M_1 \otimes_R S) \cap (M_2 \otimes_R S)$. Or, nous avons la suite exacte courte de R-modules

$$0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_3/M_1 \oplus M_3/M_2$$

et nous avons supposé que S est plat sur R, donc en tensorisant par S au dessus de R, nous obtenons que

$$0 \longrightarrow (M_1 \cap M_2) \otimes S \longrightarrow M_3 \otimes S \longrightarrow (M_3/M_1) \otimes S \oplus (M_3/M_2) \otimes S$$

est une suite exacte, ce qui conclut car $(M_3/M_i) \otimes_R S = M_3 \otimes_R S / M_i \otimes_R S$. □

Puis, G et H ont même fibre générique, par application directe des deux lemmes précédents.
Il ne reste plus qu'à voir que si $H \to G$ est une immersion fermée telle que G et H ont même fibre générique, et G plat, alors $H = G$. Nous voulons montrer que la flèche surjective $A[G] \to A[H]$ est aussi injective. G étant plat, l'application naturelle $i_G : A[G] \to A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est injective. H et G ayant même fibre générique, la flèche $f : A[G] \to A[H]$ donnée par l'immersion fermée induit une bijection $f_p : A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to A[H] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. De plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A[G] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_G"] & A[H] \arrow[d, "i_H"] \\ A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[r, hook, two heads, "f_p"] & A[H] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

donc f est bien injective, donc $H = G$. □

En fait, lors de l'identification de GL_U avec $GL_{n,\mathbb{Z}_p}$, nous avons identifié la représentation de GL_U que sont les polynômes homogènes de degré i (noté $\mathbb{Z}_p^i[X_{i,j}]$) avec $\mathrm{Sym}^i(\mathrm{End}_U)$ qui est un sous-objet de $\mathrm{End}_U^{\otimes i}$, ou bien, dit autrement, $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$ a été identifié à un sous-objet de $\oplus_{0\leq i\leq d}\mathrm{End}_U^{\otimes i}$. L'action de GL_U sur $\mathbb{Z}_p^i[X_{i,j}]$ est le produit tensoriel de l'action naturelle de GL_U sur U^* par l'action triviale de GL_U sur U dans $\mathrm{End}_U^{\otimes i} = (U \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^*)^{\otimes i}$; par conséquent E est un sous-module de $\bigoplus_{0\leq i\leq d}(\underbrace{U^*\oplus\cdots\oplus U^*}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ (où $n = \mathrm{rg}(U)$).

Appliquons ceci non pas au plongement α, mais à $\alpha^* : G \to GL_{U^*}$, défini par $\alpha^*(g) = {}^t\alpha(g)^{-1}$. Il existe alors $E^* = \bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{U\oplus\cdots\oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\cap I^*$ un sous $\mathbb{Z}_p$-module (libre facteur direct) tel que $s\in\alpha(G)(R) \Leftrightarrow s(E^*_R) = E^*_R$ (où I^* est l'idéal définissant $\alpha^*(G)$).

Rassemblons tout ceci dans le lemme suivant :

Proposition 60. *Soit G un groupe plat sur $\mathbb{Z}_p$, U un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang n et $\alpha : G \to GL_U$ une représentation qui induit une immersion fermée dans* End_U. *Identifions G avec son image. Alors, il existe un entier k et un sous $\mathbb{Z}_p$-module E (facteur direct) de $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{U\oplus\cdots\oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ laissé stable par l'action naturelle de $G(\mathbb{Z}_p)$ (provenant de celle de GL_U, notée η) tels que $G(R) = \{g\in GL(R)|\eta_g(E_R) = E_R\}$ pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R.*

Nous pouvons alors définir sur $M = \mathbf{D_{cris}}(U)$ (ou sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ suivant les cas) un groupe algébrique sur W, G_M, par : si η est l'action naturelle de GL_M sur $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{M\oplus\cdots\oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, alors $G_M(R) = \{g\in GL_M(R)|\eta_g(\overline{E}_R) = \overline{E}_R\}$ pour toute W-algèbre R. Il ne reste qu'à bien choisir $\overline{E}$ en liaison avec E, ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème 61. *Supposons G lisse sur $\mathbb{Z}_p$. Si $\alpha : G \to GL_U$ induit une immersion fermée dans* End_U *et si la représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ induite sur U par α (et par $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$) vérifie*

– soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $0\leq h\leq p-2$

– soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0\leq h\leq \frac{p-2}{2}$

alors, en prenant

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)\cap\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\mathbf{D_{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus\mathbf{D_{cris}}(U)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$$

dans le premier cas, ou

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)\cap\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$$

dans le deuxième cas, il existe une bijection $\Psi : U\otimes_{\mathbb{Z}_p}W \to M$ qui identifie $G\times_{\mathbb{Z}_p}W$ et G_M.

Remarque 62. *Pour qu'une application Ψ bijective identifie $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ et G_M, il suffit de montrer que l'application naturelle induite par Ψ envoie $E \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ bijectivement sur $\overline{E}$.*

6.2 Demonstration du théorème 61

Soit $h : U_R = U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq M_R = M \otimes_W R$ un isomorphisme de R-modules, alors h induit $s(h)$ de $\bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{U_R \oplus \cdots \oplus U_R}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ sur $\bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{M_R \oplus \cdots \oplus M_R}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, qui est aussi un isomorphisme.
Considérons alors

$$\mathbf{Isom}(R) = \{h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq M \otimes_W R | s(h)(E_R) = \overline{E}_R\}$$

pour R une W-algèbre. C'est un sous-W-schéma de $\mathbf{Isom_W}(U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W, M)$ (les W-isomorphismes de $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sur M).
Il est non vide, car $\mathsf{f}_{\mathbf{D_{cris}}(U)}$ (ou $\overline{\mathsf{f}}_{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}$ suivant les conditions sur les poids de Hodge-Tate) induit un élément de $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$. C'est une retraduction du théorème 49 (ou du théorème 54)

Lemme 63. *Le schéma $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est un torseur trivial sous $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.*

Démonstration. G agit naturellement et fidèlement à gauche sur $\mathbf{Isom}$: si $f \in \mathbf{Isom}(R)$ et $g \in G(R)$,

$$U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{g} U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{f} M \otimes_W R$$

est bien un isomorphisme.
Puis, l'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} R & \xrightarrow{\eta_g} & \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \\ & & \Big\downarrow s(f) \\ & & \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_W R \end{array}$$

s'identifie naturellement à $s(f \circ g)$.
Enfin, la définition de $\mathbf{Isom}$, la proposition 60 et le fait que $s(f \circ g) = s(f) \circ \eta_g$ donnent bien $s(f \circ g)(E_R) = E_R$, donc que $f \circ g \in \mathbf{Isom}(R)$. Le groupe G agit donc sur $\mathbf{Isom}$ par $(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$.
La fidélité provient de ce qu'un élément de $\mathbf{Isom}$ est un isomorphisme de modules.
Pour finir, il reste à montrer que pour $f, f' \in \mathbf{Isom}(R)$, il existe $g \in G(R)$ avec $f' = f \circ g^{-1}$. Autrement dit, il faut voir que $g = f'^{-1} \circ f$ est bien un élément de $G(R)$. Cela se montre de la même façon que précédement. C'est la propriété 60 qui est le point essentiel. $\square$

Nous venons donc de montrer que $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ est un $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$-espace homogène ayant un point sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$, or $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ est un groupe lisse, donc $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ est lisse, donc $\mathbf{Isom}$ aussi (car la flèche $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}) \to \mathrm{Spec}(W)$ est fidèlement plate et quasi-compact, donc c'est une application directe du corollaire 17.7.3 de EGA IV).

$\mathbf{Isom}$ est lisse, donc par le lemme de Hensel (cf. théorème 18.5.11 b de EGA IV), $\mathbf{Isom}(W)$ se surjecte (par la réduction modulo p) sur $\mathbf{Isom}(k)$. Si ce dernier est non vide, nous aurons bien montré que $\mathbf{Isom}(W)$ est non vide, ce qui prouvera le théorème.

$\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$ est lisse, donc, toujours par le lemme de Hensel, $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$ se surjecte sur $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}/p)$, donc le k-schéma $\mathbf{Isom} \times \mathrm{Spec}(k)$ est non vide (car $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}/p$ est une k-algèbre), donc par le théorème des zéros de Hilbert, $\mathbf{Isom} \times \mathrm{Spec}(k)(k)$ est non vide (car k est algébriquement clos). $\square$

Remarquons qu'en nous donnant un $\mathbb{Z}_p$-module $N \subset M$ qui engendre M comme W-module (c'est à dire $N \otimes_{\mathbb{Z}_p} W = M$), et tel que le $\mathbb{Z}_p$-module $N' = \overline{E} \cap \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{N \oplus \cdots \oplus N}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ engendre $\overline{E}$ comme W-module (par exemple, avec les notations du paragraphe 1.3, $N = M^{f_M}$ (et alors $N' = \overline{E}^{f_{\overline{E}}}$) ou $N = M_{\mathbb{Z}_p}^{u_N^{-1} f_M}$ (et alors $N' = \overline{E}_{\mathbb{Z}_p}^{u_{\overline{E}}^{-1} f_{\overline{E}}}$)), nous pouvons définir $\mathbf{Isom}$ sur $\mathbb{Z}_p$ par

$$\mathbf{Isom}(R) = \{h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}_p} R | s(h)(E_R) = N'_R\}$$

pour R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre. Alors, par un théorème de Lang (tout H-torseur défini sur $\mathbb{F}_p$ est trivial si H est un groupe algébrique sur $\mathbb{F}_p$ connexe) , en supposant que G est à fibre spéciale connexe, nous avons $\mathbf{Isom}(\mathbb{F}_p)$ non vide, donc par lissité, $\mathbf{Isom}(\mathbb{Z}_p)$ est non vide, et donc sous cette hypothèse, nous pouvons supposer que $\Psi(U) = N$. De plus, Ψ identifie G à une forme sur $\mathbb{Z}_p$ de G_M (celle qui est définie à l'aide de N').

Corollaire 64. *Sous les hypothèses et notations précédentes, si U' est un réseau de $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ laissé stable par l'action de G, alors $\Psi[\frac{1}{p}] = \Psi \otimes_W \mathcal{K}$ envoie $U' \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sur $\mathbf{D_{cris}}(U')$ si les poids de Hodge-Tate sont positifs, ou sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U')$ sinon.*

Démonstration. Notons $M = \mathbf{D_{cris}}(U)$ (ou $M = \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ si les poids de Hodge-Tate ne sont pas tous positifs). Tout d'abord, quitte à multiplier par une certaine puissance de p, nous pouvons supposer $U' \subset U$. Puis, $\Psi \in \mathbf{Isom}(W) \subset \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$ et $\mathsf{f}_M \in \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$ (respectivement, $\bar{\mathsf{f}}_M \in \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$), donc, comme $\mathbf{Isom}$ est un $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$-espace homogène, il existe $g \in G(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}})$ tel que $\Psi = \mathsf{f}_M \circ g$ (respectivement $\Psi = \bar{\mathsf{f}}_M \circ g$). Il suffit donc (puisque U' est stable par G) de vérifier la propriété pour f_M (ou $\bar{\mathsf{f}}_M$), or ceci provient juste de la fonctorialité de f_M (et de $\bar{\mathsf{f}}_M$) pour les sous-objets. $\square$

6.3 Exemples

Remarquons que GL_U se plonge naturellement par une immersion fermée β dans $GL_{U\oplus U^*}$ où l'action sur U est l'action naturelle, et l'action sur le dual U^* est donnée par la transposée de l'inverse. De plus, β provient d'une immersion fermée de GL_U dans $\mathrm{End}_{U\oplus U^*}$, car l'image de β est un sous-groupe fermé de $SL_{U\oplus U^*}$. Donc, si la représentation galoisienne U est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $h \leq \frac{p-2}{2}$, ou dans $[\![-h,h]\!]$ avec $h \leq \frac{p-2}{4}$, alors l'immersion $\alpha' = \beta\circ\alpha$ vérifie en partie les hypothèses du théorème 61. Soit alors E le sous-module définissant G dans $U \oplus U^*$ (de la manière décrite dans le paragraphe 6.1). Nous définissons de même sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)\oplus\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)^*$ un groupe G_M à l'aide de

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)\cap\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}_{n\text{ fois}})^{\otimes i}$$

Théorème 65. *Si la représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ induite sur U par α (et par ρ) vérifie*
– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $0\leq h\leq\frac{p-2}{2}$*
– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0\leq h\leq\frac{p-2}{4}$*
alors, avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme de W-module $\Psi : U\otimes_{\mathbb{Z}_p} W\to M$ qui induit une bijection $\Psi\oplus{}^t\Psi^{-1} : (U\oplus U^*)\otimes_{\mathbb{Z}_p} W\to M\oplus M^*$ identifiant $G\times_{\mathbb{Z}_p} W$ et G_M. En particulier, le groupe G_M (plongé dans $GL_{M\oplus M^*}$) laisse stable M et M^*.

Démonstration. Considérons le schéma $\mathbf{Isom}(R) = \{h : U\otimes_{\mathbb{Z}_p} R\simeq M\otimes_W R | s(h)(E_R) = \overline{E}_R\}$ (ce n'est à priori pas le même que celui considéré dans la démonstration du théorème 61, qui considère des morphismes définis sur $U\otimes U^*$). C'est un $G\times_{\mathbb{Z}_p} W$ espace homogène, qui a un point sur W (cela se montre de la même façon que lors de la démonstration du théorème 61). $\square$

6.4 Données initiales pour un φ-module filtré

Formulons ici comment les idées introduites précédemment se traduisent dans le formalisme introduit par Rapoport et Zink (cf. [RZ96]). Soit G un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$ et ρ un morphisme de groupe de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans $G(\mathbb{Z}_p)$, $\mu : \mathbb{G}_m\to G$ un cocaractère défini sur W, et $b\in G(W)$. Alors, à toute représentation $\beta : G\to GL_U$ où U est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, nous pouvons associer un objet $\mathcal{I}(U)$ (qui aura vocation à être un φ-module filtré) :
– le W-module sous-jacent est $U\otimes_{\mathbb{Z}_p} W = M$;
– une filtration $\mathrm{Fil}^i(M) = \bigoplus_{j\geq i} M_j$ où M_j est l'espace propre de poids j correspondant à μ ;
– des applications $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i(M)\to M[\frac{1}{p}]$ définies par $\varphi^i = p^{-i}b\circ(Id\otimes\sigma)$ sur $\mathrm{Fil}^i(M)$, c'est-à-dire si $v = \sum_k v_k\otimes x_k\in\mathrm{Fil}^i(M)$ avec $v_k\in U$ et $x_k\in W$, $\varphi^i(v) = p^{-i}\sum_k\sigma(x_k)\beta(b)(v_k)$.

Définition 66. *Le triplet (μ, b, β) est dit admissible si $\mathcal{I}(U)$ est un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$.*

Si G est supposé lisse, si β induit une immersion fermée de G dans End_U, et $\mathcal{I}(U)$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, nous pouvons faire de même qu'au paragraphe 6.1 : G est défini par E un $\mathbb{Z}_p$-module bien choisi de $\bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ (alors $E \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sera un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$), et sur $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ nous construisons $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}$ sur $\mathbb{Z}_p$ par son foncteur des points (si R est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre, $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(R)$ est le sous-groupe de $GL_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(R)$ formée des éléments qui laissent stable

$$\big(\mathbf{V_{cris,p}}(E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}) \cap \bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{\mathbf{V_{cris}}(M) \oplus \cdots \oplus \mathbf{V_{cris}}(M)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$$

Théorème 67. *Sous les conditions précédentes, avec*
- *soit M est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$ et β induit une immersion fermée de G dans End_U,*
- *soit M est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$,*
- *soit M est un objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ et β induit une immersion fermée de G dans End_U,*
- *soit M est un objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$,*

alors il existe une bijection $\Psi : M \to \mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ qui identifie $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ et $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))} \times_{\mathbb{Z}_p} W$. De plus, la représentation galoisienne associée à $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ est à valeurs dans $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(\mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. L'existence de la bijection se montre de la même façon que pour le théorème 61 : nous introduisons un G-espace homogène **Isom** défini sur $\mathbb{Z}_p$, nous montrons qu'il est lisse sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathbf{Isom}(k)$ est non vide par le théorème des zéros de Hilbert, et le lemme de Hensel conclut. La définition même de $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}$ implique que la représentation galoisienne associée à $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ est à valeurs dans $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(\mathbb{Z}_p)$. □

Remarque 68. *Le théorème de Lang à propos des torseurs définis sur les corps finis implique que si la fibre spéciale de G est connexe, alors le torseur* **Isom** *est trivial sur $\mathbb{F}_p$. Autrement dit, il a un point sur $\mathbb{F}_p$, que nous pouvons relever à $\mathbb{Z}_p$ par le lemme de Hensel. Par conséquent, si la fibre spéciale de G est connexe, l'isomorphisme Ψ est défini sur $\mathbb{Z}_p$, c'est à dire qu'il induit une bijection $\Psi : U \to \mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$.*

Bibliographie

[Ber04] Laurent Berger. Limites de représentations cristallines. *Compos. Math.*, 140(6) :1473–1498, 2004.

[CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine. Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.

[Col99] Pierre Colmez. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie. *J. Reine Angew. Math.*, 514 :119–143, 1999.

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations p-adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.

[Fon79] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Fon82] Jean-Marc Fontaine. Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :529–577, 1982.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon94b] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques semi-stables. *Astérisque*, (223) :113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wac97] Nathalie Wach. Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2) :185–240, 1997.

[Win84] Jean-Pierre Wintenberger. Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux. *Ann. of Math. (2)*, 119(3) :511–548, 1984.

Lionel Dorat
IRMA
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
lionel.dorat@ens-lyon.org