Compactification de Schémas Abéliens Dégénérant au-dessus d'un Diviseur Régulier

Sandra Rozensztajn

Received: September 9, 2005
Revised: Novmber 16, 2005

Communicated by Peter Schneider

Abstract. We consider a semiabelian scheme G over a regular base scheme S, which is generically abelian, such that the points of the base where the scheme is not abelian form a regular divisor S_0. We construct a compactification of G, that is a proper flat scheme P over the base scheme, containing G as a dense open set, such that P_{S_0} is a divisor with normal crossings in P. We also show that given an isogeny between two such semiabelian schemes, we can construct the compactifications so that the isogeny extends to a morphism between the compactifications.

2000 Mathematics Subject Classification: 11G10, 11G18, 14G35, 14K05

Introduction

Dans l'article [Mum72], Mumford construit une variété abélienne dégénérante, c'est-à-dire un schéma semi-abélien qui est génériquement abélien à partir d'un ensemble de données, dites données de dégénérescences, qui consistent en un tore déployé de rang constant sur une base complète, et en un groupe de périodes. Il obtient au cours de sa construction une compactification du schéma semi-abélien, c'est-à-dire un schéma propre contenant le schéma semi-abélien comme ouvert dense, et muni d'une action de celui-ci prolongeant son action sur lui-même par translation.
Faltings et Chai dans [CF90] utilisent cette construction pour obtenir des compactifications des variétés de Siegel et de leur schéma abélien universel. Ils exposent ce faisant comment associer à un schéma abélien dégénérant l'ensemble des données de dégénérescence qui permettent de le retrouver en utilisant la technique de Mumford.

Grâce à ces méthodes, Künnemann, dans [Kün98], construit des compactifications régulières de schémas semi-abéliens sur un anneau de valuation discrète dont la fibre générique est abélienne. Généralisant sa technique, nous construisons des compactifications de schémas abéliens sur une base régulière dégénérant le long d'un diviseur régulier. La méthode requiert l'utilisation d'un faisceau inversible symétrique ample sur le schéma semi-abélien. En vertu du corollaire XI 1.16 de [Ray70], tout schéma semi-abélien de fibre générique abélienne sur une base régulière peut être muni d'un tel faisceau, nous n'introduisons donc pas de restriction en imposant son existence.
Notre construction a pour application de permettre une compactification des variétés de Shimura associées à certains groupes unitaires et de leur schéma abélien universel, donnant ainsi des résultats similaires à ceux de Chai et Faltings pour les variétés de Shimura associées aux groupes symplectiques exposés dans [CF90].
Avant d'énoncer le théorème, introduisons les définitions suivantes.

DÉFINITION 1. *S est un schéma régulier noethérien, et S_0 un diviseur régulier de S, W l'ouvert complémentaire de S_0. G est un schéma semi-abélien sur S, qui est de rang constant sur S_0, et tel que G_W est un schéma abélien, et $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible symétrique ample sur G.*

REMARQUE 1. Comme G est de rang constant sur S_0, il y est globalement extension d'un schéma abélien par un tore, d'après le corollaire 2.11 de [CF90].

DÉFINITION 2. *On appelle compactification de G la donnée d'un schéma P propre, plat et régulier sur S tel que $G \subset P$, possédant les propriétés suivantes :*

1. *G est dense dans P, et agit sur P par prolongement de son action par translation sur lui-même.*
2. *G et P coïncident sur W*
3. *il existe un entier k positif tel que $\mathcal{L}^{\otimes k}$ se prolonge en un faisceau $\mathcal{L}_P$ ample sur P*
4. *P_0 est un diviseur à croisements normaux dans P*

Le théorème s'énonce alors :

THÉORÈME 1. *Il existe des compactifications de G.*

On a même la propriété suivante de prolongement des morphismes :

THÉORÈME 2. *Soit G_1 et G_2 comme dans la définition 1, et f un morphisme de S-schémas en groupes $G_1 \to G_2$, qui induit une isogénie $f_\eta : G_{1\eta} \to G_{2\eta}$. Alors il existe deux compactifications P_1, P_2 de G_1 et G_2 et un morphisme $\bar{f} : P_1 \to P_2$ prolongeant f.*

L'énoncé ne fait aucune hypothèse d'existence de faisceaux amples sur G_1 et G_2, qui résulte en fait des autres conditions du théorème : d'après la preuve de la proposition XI 1.2 de [Ray70], du fait que f_η est de noyau fini, il existe un faisceau inversible ample symétrique $\mathcal{L}_2$ sur G_2 tel que $\mathcal{L}_1 = f^*\mathcal{L}_2$ soit aussi ample. Nous supposerons dorénavant deux tels faisceaux fixés.

Pour prouver ces théorèmes, nous allons d'abord étudier une situation locale (base affine, complète) dans le paragraphe 2, puis voir comment on peut déduire le résultat global d'un résultat local, dans le paragraphe 3.

1 Découpage du problème

Dans tout ce paragraphe on va se placer dans un cas particulier : le cas où la base S est irréductible et est complète par rapport au sous-schéma S_0.
Le passage du cas complet au cas non complet est expliqué au paragraphe 3.3.
D'autre part, S étant régulier, les composantes irréductibles de S correspondent à ses composantes connexes, on peut donc travailler composante par composante. Observons enfin que S étant complet par rapport à S_0, S est irréductible si et seulement si S_0 l'est.

1.1 Cas d'un seul groupe

S étant complet par rapport à S_0, on a une extension associée à G, appelée extension de Raynaud (pour la construction de cette extension voir [CF90] p. 33, ou [Mor85]) :

$$0 \to T \to \tilde{G} \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

et sur $\tilde{G}$ on a un faisceau inversible ample $\tilde{\mathcal{L}}$ provenant de $\mathcal{L}$. $\tilde{G}$ est caractérisé par le fait que c'est un schéma semi-abélien de rang constant sur S dont le complété formel le long de S_0 est le même que celui de G.

Définition 3. *On dit que l'extension est déployée si le tore T est déployé, de groupe des caractères constant, et si $\tilde{\mathcal{L}}$ se descend en un faisceau inversible ample $\mathcal{M}$ sur A.*

Lemme 3. *Il existe un recouvrement étale fini S' de S tel que l'extension de Raynaud du groupe sur S' obtenu par changement de base soit déployée.*

Démonstration. En effet, d'après [D$^+$70], théorème X 5.16, il existe un tel S' qui permette d'obtenir un tore déployé à groupe de caractères constant, car S est normal et localement noethérien. Pour ce qui est de l'existence de $\mathcal{M}$, on se réfère à [Mor85], I.7.2.3. □

Définition 4. *On appelle dégénérescence déployée la donnée d'un triplet $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ où $(G, \mathcal{L})$ est comme dans les données et a une extension de Raynaud associée déployée, et $\mathcal{M}$ est un faisceau cubique inversible sur A tel que $\tilde{\mathcal{L}} = \pi^*\mathcal{M}$.*

Notons que nous appelons ici dégénéréscence ce qui serait appelé dans [CF90] dégénérescence ample.

Définition 5. *Un morphisme entre dégénérescences déployées* $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ *et* $(G', \mathcal{L}', \mathcal{M}')$ *est la donnée de* $f = (f_G, f_{\mathcal{L}}, f_A, f_{\mathcal{M}})$*, où* f_G *est un morphisme* $G \to G'$*,* $f_{\mathcal{L}}$ *est un isomorphisme* $f_G^*\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$*,* $f_A : A \to A'$ *est déduit de* f_G*,* $f_{\mathcal{M}}$ *est un isomorphisme* $f_A^*\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$*, et enfin* $f_{\mathcal{L}}$ *et* $f_{\mathcal{M}}$ *induisent le même morphisme* $f_{\tilde{G}}^*\tilde{\mathcal{L}}' \to \tilde{\mathcal{L}}$*.*

Pour nos données $(G, \mathcal{L})$ sur le schéma S de départ, il existe donc (d'après le lemme 3) une extension étale finie S' de S telle que les données $(G', \mathcal{L}')$ sur S' obtenues par changement de base forment une dégénérescence déployée (pour un certain faisceau $\mathcal{M}'$). Comme nous le démontrerons dans le paragraphe 3.2, on peut déduire une compactification sur S d'une compactification sur S', ce qui explique que l'on s'intéresse au cas particulier des dégénérescences déployées.

1.2 Cas d'un morphisme

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du théorème 2. La construction de Raynaud étant fonctorielle, f induit f_A, f_T, $f_{\tilde{G}}$ qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & \tilde{G}_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & f_T \downarrow & & f_{\tilde{G}} \downarrow & & f_A \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & \tilde{G}_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Définition 6. *On appelle morphisme d'extensions une telle flèche.*

Lemme 4. *Il existe une extension finie comme dans le lemme 3 qui convienne à la fois à* G_1 *et à* G_2*.*

Démonstration. En effet, si S_1 convient à G_1 et S_2 convient à G_2, $S_1 \times_S S_2$ convient à G_1 et G_2. □

Après une telle extension, on obtient un morphisme de dégénérescences déployées $(G_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \to (G_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$. Remarquons que comme f_η est une isogénie, le noyau de f est quasi-fini, de sorte que f_T et f_A sont aussi des isogénies.

2 Compactifications locales

Introduisons dès à présent des notations. On notera $S = \mathrm{Spec}R$, I l'idéal définissant S_0 et η le point générique de S. On notera $S_n = \mathrm{Spec}R/I^{n+1}$.
On se restreint dans ce paragraphe au cas où S est irréductible, complet par rapport à S_0 et affine. On se donne une dégénérescence déployée $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, et un morphisme de dégénérescences déployées $f : (G_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \to (G_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$.

2.1 Compactifications équivariantes

Dans ce cadre plus restrictif que celui de départ, nous allons démontrer un théorème légèrement plus fort.
Soit H un groupe fini agissant sur S, c'est-à-dire qu'à chaque $h \in H$ est associé un automorphisme $h_S : S \to S$, et ce de manière compatible. On suppose que H laisse S_0 stable.

Définition 7. *On dit que H agit sur la dégénérescence déployée $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, si à chaque $h \in H$ est associé un morphisme de dégénérescences déployées $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \to h_S^*(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, ces morphismes étant compatibles entre eux.*

Définition 8. *L'action de H étant donnée, on dit qu'une compactification est équivariante si on peut définir sur $(P, \mathcal{L}_P)$ une action de H prolongeant celle sur $(G, \mathcal{L})$.*

Théorème 5. *Soit S un schéma irréductible, affine, complet par rapport à S_0, $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ une dégénérescence déployée sur S, et H un groupe fini agissant sur cette dégénérescence. Alors il existe des compactifications équivariantes de $(G, \mathcal{L})$.*

Théorème 6. *Soit S un schéma irréductible, affine, complet par rapport à S_0, $(G_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1)$ et $(G_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$ deux dégénérescences déployées sur S, et f un morphisme de dégénérescences H-équivariant et tel que f induise une isogénie $G_{1\eta} \to G_{2\eta}$. Alors il existe des compactifications équivariantes P_1 et P_2 de G_1 et G_2, et un prolongement H-équivariant de f en un morphisme $P_1 \to P_2$.*

La suite du paragraphe est consacrée à la preuve de ces théorèmes.

2.2 Données de dégénérescence

On peut associer fonctoriellement à une dégénérescence déployée un ensemble de données, appelé données de dégénérescence. Ici aussi nous appelons simplement données de dégénérescence ce qui serait appelé données de dégénérescences amples dans [CF90]. On a en fait une équivalence de catégories entre dégénérescences et données de dégénérescence. L'obtention des données de dégénérescence à partir de la dégénérescence est l'objet du chapitre II de [CF90]. La construction inverse, due à Mumford ([Mum72]), est reprise en partie ici pour obtenir une compactification.

2.2.1 Liste des données

Une donnée de dégénérescence consiste en un ensemble :
$(A, \underline{X}, \underline{Y}, \varphi, c, c^t, \tilde{G}, \iota, \tau, \tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{M}, \lambda_A, \psi)$, tel que :

1. A est une variété abélienne sur S.
2. $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont des faisceaux étales en groupes abéliens libres de même rang fini r, qui sont constants de valeur X et Y.

3. φ est un homomorphisme injectif $Y \to X$ (et donc de conoyau fini).
4. c est un morphisme $X \to A^t$ et c^t un morphisme $Y \to A$.
   Soit T le tore déployé de groupe des caractères X. L'opposé du morphisme c détermine une extension :
   $$0 \to T \to \tilde{G} \xrightarrow{\pi} A \to 0$$
   On fixe un faisceau de Poincaré $\mathcal{P}$ sur $A \times_S A^t$.
5. ι est un morphisme $Y \to \tilde{G}$ au-dessus de c^t. Le morphisme ι correspond à une trivialisation $\tau : \mathbf{1}_{Y\times X} \xrightarrow{\sim} (c \times c^t)^* \mathcal{P}_\eta^{-1}$, qui est donnée par un système compatible de sections $\tau(y,\mu) = \tau(\mathbf{1}_{y,\mu}) \in \Gamma(\eta, (c^t(y), c(\mu))^* \mathcal{P}_\eta^{-1})$ pour $y \in Y$ et $\mu \in X$.
   ι définit une action de $y \in Y$ sur $\tilde{G}_\eta$ par translation, qu'on note S_y.
6. un faisceau cubique inversible $\mathcal{M}$ sur A tel que la polarisation associée $\lambda_A : A \to A^t$ vérifie $\lambda_A \circ c^t = c \circ \varphi$.
7. $\tilde{\mathcal{L}} = \pi^* \mathcal{M}$.
   On a une trivialisation $\tau \circ (\mathrm{id}_Y \times \varphi) : \mathbf{1}_{Y\times X} \xrightarrow{\sim} (c \times (c \circ \varphi))^* \mathcal{P}_\eta^{-1}$.
8. $\psi : \mathbf{1}_{Y_\eta} \xrightarrow{\sim} \iota^* \tilde{\mathcal{L}}_\eta^{-1}$ est une trivialisation compatible avec τ.

On notera pour simplifier $\psi(y)$ pour $\psi(\mathbf{1}_y)$ et $\tau(y,\mu)$ pour $\tau(\mathbf{1}_{(y,\mu)})$.
La trivialisation ψ vérifie la condition suivante : pour presque tout $y \in Y$, $\psi(y)$ s'étend en une section de $\iota^* \tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ congrue à 0 modulo I. De plus, pour tout $y \in Y, y \neq 0$, $\tau(y, \varphi(y))$ s'étend en une section congrue à 0 modulo I.
Les deux trivialisations ψ et τ définissent des idéaux fractionnaires de R : I_y défini par $\psi(y)$, et $I_{y,\mu}$ défini par $\tau(y,\mu)$, avec la relation $I_{y+z} = I_y I_z I_{z,\varphi(y)}$.

Rappelons comment on obtient certaines de ces données. Étant donnée une dégénérescence déployée $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, on forme son extension de Raynaud $0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0$, ce qui fournit $\tilde{G}$, A, et $\underline{X}$ le groupe des caractères de T, qui est constant puisque on a supposé la dégénérescence déployée. D'autre part on a un schéma semi-abélien G^t tel que G^t_W est le schéma abélien dual de G_W, il forme aussi une dégénérescence déployée, d'extension de Raynaud associée $0 \to T^t \to \tilde{G}^t \to A^t \to 0$, où A^t est bien le schéma abélien dual de A. Ceci nous donne $\underline{Y}$ qui est le groupe des caractères de T^t, et est le dual de $\underline{X}$.

2.2.2 Morphismes de données

Un morphisme entre les données de dégénérescences

$$(A, \underline{X}, \underline{Y}, \varphi, c, c^t, \tilde{G}, \iota, \tau, \tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{M}, \lambda_A, \psi)$$

et

$$(A', \underline{X}', \underline{Y}', \varphi', c', c^{t\prime}, \tilde{G}', \iota', \tau', \tilde{\mathcal{L}}', \mathcal{M}', \lambda'_A, \psi')$$

est la donnée d'un ensemble de morphismes $f_A : A \to A'$, $f_X : \underline{X} \to \underline{X}'$, $f_Y : \underline{Y} \to \underline{Y}'$, $f_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to \tilde{G}'$, un isomorphisme $f_{\mathcal{L}} : f_{\tilde{G}}^*\tilde{\mathcal{L}}' \to \tilde{\mathcal{L}}$, et un isomorphisme $f_{\mathcal{M}} : f_A^*\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$, ces morphismes vérifiant toutes les conditions de compatibilité.
Par fonctorialité de la construction de données de dégénérescence, à partir d'un morphisme $f : (G_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \to (G_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2)$, de dégénérescences déployées, on obtient un morphisme entre les données de dégénérescences associées, et en particulier $f_{\tilde{G}} : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ et $f_A : A_1 \to A_2$ (comme dans le paragraphe 1.2), $f_X : X_2 \to X_1$ provenant de $f_T : T_1 \to T_2$, et $f_Y : Y_1 \to Y_2$.

2.2.3 Propriétés particulières au cas étudié

Les idéaux I_y et $I_{y,\mu}$ ont une forme particulière dans notre cas.

Proposition 7. *Il existe une fonction $b : Y \times X \to \mathbb{Z}$ bilinéaire, et $a : Y \to \mathbb{Z}$ telles que $I_y = I^{a(y)}$ et $I_{y,\mu} = I^{b(y,\mu)}$*

Démonstration. Dans notre cas particulier, G ne dégénère que sur S_0 : sur W, c'est un schéma abélien. Rappelons le résultat de [CF90], corollaire 7.5 p. 77. Soit s un point de S, correspondant donc à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R. Soit Y_s le sous-groupe de Y formé des éléments $y \in Y$ pour lesquels $I_{y,\varphi(y)}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}$. Alors le groupe des caractères de la partie torique de G_s^t (fibre de G^t au-dessus de s) est Y/Y_s.
G^t étant abélien sur W, si $s \notin S_0$, la partie torique de G_s^t est nulle, et donc $Y = Y_s$, ce qui se traduit par $\forall y \in Y, s \notin V(I_{y,\varphi(y)})$. Ceci étant vrai pour tout $s \notin S_0$, on en déduit que pour tout y, on a $V(I_{y,\varphi(y)}) \subset V(I)$. Comme on sait que $I_{y,\varphi(y)} \subset I$ à cause de la condition sur $\tau(y, \varphi(y))$, on en déduit que $V(I_{y,\varphi(y)}) = V(I)$. I étant engendré par un élément irréductible ϖ, $I_{y,\varphi(y)}$ est donc de la forme (ϖ^k) pour un $k \in \mathbb{Z}$. Les idéaux I_y et $I_{y,\mu}$ sont donc aussi de la forme (ϖ^k) pour un $k \in \mathbb{Z}$. Il existe donc bien une fonction $b : Y \times X \to \mathbb{Z}$ bilinéaire, et $a : Y \to \mathbb{Z}$ telles que $I_y = I^{a(y)}$ et $I_{y,\mu} = I^{b(y,\mu)}$. □

Tous les idéaux que nous voyons apparaître sont donc des puissances de I. Tout se passe donc comme si nous étions dans un anneau de valuation discrète, ce qui est exactement la situation étudiée dans [Kün98], ce qui explique que nous puissions nous inspirer largement de cet article.

2.2.4 Données de dégénérescence équivariantes

Soit H un groupe fini agissant sur S, de façon que chaque $h \in H$ induise un morphisme de dégénérescences déployées $h : (G, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \to (G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$. On obtient pour tout $h \in H$ une action sur $\tilde{G}$ et sur $\tilde{\mathcal{L}}$, qu'on note $h_{\tilde{G}}$ et $h_{\tilde{\mathcal{L}}}$. Ces actions sont compatibles avec l'action de Y, au sens où : $h_{\tilde{G}_\eta} \circ S_y = S_{h(y)} \circ h_{\tilde{G}_\eta}$ et $\tilde{S}_y \circ S_y^*(h_{\tilde{\mathcal{L}}_\eta}) = h_{\tilde{\mathcal{L}}_\eta} \circ h_{\tilde{G}_\eta}^*(\tilde{S}_{h(y)})$. Ceci nous permet de définir une action de $\Gamma = Y \rtimes H$ sur $\tilde{G}_\eta$ et $\tilde{\mathcal{L}}_\eta$ par les formules $S_\gamma = S_y \circ h_{\tilde{G}_\eta}$ et $\tilde{S}_\gamma = h_{\tilde{\mathcal{L}}_\eta} \circ h_{\tilde{G}_\eta}^*(\tilde{S}_y)$ pour $\gamma = (y, h)$.

2.3 Modèle relativement complet

2.3.1 Définition

Étant donnée une donnée de dégénérescence, on peut définir un modèle relativement complet.

Définition 9. *Un modèle relativement complet est la donnée de :*

1. $\tilde{\pi} : \tilde{P} \to A$ *localement de type fini tel que* $\tilde{P}$ *est intègre et contient* $\tilde{G}$ *comme ouvert dense.*
2. $\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{P}}$ *un faisceau inversible sur* $\tilde{P}$ *dont la restriction à* $\tilde{G}$ *coïncide avec* $\tilde{\mathcal{L}}$.
3. *une action de* $\tilde{G}$ *sur* $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{N}})$, *où* $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{P}} \otimes \tilde{\pi}^*\mathcal{M}^{-1}$, *qui étend l'action de* $\tilde{G}$ *sur* $(\tilde{G}, \mathcal{O}_{\tilde{G}})$ *par translation.*
4. *une action de* Y *sur* $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{P}})$ *notée* $(S_y, \tilde{S}_y)$ *qui étend l'action de* Y *sur* $(\tilde{G}_\eta, \tilde{\mathcal{L}}_\eta)$.

vérifiant les conditions suivantes :

1. *il existe un ouvert* U *de* $\tilde{P}$ *qui soit* $\tilde{G}$*-invariant, de type fini sur* S, *et tel que* $\tilde{P} = \cup_{y \in Y} S_y(U)$.
2. $\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{P}}$ *est ample sur* $\tilde{P}$.
3. *condition de complétude : pour une valuation* v *de* $K(\tilde{G})$ *positive sur* R, *on note* x_v *le centre de* v *sur* A. *Alors* v *a un centre sur* $\tilde{P}$ *si et seulement si,* $\forall \mu \in X, \exists y \in Y, v(I_{y,\mu}\mathcal{O}_{\mu,x_v}) \geq 0$.

Définition 10. *Étant donné un morphisme de données de dégénérescences* $\tilde{f} : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$, *et* $\tilde{P}_1$ *et* $\tilde{P}_2$ *des modèles relativement complets de* $\tilde{G}_1$ *et* $\tilde{G}_2$ *respectivement, on appelle morphisme de modèles relativement complets un prolongement de* $\tilde{f}$ *(noté toujours* $\tilde{f}$*) en un morphisme entre* $\tilde{P}_1$ *et* $\tilde{P}_2$ *tel que* $f_A \circ \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_1 \circ \tilde{f}$, *et* $\tilde{f}$ *commute aux actions de* Y_1 *et* Y_2.

2.4 Compactifications toriques

Pour construire notre modèle relativement complet, nous allons construire une compactification torique Z de T.
Soit T un tore déployé sur S, et X son groupe des caractères, de sorte que $T = \mathrm{Spec}R[\mathcal{X}^\alpha]_{\alpha \in X}/(\mathcal{X}^\alpha\mathcal{X}^\beta - \mathcal{X}^{\alpha+\beta}, \mathcal{X}^0 - 1)$

2.4.1 Décomposition en cônes

Soit Y un groupe abélien libre de rang r. Un cône rationnel polyédral de $Y^*_{\mathbb{R}}$ est un sous-ensemble de $Y^*_{\mathbb{R}}$ qui ne contient pas de droite, et qui peut s'écrire sous la forme $\sigma = \mathbb{R}_+ l_1 + \ldots \mathbb{R}_+ l_n$ pour les $l_i \in Y^*$.
Une décomposition d'une partie $\mathcal{C}$ de $Y^*_{\mathbb{R}}$ en cônes rationnels polyédraux, ou éventail, est la donnée d'une famille (éventuellement infinie) $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de cônes rationnels polyédraux de $Y^*_{\mathbb{R}}$ telle que chaque face d'un σ_α est un σ_β pour un

$\beta \in I$, et que l'intersection de deux cônes dans cet ensemble est une face de chacun des deux cônes, et enfin que la réunion de tous les cônes de la famille est égale à $\mathcal{C}$.

Étant donnée une décomposition de $\mathcal{C}$ en cônes, on appelle fonction de support une fonction $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ qui soit continue, linéaire par morceaux, prenant des valeurs entières sur $\mathcal{C} \cap Y^*$, et vérifie $\Phi(al) = a\Phi(l)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+, l \in \mathcal{C}$. Une telle fonction est dite strictement convexe si pour tout cône σ de la famille, il existe un entier $\mathbb{N}$ et $y \in Y$ tels que $< y, . >|_{\mathcal{C}} \geq n\Phi$ et $\sigma = \{l \in \mathcal{C}, < y, l >= n\Phi(l)\}$. Une fonction de support qui est strictement convexe et linéaire sur chaque cône de la famille est appelée fonction de polarisation.

Le cône dual $\check{\sigma}$ est le cône de l'ensemble des éléments de $Y_{\mathbb{R}}$ sur lesquels les éléments de σ prennent des valeurs positives.

Le cône σ est appelé simplexe si on peut choisir les l_i linéairement indépendants. On appelle alors Y^*_σ le sous-groupe de Y^* engendré par les éléments de Y^* qui appartiennent à une face de dimension 1 de σ. On appelle multiplicité de σ l'indice de Y^*_σ dans $Y^* \cap (Y^*_\sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Un simplexe de multiplicité 1 est dit lisse.

2.4.2 Construction d'immersions toriques

On va appliquer cela à $Y = X^* \times \mathbb{Z} = \tilde{X}$. Soit $\sigma \subset X^*_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}_+$ un cône. On pose $Z(\sigma) = \mathrm{Spec} A_\sigma$, où :

$$A_\sigma = R[\pi^k \mathcal{X}^m]_{(m,k)\in\tilde{X}\cap\check{\sigma}} / (\mathcal{X}^\alpha \mathcal{X}^\beta - \mathcal{X}^{\alpha+\beta}, \mathcal{X}^0 - 1)$$

Si τ est une face de σ, on a un morphisme naturel $Z(\tau) \to Z(\sigma)$ qui identifie $Z(\tau)$ à un ouvert affine de $Z(\sigma)$.

Étant donnée une décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ de $X^*_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}_+$, on en déduit par recollement des immersions correspondant à chaque cône une immersion $T_W \to Z$. On note que $T_W \to T$ correspond au cône $\{0\} \times \mathbb{R}_+$, donc dès que ce cône apparaît dans la décomposition, l'immersion se prolonge en $T \to Z$.

Z est régulier si la décomposition est lisse, et $(Z_0)_{red}$ est un diviseur à croisements normaux stricts.

2.4.3 Construction de faisceaux

Soit φ une fonction de support $\cup_\alpha \sigma_\alpha \to \mathbb{R}$. Alors φ définit un faisceau T-équivariant $\mathcal{F}$ sur Z de la façon suivante. Sur $Z(\sigma)$, on définit le faisceau $\mathcal{F}_\sigma$ comme correspondant au $\Gamma(Z(\sigma), \mathcal{O}_{Z(\sigma)})$-module :

$$\sum_{(m,k)\in\tilde{X}, <(m,k),\_>|_\sigma \geqslant \varphi|_\sigma} I^k \mathcal{X}^m$$

On dit que le faisceau $\mathcal{F}$ est ample si les sections de $\mathcal{L}^{\otimes n}$, $n \geq 1$, définissent une base de la topologie Zariski de Z. Alors $\mathcal{F}$ est ample si φ est strictement convexe, d'après [Kün98] 1.18.

2.4.4 Fonctorialité

Soit maintenant S' un ouvert affine de S rencontrant S_0, T' le tore sur S' obtenu à partir de T par changement de base. T' ayant même groupe des caractères que T, on peut fabriquer une compactification torique Z' de T' sur S' à partir de la même décomposition en cônes que celle utilisée pour construire Z. Alors on observe que Z' est obtenu à partir de Z par changement de base de S à S'. De même pour les faisceaux inversibles obtenus à partir d'une même fonction de support.

2.4.5 Morphismes entre immersions toriques

Soit T et T' deux tores sur S, g un morphisme de T vers T', $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux éventails de $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ respectivement. Alors g induit un morphisme entre les immersions toriques associées à ces décompositions si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, il existe $\sigma' \in \mathcal{S}'$ tel que $g(\sigma) \subset \sigma'$.

2.5 Choix d'une bonne décomposition

Il s'agit donc maintenant de trouver un bon éventail qui fasse de $\tilde{P} = \tilde{G} \times^T Z$ un modèle relativement complet. L'article [Kün98] fournit une telle décomposition dans le cas où R est un anneau de valuation discrète complet. Expliquons précisément ce que l'on obtient.
On part de

1. X et Y groupes abéliens libres de rang r
2. $\varphi : Y \to X$ morphisme injectif
3. $b : Y \times X \to \mathbb{Z}$ bilinéaire telle que $b(., \varphi(.))$ est symétrique définie positive.
4. $a : Y \to \mathbb{Z}$ telle que $a(0) = 0$ et $a(y + y') - a(y) - a(y') = b(y, \varphi(y'))$.
5. H groupe fini d'automorphismes de (X, Y, φ, a, b) agissant à gauche sur X et à droite sur Y, c'est-à-dire la donnée pour tout h de (h_X, h_Y) tels que $\varphi = h_X \circ \varphi \circ h_Y$, $a \circ h_Y = a$, et $b(h_Y(.), .) = b(., h_X(.))$.

Posons $\Gamma = Y \rtimes H$, la composition étant donnée par :

$$(y, h)(y', h') = (y + h(y'), hh')$$

Alors Γ agit à gauche sur $\tilde{X} = X^* \times \mathbb{Z}$ par :

$$S_{(y,h)}(l, s) = (l \circ h(.) + sb(y, .), s)$$

Notons que $\mathcal{C} = (X^*_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^*_+) \cup \{0\}$ est stable par l'action de Γ.
On définit la fonction $\chi : \Gamma \times \tilde{X}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ par $\chi((y, h), (l, s)) = sa(y) + l \circ \varphi \circ h^{-1}(y)$.

Définition 11. *On dit qu'un éventail de $\mathcal{C}$ est Γ-admissible si l'ensemble des cônes est Γ-invariant, et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites.*

Définition 12. *Soit k un entier > 0. On dit qu'une fonction de polarisation Φ est k-tordue et Γ-admissible si pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\Phi(.) - \Phi \circ S_\gamma(.) = k\chi(\gamma, .)$.*

Alors la proposition 3.3 de [Kün98] donne le résultat suivant :

Proposition 8. *Il existe un éventail* Γ*-admissible* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *muni d'une fonction de polarisation* Φ Γ*-admissible et* k*-tordu pour un certain* k*, qui soit lisse, qui contienne le cône* $\sigma_T = \{0\} \times \mathbb{R}_+$*, et qui vérifie* $S_y(\sigma_\alpha) \cap \sigma_\alpha = \{0\}$ *pour tout* $y \in Y \setminus \{0\}$ *et tout* $\alpha \in I$*.*

On dira qu'un tel éventail est convenable. Revenons à notre cas.

Lemme 9. *Il existe un éventail convenable dans* $\tilde{X}$*.*

Démonstration. Soit R' l'anneau local de S au point générique de S_0, et $I' = IR'$. Alors R' est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal I'. Soit G' déduit de G par changement de base de S à $S' = \mathrm{Spec} R'$, et T' son tore, alors T' est aussi déduit de T par ce changement de base, ils ont donc même groupe de caractères X. On peut donc utiliser les résultats de [Kün98] pour mettre sur $\tilde{X}$ un éventail convenable. □

Remarque 2. Si (X, Y, φ, a, b) provient de $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, alors pour un entier $k > 0$, c'est $(X, Y, k\varphi, ka, b)$ qui est associé à $(G, \mathcal{L}^{\otimes k}, \mathcal{M}^{\otimes k})$. Supposons que l'on ait trouvé pour (X, Y, φ, a, b) une décomposition de $\mathcal{C}$ avec une fonction de polarisation Φ qui soit k-tordue, alors cette même fonction est 1-tordue pour $(X, Y, k\varphi, ka, b)$. Ainsi, quitte à remplacer $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ par une certaine puissance, on peut toujours supposer qu'on a associé à (X, Y, φ, a, b) une décomposition munie d'une fonction de polarisation 1-tordue.

Intéressons-nous maintenant au cas d'un morphisme $f : G_1 \to G_2$ H-équivariant. f induit donc des morphismes $f_Y : Y_1 \to Y_2$, et $f_X : X_2 \to X_1$ commutant à l'action de H, d'où $f_{\tilde{X}} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$. Comme f_η est une isogénie, f_X et f_Y sont des injections.
Fixons un éventail convenable de $\tilde{X}_2$. On veut trouver un éventail convenable de $\tilde{X}_1$ vérifiant la condition énoncée en 2.4.5, de façon à obtenir $Z_1 \to Z_2$ prolongeant $T_1 \to T_2$. Considérons les images réciproques des cônes constituant l'éventail de $\tilde{X}_2$. Comme f induit une injection de conoyau fini de X_2 dans X_1, on peut identifier $\tilde{X}_1$ à $\tilde{X}_2$ muni d'une structure entière plus fine (c'est-à-dire $X_1^* \times \mathbb{Z} \subset X_2^* \times \mathbb{Z}$). L'éventail construit pour $\tilde{X}_2$ forme donc un éventail pour $\tilde{X}_1$, qui est convenable sauf qu'il peut ne pas être lisse. Il suffit donc de prendre un raffinement de cet éventail pour obtenir un éventail dans $\tilde{X}_1$ qui soit convenable et lisse.
Deux tels éventails seront dits compatibles.

2.6 Obtention d'un modèle relativement complet

On prend ensuite la compactification torique Z de T obtenue à partir de cette décomposition de X, et on fait le produit contracté de cette compactification avec $\tilde{G}$, c'est-à-dire $\tilde{P} = \tilde{G} \times^T Z$. Autrement dit $\tilde{P}$ est obtenu en recollant les $\tilde{P}(\sigma_\alpha) = \tilde{G} \times^T Z(\sigma_\alpha)$.

On obtient ainsi un modèle relativement complet de $\tilde{G}$, et muni d'une action de H. La vérification est identique à celle de l'article [Kün98], paragraphe 3.7. Nous avons ainsi construit $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{P}})$ dont le quotient donnera une compactification équivariante de $(G, \mathcal{L})$.
Soit $f : G_1 \to G_2$ H-équivariant, et deux éventails compatibles de $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$, alors f induit un morphisme entre les modèles relativement complets associés aux éventails.

2.7 Du modèle relativement complet à la compactification

Le passage du modèle relativement complet à la compactification est décrit dans [CF90]. Rappelons-en le principe.
Soit $\tilde{P}_n$ le changement de base de $\tilde{P}$ à S_n (notation définie au début du paragraphe 2). Alors il existe un morphisme étale surjectif $\pi_n : \tilde{P}_n \to P_n$ tel que P_n soit un quotient de $\tilde{P}_n$ sous l'action de Y comme faisceau fpqc. $\tilde{\mathcal{L}}_n$ se descend en un faisceau ample $\mathcal{L}_n$ sur P_n.
En effet, il existe un ensemble fini $E \subset Y$ tel que pour tout y hors de E, on ait $S_y(U_0) \cap U_0 = \emptyset$, où $U_0 = U \times_S S_0$ (cela se déduit des propriétés du modèle relativement complet, et dans notre cas cela se verra directement sur la construction), autrement dit Y agit librement sur $\tilde{P}_0$. Alors on définit facilement le quotient P_n' de $\tilde{P}_n$ par mY pour un m assez grand. Ensuite, Y/mY agit librement sur P_n' qui est projectif donc on peut définir le quotient P_n.
Les $(P_n, \mathcal{L}_n)$ forment un système projectif, d'où $(P_{for}, \mathcal{L}_{for})$ avec $\mathcal{L}_{for}$ ample sur P_{for}. $(P_{for}, \mathcal{L}_{for})$ s'algébrise en $(P, \mathcal{L}_P)$, avec $\mathcal{L}_P$ ample sur P.
P est régulier et plat sur S, car c'est le cas pour $\tilde{P}$ (voir [Kün98], proposition 2.15).
Il s'agit ensuite de vérifier que P_0 est bien un diviseur à croisements normaux dans P. $\tilde{P}$ est muni d'une stratification, car c'est une immersion torique, chaque cône de l'éventail correspondant à une strate, et $\tilde{P}_0$ est un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{P}$ parce qu'on a supposé l'éventail lisse. Lorsque on passe au quotient cette propriété est préservée, de plus l'hypothèse que $S_y(\sigma_\alpha) \cap \sigma_\alpha = \{0\}$ pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$ et tout $\alpha \in I$ assure que P_0 est muni d'une stratification indexée par les orbites de Y dans l'ensemble des cônes, de sorte que $(P_0)_{red}$ est un diviseur à croisements normaux stricts.
P est alors une compactification de G, ce qui prouve le théorème 5.
D'autre part, si $\tilde{f} : \tilde{P}_1 \to \tilde{P}_2$ est un morphisme de modèles relativement complets, f passe au quotient (car on a supposé que $\tilde{f}$ commutait à l'action de Y_1 et Y_2), et on obtient $\bar{f} : P_1 \to P_2$ prolongeant $f : G_1 \to G_2$. Ainsi on a prouvé le théorème 6.

3 Recollements

Il s'agit maintenant d'utiliser divers théorèmes de descente pour montrer que l'existence de compactifications dans le cas d'une base complète, avec une extension déployée, suffit à obtenir l'existence de compactifications dans le cas général. La partie difficile est de redescendre les objets, ensuite les morphismes descendent automatiquement aussi, donc le théorème 2 va apparaître naturellement comme conséquence de la fin de la preuve du théorème 1.

3.1 Cas non affine

Proposition 10. *Supposons que S est complet par rapport à S_0 et que $(G, \mathcal{L})$ forme une dégénérescence déployée $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$. Supposons de plus que nous avons une action d'un groupe fini H sur S et sur $(G, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, telle que S peut être recouvert par des ouverts affines stables par H. Alors il existe des compactifications équivariantes.*

Démonstration. Pour chaque ouvert affine de S stable par H rencontrant S_0, on peut faire la compactification localement par la méthode expliquée précédemment. Les compactifications locales obtenues sont compatibles car elles proviennent de la même décomposition de X (car tous les ouverts affines considérés contiennent le point générique de S_0).
La condition d'être un diviseur à croisement normaux et la condition de propreté étant locales sur la base, le recollement des compactifications est bien une compactification. □

3.2 Cas où l'extension n'est pas déployée

Proposition 11. *Supposons S complet par rapport à S_0. Alors il existe des compactifications.*

Démonstration. Il existe une extension finie étale S' de S telle que $(G', \mathcal{L}', \mathcal{M}')$ sur S' déduite de celle sur S soit déployée. On peut supposer que $S' \xrightarrow{u} S$ est galoisienne.
Soit H le groupe de Galois de S' sur S. Soit S'_0 la préimage de S_0 par u.
Supposons d'abord que S'_0 est irréductible. Le groupe H agit sur la dégénérescence $(G', \mathcal{L}', \mathcal{M}')$ par son action sur S'. Observons que u est affine puisque finie. En particulier, la préimage d'un ouvert affine de S est un ouvert affine de S' stable par H. On peut donc appliquer le résultat du paragraphe 3.1 à S', S'_0 et H. On obtient une compactification sur S' munie de l'action du groupe de Galois, ce qui constitue une donnée de descente. Comme on cherche à redescendre un schéma P' qui est quasi-compact sur S' et muni d'un faisceau inversible ample $\mathcal{L}'$, on est dans une situation où toute donnée de descente est effective. On peut donc redescendre P' en un P sur S (cf.[BLR90]).
Comme P' se déduit de P par un changement de base fini, P est propre sur S si et seulement si P' est propre sur S'. D'autre part P' étant étale sur P, et $(P'_0)_{red}$ étant un diviseur à croisements normaux stricts dans P', P_0 est un diviseur à croisements normaux dans P.
Dans le cas où S'_0 n'est pas irréductible, notons que pour S' (et aussi pour S'_0) les composantes irréductibles correspondent aux composantes connexes, du fait de la propriété de régularité. D'autre part, S' étant complet par rapport à S'_0,

chaque composante connexe de S' contient exactement une composante connexe de S'_0. Alors n'importe quelle composante connexe de S' est une extension galoisienne de S, on est donc ramené au cas précédent. $\square$

3.3 Cas où la base n'est pas complète

Pour finir la preuve du théorème 1, il nous faut regarder le cas où S n'est pas nécessairement complet.
On rappelle le résultat suivant ([BL95]) :

Théorème. *Soit A un anneau, f un élément simplifiable de A, F un A_f-module, G un $\hat{A}$-module f-régulier, un isomorphisme $\hat{A}_f$-linéaire $\varphi : \hat{A} \otimes_A F \to G_f$.*
Il existe alors un A-module f-régulier M et des isomorphismes $\alpha : M_f \to F$ et $\beta : \hat{A} \otimes_A M \to G$ tels que φ soit l'application composée $\beta_f \circ (1 \otimes \alpha^{-1})$.
Le triplet (M, α, β) est unique à isomorphisme unique près.
Si F est plat sur A_f et G plat sur $\hat{A}$, alors M est plat sur A.

Par unicité de M, ce théorème s'étend en une situation globale sur S, donnant un théorème de descente pour les faisceaux quasi-cohérents vérifiant les conditions sur la torsion, donc en particulier pour les faisceaux plats sur S. D'où un théorème de descente pour les schémas plats munis d'un faisceau ample.
Soit $(\hat{G}, \hat{\mathcal{L}})$ obtenu par changement de base au complété $\hat{S}$ de S par rapport à S_0. D'après la proposition 11, il existe une compactification $(\hat{P}, \hat{\mathcal{L}}_P)$ de $(\hat{G}, \hat{\mathcal{L}})$, où $\hat{\mathcal{L}}_p$ prolonge $\hat{\mathcal{L}}^{\otimes k}$. $(\hat{P}, \hat{\mathcal{L}}_P)$ et $(G_{|W}, \mathcal{L}_{|W}^{\otimes k})$ deviennent isomorphes après passage à $\hat{S} \times_S W$, et $\hat{P}$ est plat sur $\hat{S}$, on déduit du résultat de [BL95] l'existence d'un $(P, \mathcal{L}_P)$ sur S, dont nous allons montrer que c'est une compactification de $(G, \mathcal{L})$.

Lemme 12. *P_0 est un diviseur à croisement normaux dans P.*

Démonstration. Cette condition se lit sur les anneaux locaux des points de P au-dessus de S_0. Soit x un point de $P_0 = \hat{P}_0$ au-dessus du point $s \in S_0$. Alors $\mathcal{O}_{\hat{P},x} = \mathcal{O}_{P,x} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{\hat{S},s}$. Comme $\mathcal{O}_{\hat{S},s}$ est le complété de $\mathcal{O}_{S,s}$ selon un certain idéal, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{\hat{P},x}$ et $\mathcal{O}_{P,x}$ ont même complété. La régularité de l'un est donc équivalent à la régularité de l'autre. D'autre part la propriété d'être réduit et les propriétés de dimension sont clairement conservées. $\square$

Lemme 13. *P est propre sur S.*

Démonstration. Il s'agit du corollaire 4.8 de l'exposé VIII de [Gro70] : la descente fpqc conserve la propreté, or $\hat{P}$ est propre sur $\hat{S}$ et $G_{|W}$ est propre sur W. $\square$

Ainsi $(P, \mathcal{L}_P)$ vérifie toutes les conditions nécessaires pour être une compactification de $(G, \mathcal{L})$. Une telle compactification existe donc bien.

Références

[BL95] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Un lemme de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320 (1995), 335–340.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.

[CF90] Ching-Li Chai and Gerd Faltings, *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer-Verlag, 1990.

[D+70] Michel Demazure et al., *SGA 3/2*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, 1970.

[Gro70] Alexander Grothendieck, *SGA 1*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, 1970.

[Kün98] Klaus Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing*, Duke Math. J. 95 (1998), 161–212.

[Mor85] Laurent Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque 129 (1985), 1–266.

[Mum72] David Mumford, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over a complete local ring*, Compos. Math. 24 (1972), 239–272.

[Ray70] Michel Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 119, Springer-Verlag, 1970.

Sandra Rozensztajn
LAGA, Institut Galilée
Université Paris 13
99 avenue J.-B. Clément, 94340
Villetaneuse, France
rozenszt@math.univ-paris13.fr