Formules de Représentation Intégrale pour les Domaines de Cartan

Atallah Affane

Received: May 31, 1999

Communicated by Joachim Cuntz

Abstract. For a bounded, symmetric and circled domain D in $\mathbf{C}^n$, considered as the unit ball of some Jordan triple system V, we give Koppelman-Leray and Cauchy-Leray formulas. These formulas supply us integral operators for solving the equation $\overline{\partial} u = f$ when f is a closed (0, q) form with coefficients in $C^0(\overline{D})$. These operators, constructed by the help of the generic norm of V, are invariant by some Lie subgroup in the group of biholomorphic transformations of D and the solutions obtained satisfy an estimation of growth at the boundary.

2000 Mathematics Subject Classification: 32M15, 32F20.
Keywords and Phrases: $\overline{\partial}$-problem, bounded symmetric domains.

1. introduction.

Nous appellerons domaine de Cartan tout ouvert borné D de $\mathbf{C}^n$ qui soit

- symétrique, c'est à dire que pour tout z de D, il existe une transformation biholomorphe involutive $\varphi \in Aut(D)$ dont z est un point fixe isolé.
- cerclé, c'est à dire qu'il contient l'origine et qu'il est stable par les transformations du type $z \longrightarrow e^{it}z,\ t \in \mathbf{R}$.

Un domaine de Cartan est dit irréductible s'il n'est pas produit de deux autres domaines. La classification de tels domaines fournit quatre classes dénombrables et deux domaines exceptionnels, le premier dans $\mathbf{C}^{16}$, le second dans $\mathbf{C}^{27}$. Pour la classe des boules de Lie et le premier domaine exceptionnel, des formules de représentation intégrale ont été établies par Roos [7]. Plus tard, Hachaichi [2] a donné, pour la classe du disque généralisé, une formule permettant de résoudre le $\overline{\partial}$-problème avec une estimation de croissance au bord. Dans ce travail, nous mettons à profit une approche algébrique, approche développée dans [5] et qui consiste à considérer un domaine de Cartan D comme la boule unité d'un système triple de Jordan V (associé canoniquement) pour obtenir deux formules générales, la première du type Koppelman-Leray, la seconde du type Cauchy-Leray. Ces formules, construites à l'aide de la norme générique de V, fournissent des opérateurs de résolution $f \longrightarrow Tf$ du $\overline{\partial}$-problème avec une donnée dans $C^0(\overline{D})$ et vérifiant des estimations de la forme:

$$\sup_{z \in D} \mid Tf(z) d(z, \partial D)^N \mid \leq C \sup_{z \in D} \mid f(z) \mid$$

où d est la distance usuelle et N un entier positif fonction de la dimension, du rang et du genre de V. Il s'avère que T est invariant par un certain sous groupe de Lie H du groupe des automorphismes de V, c'est à dire:

$$T(h^* f) = h^*(Tf) \quad \forall h \in H.$$

Lorsque D est irréductible, H n'est autre que le stabilisateur de l' origine dans $Aut(D)$. Dans la seconde section, nous rappellons certains éléments de la théorie des systèmes triples de Jordan qui permettent d'une part de prouver que les domaines de Cartan sont à pseudo-bord, de l'autre de construire de manière naturelle des sections de Leray. Dans les sections suivantes, nous donnons les formules annoncées et comme tous les éléments intervenant dans leur élaboration sont invariants par le stabilisateur de l'origine dans $Aut(D)$, l'invariance des opérateurs de résolution sera assurée.

2. Les domaines de Cartan et les systèmes triples de Jordan.

La référence pour toutes les notions introduites dans cette section est [4], [5] et [6]. Nous appellerons système triple de Jordan (en abrégé STJ) un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbf{C}$ muni d' un triple produit

$$\begin{array}{ccccccc} V & \times & V & \times & V & \longrightarrow & V \\ x & & y & & z & \longrightarrow & \{ x \; y \; z \} \end{array}$$

$\mathbf{C}$-bilinéaire et symétrique en (x, y), $\mathbf{C}$-antilinéaire en z et vérifiant l'identité

$$\{xy\{uvz\}\} - \{uv\{xyz\}\} = \{x\{yuv\}z\} - \{\{uvx\}yz\}.$$

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\{xyz\} = D(x,y)z = Q(x,z)y \; ; \; Q(x) = \frac{1}{2} Q(x,x)$$

$$B(x,y) = 1 - D(x,y) + Q(x)Q(y)$$

et nous désignerons par $Aut(V)$ le groupe des isomorphismes h de V tels que:

$$h(\{xyz\}) = \{h(x)h(y)h(z)\} \quad \forall x, y, z \in V.$$

Un sous-système de V est un sous espace-vectoriel W tel que $\{WWW\} \subseteq W$. Un idéal est un sous-espace vectoriel I tel que $\{IVV\} + \{VIV\} \subseteq I$ et nous

dirons que V est simple s'il ne possède pas d'idéal propre, semi simple s'il est somme d'idéaux simples. Un STJ est dit hermitien positif (en abrégé $STJHP$) si la forme hermitienne $\langle u \mid v\rangle = trD(u,v)$ est définie positive. En fait, tout $STJHP$ est semi-simple. Pour tout ce qui suit, V désigne un $STJHP$ de dimension n et $\langle . \mid . \rangle$ son produit hermitien.
Un élément e de V est dit tripotent si $Q(e)e = e$. Lorsque deux tripotents e et e' vérifient l'une des propriétés équivalentes suivantes:

$$D(e,e') = 0 \ ; \ D(e',e) = 0 \ ; \ \{eee'\} = 0 \ ; \ \{e'e'e\} = 0$$

nous dirons qu'ils sont fortement orthogonaux. A tout tripotent e correspond une décomposition de V dite de Pierce. De fait, $D(e,e)$ est un endomorphisme de V auto-adjoint pour la forme hermitienne $\langle . \mid . \rangle$ et ne peut admettre comme valeurs propres que 0, 1 et 2. D'où la décomposition orthogonale

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$$

$V_i(e)$ étant le sous espace propre associé à la valeur propre i. Chacun des $V_i(e)$ est un sous système de V et on a la formule:

$$\{V_0V_2V\} = \{V_2V_0V\} = 0. \tag{1}$$

Un tripotent $e \neq 0$ est dit minimal si $V_2(e) = \mathbf{C}e$. Un repère est une famille maximale $\{e_i\}_{i=1,\dots,r}$ de tripotents minimaux fortement orthogonaux deux à deux. Comme deux repères sont conjugués par $Aut(V)$, tous les repères ont même cardinal que nous appellerons rang de V et noterons r. La hauteur d'un tripotent e sera par définition le rang du sous système $V_2(e)$ qui est aussi le nombre d'éléments d'une décomposition de e en somme de tripotents minimaux fortement orthogonaux deux à deux. Voici maintenant trois résultats de la théorie des STJ qui nous serons utiles.

Théorème 2.1. *Un élément x de V s'écrit de manière unique*

$$x = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^s e_s$$

où $\{e_i\}_{i=1,\dots,s}$ est une famille de tripotents fortement orthogonaux deux à deux et $0 \leq \lambda^1 < \cdots < \lambda^s$ des nombres réels. Cette écriture s'appelle décomposition spectrale de x. De plus, la fonction $x \longrightarrow \mid x \mid = \lambda^s$ est une norme que nous appellerons norme spectrale de V. La distance associée sera appellée distance spectrale et notée δ.

Théorème 2.2. *i) La boule unité pour la norme spectrale d'un $STJHP$ est un domaine de Cartan, irréductible si et seulement si V est simple.*
ii) Un domaine de Cartan est de manière canonique la boule unité d'un $STJHP$ V. De plus, V est simple si et seulement si D est irréductible. Le stabilisateur de l'origine dans $Aut(D)$ est alors exactement $Aut(V)$.

Pour tout tripotent e le sous-système $V_0(e)$ est un $STJHP$ et nous noterons D_e sa boule unité ouverte pour la norme spectrale. Comme conséquence de l'unicité de la décomposition spectrale, les sous ensembles $e + D_e$ sont disjoints deux à deux.

Théorème 2.3. *Soit pour* $j = 1, ..., r$
M_j *l'ensemble des tripotents de hauteur* j,
$D_j = \{e + y;\ e \in M_j \text{ et } y \in D_e\}$,
$p_j : D_j \longrightarrow M_j$ *l'application qui à* $x \in D_j$ *associe l'unique* $e \in M_j$ *tel que* $x \in D_e$.
Alors
-Les M_j *et les* D_j *sont des sous variétés analytiques réelles localement fermées de* V *et les* $p_j : D_j \longrightarrow M_j$ *sont des fibrés analytiques localement triviaux. Les* M_j *sont compacts. La frontière* ∂D *est la réunion des* D_j.
-La codimension de D_j *est la dimension complexe de* $V_2(e)$, e *étant un point quelconque de* M_j.
-M_r *est la frontière de Shilov de* D.
-$Aut(V)$ *est un groupe de Lie compact opérant sur chaque* D_j.

Lemme 2.1. *Posons* $D^j = D_j \cup ... \cup D_r$ *pour* $j = 1, ..., r$. *Alors* D_j *est un ouvert dense de* D^j.

Preuve:
i) Montrons que D^{j+1} est fermé dans D^j. Soit $s > j$ et $\{x_l\}_{l\geq 1}$ une suite dans D_s convergente vers $x \in D^j$. Puisque M_s est compact, nous pouvons supposer que $x_l = y_l + e_l$ où les e_l convergent vers e dans M_s, $y_l \in V_0(e_l)$ et $\mid y_l \mid < 1$. A la limite, il vient $x = y + e$ avec $y \in V_0(e)$ et $\mid y \mid \leq 1$. Si $\mid y \mid < 1$, alors $x \in D_s$. Sinon, le théorème 2.1 appliqué à y comme élément du sous-système $V_0(e)$ donne $y = \lambda^1\varepsilon_1 + ... + \lambda^t\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$. Puisque $\varepsilon_{t+1} \in V_0(e)$, on vérifie à l'aide de la formule (1) que $e+ \varepsilon_{t+1}$ est un tripotent et que $V_2(e) \subseteq V_2(e+ \varepsilon_{t+1})$; alors $x \in D_\tau$, $\tau \geq s$ étant la hauteur de $e+ \varepsilon_{t+1}$. Ainsi, D_j est ouvert dans D^j.
ii) Soit $s > j$, $x \in D_s$ et $\lambda^1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda^t\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$ sa décomposition spectrale; comme la hauteur de ε_{t+1}est aussi sa hauteur dans le sous-système $V_2(\varepsilon_{t+1})$, il possède une décomposition $\varepsilon_{t+1} = \sigma_1 + \cdots + \sigma_s$ en tripotents minimaux fortement orthogonaux deux à deux choisis dans $V_2(\varepsilon_{t+1})$. D'autre part, la formule (1) entraine que les ε_i et les σ_j sont fortement orthogonaux deux à deux pour $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq j \leq s$. Soit $x_l = \lambda^1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda^t\varepsilon_t + \alpha_l(\sigma_{j+1} + \cdots + \sigma_s) + \sigma_1 + \cdots + \sigma_j$ où $0 < \alpha_l <$ et $lim\ \alpha_l = 1$. Par construction, $x_l \in D_j$ et $lim\ x_l = x$. Ceci prouve que $D^j \subseteq \overline{D}_j$.
Ce lemme et le théorème 2.3 assurent que D est à pseudo-bord au sens de [8] et que la formule de Stokes y est donc valable.

Dans tout ce qui suit, V sera identifié à $\mathbf{C}^n$ par le choix d'une base orthonormale pour le produit hermitien $\langle . \mid . \rangle$. Alors $detB(x, y)$ est un polynome holomorphe en x, antiholomorphe en y et relié au noyau de Bergman $k(x, y)$ de D par la formule:

$$\det B(x,y) = (volD)^{-1} k(x,y)^{-1} \ \forall x \in D,\ \forall y \in D. \tag{2}$$

Rappellons aussi la formule de transformation:

$$k(x,y) = J\varphi(x) k(\varphi(x), \varphi(y)) \overline{J}\varphi(y) \ \ \forall \varphi \in Aut(D) \tag{3}$$

(Ici $J\varphi$ désigne le jacobien de φ et $\overline{J}\varphi$ son conjugué).

Une propriété particulière des domaines de Cartan est que:

$$k(0,z) = k(z,0) = k(0,0) \ \ \forall z \in D.$$

Par ailleurs, lorsque V est simple, il existe un entier positif g et un polynome irréductible $N(x,y)$ tel que:

$$N(0,0) = 1 \text{ et } \det B(x,y) = N(x,y)^g.$$

$N(x,y)$ s'appelle la norme générique et g le genre. Par construction, $N(x,y)$ est holomorphe en x, antiholomorphe en y et vérifie:

$$N(x,y) = \overline{N(y,x)} \text{ et } N(x,0) = N(0,x) = 1 \tag{4}$$

Si $V = V_1 \oplus ... \oplus V_m$ où chaque V_i est un idéal simple de norme générique $N_i(x_i, y_i)$, nous poserons:

$$N((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)) = \prod_{1 \leq i \leq m} N_i(x_i, y_i),$$

$$L(x,y) = N(x,y)N(y,x) - N(x,x)N(y,y).$$

Nous introduisons aussi le groupe de Lie:

$$Aut'(V) = \{h = (h_1, ..., h_m);\ h_i \in Aut(V_i)\}.$$

Etant donné un repère $\{e_i\}_{i=1,...,r}$ et $x_j = a_j^1 e_1 + ... + a_j^r e_r$ pour $j = 1, 2$ nous avons la formule:

$$N(x_1, x_2) = (1 - a_1^1 \overline{a}_2^1)...(1 - a_1^r \overline{a}_2^r). \tag{5}$$

Proposition 2.1. *i) $N(x,y) \neq 0 \ \ \forall x \in D,\ \forall y \in \overline{D}.$*
ii) $N(y,y) = 0 \ \ \forall y \in \partial D.$
iii) $\forall x \in D,\ \forall y \in \overline{D}$, $L(x,y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

Preuve:
Il suffit de l'établir dans le cas où le système V est simple.
i) On a d'après la définition de $B(x,y)$, $B(x,\lambda y) = B(\lambda x, y)$ pour tout λ dans $\mathbf{R}$ ce qui donne:

$$N(x,\lambda y) = N(\lambda x, y)\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in V,\ \forall y \in V. \tag{6}$$

Soit $x \in D$ et $y \in \overline{D}$; puisque D est une boule centrée en l'origine, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$, $y' \in D$ tels que $\lambda x \in D$ et $y = \lambda y'$. Nous aurons donc $N(x,y) = N(x,\lambda y') = N(\lambda x, y')$. Or d'après (2), $N(\lambda x, y') \neq 0$.
ii) C'est une application de la formule (5) en observant que l'un des facteurs du terme de droite est nul.
iii) Soit $\langle .,. \rangle$ le produit hermitien usuel de $l^2(\mathbf{N})$, $\{\varphi_p\}_{p\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrables et $\Phi : D \longrightarrow l^2(\mathbf{N})$ définie par $\Phi(x) = \{\varphi_p(x)\}_{p\in\mathbf{N}}$. On sait que:

$$k(x,y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle \quad \forall x \in D,\ \forall y \in D.$$

L'inégalité à établir n'est autre que celle de Cauchy-Schwartz et l'égalité n'a lieu que si $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ sont colinéaires, ce qui exige $x = y$. Enfin, pour $x \in D$ et $y \in \partial D$, d'après les points i) et ii), on a $L(x,y) > 0$.

LEMME 2.2. *On a l'inégalité:*

$$\inf_{y\in D} \mid N(x,y) \mid \geq \delta(x,\partial D)^r\ \forall x \in D.$$

Preuve:
Soit x un point de D. Si $x = 0$, il suffit d'appliquer la formule (4). Soit donc $x \neq 0$ et considérons sur $D \times D$ la fonction $\Psi(u,y) = N(\mid x \mid u, y)^{-1}$. C'est une fonction holomorphe en u, antiholomorphe en y et continue sur $\overline{D \times D}$ d'après le i) de la proposition 2.1. Pour u fixé dans $\overline{D}$, le principe du maximum donne un point t dans M_r tel que:

$$\mid \Psi(u,y) \mid \leq \mid \Psi(u,t) \mid \ \ \forall y \in \overline{D}.$$

Toujours, par le principe du maximum appliqué maintenant à la fonction $w \longrightarrow \Psi(w,t)$, il existe un point $s \in M_r$ tel que $\mid \Psi(u,y) \mid \leq \mid \Psi(s,t) \mid$. Mais en combinant la formule (6) et le iii) de la proposition 2.1, on obtient:

$$\mid \Psi(s,t) \mid \leq (N(\mid x \mid^{\frac{1}{2}} s, \mid x \mid^{\frac{1}{2}} s) N(\mid x \mid^{\frac{1}{2}} t, \mid x \mid^{\frac{1}{2}} t))^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, d'après la formule (5), le terme de droite de cette inégalité vaut $(1- \mid x \mid)^{-r}$. Pour conclure, il suffit de prendre $u = \dfrac{x}{\mid x \mid}$ et de remarquer que D étant la boule unité, l'inégalité $1- \mid x \mid \geq \delta(x,\partial D)$ a lieu.
Nous adopterons la notation suivante:

$$(u,v)=\sum_{1\le j\le n}u^jv^j \quad ; \quad \langle u \mid v\rangle=(u,\overline{v}) \text{ pour } u \text{ et } v \text{ dans } \mathbf{C}^n$$

et μ désignera la forme de Cauchy-Leray:

$$\mu(u,v)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\sum_{1\le j\le n}(-1)^{j+1}\frac{u^j}{(u,v)^n}\underset{m\neq j}{\Lambda}du^m\underset{1\le k\le n}{\Lambda}dv^k$$

définie sur $\{(u,v)\neq 0\}$. On sait que μ est fermée.
Nous terminerons cette section par le fait que toutes les notions qui y sont introduites[1] sont invariantes par le groupe $Aut'(V)$.

3. La formule de Koppelman-Leray.

Dans cette section, nous adaptons aux domaines de Cartan qui en général ne sont ni strictement pseudo-convexes, ni de classe C^1 par morceaux la démarche de [3]. Le développement de Taylor du polynome holomorphe $u\longrightarrow N(u,t)$ au point $u=v$ s'écrit

$$N(u,t)=N(v,t)+(\alpha(u,v,t),(v-u)) \tag{7}$$

où

$$\alpha^k(u,v,t)=-\int_0^1\frac{\partial N}{\partial x^k}(u+s(v-u),t)ds.$$

Les $\alpha^k(u,v,t)$ sont des polynomes holomorphes en (u,v) et antiholomorphes en t. Posons alors $\omega(z,\xi)=\alpha(z,\xi,\xi)$; par construction et d'après les points i) et ii) de la proposition 2.1, ω est une section de Leray pour le domaine D holomorphe en z c'est à dire $(\omega(z,\xi),\xi-z)\neq 0$ pour tout z dans D et ξ dans ∂D. On introduit la section de Bochner-Martinelli $\sigma(z,\xi)=\overline{\xi}-\overline{z}$ et la section d'homotopie:

$$\eta(z,\xi,\lambda)=(1-\lambda)\frac{\omega(z,\xi)}{(\omega(z,\xi),\xi-z)}+\lambda\frac{\sigma(z,\xi)}{(\sigma(z,\xi),\xi-z)}$$

définie pour $\xi\neq z,\ (\omega(z,\xi),\xi-z)\neq 0$ et $0\le\lambda\le 1$. A l'aide de ces sections, on construit les formes différentielles:

$$\Omega=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\sum_{1\le j\le n}(-1)^{j+1}\frac{\overline{\xi}^j-\overline{z}^j}{(\sigma(z,\xi),\xi-z)^n}\underset{m\neq j}{\Lambda}(d\overline{\xi}^m-d\overline{z}^m)\underset{1\le k\le n}{\Lambda}d\xi^k$$

[1] norme spectrale, produit hermitien, norme générique, composantes D_j etc..

$$\underline{\Omega} = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \sum_{1\leq j\leq n} (-1)^{j+1}\eta^j(z,\xi,\lambda) \underset{m\neq j}{\Lambda} (\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta^m(z,\xi,\lambda) \underset{1\leq k\leq n}{\Lambda} d\xi^k.$$

Remarque 3.1. *Pour une transformation $h \in Aut'(V)$, une section $\rho(z,\xi)$ telle que $\overline{\rho}(h(z),h(\xi)) = h(\overline{\rho}(z,\xi))$ et une section $\rho'(z,\xi)$ vérifiant $\rho'(h(z),h(\xi)) = h(\rho'(z,\xi))$, la forme différentielle*

$$\sum_{1\leq j\leq n} (-1)^{j+1}\rho^j(z,\xi) \underset{m\neq j}{\Lambda} d\rho^m \underset{1\leq k\leq n}{\Lambda} d\rho'^k$$

est invariante par la transformation $\widetilde{h}(z,\xi) = (h(z),h(\xi))$.

Ceci provient seulement du fait que si $h \in Aut'(V)$ alors $\mid \det\ h \mid = 1$. D'autre part, pour $h \in Aut'(V)$ l'identité $N(h(z),h(\xi)) = N(z,\xi)$ donne après calcul direct:

$$\overline{\alpha}(h(z),h(\xi),h(t)) = h(\overline{\alpha}(z,\xi,t)). \tag{8}$$

Etant donnée une $(0,q)$ forme f à coefficients continus sur $\overline{D}$, on définit par intégration partielle par rapport à ξ les formes différentielles:

$$B_D f(z) = \int_{\xi\in D} f(\xi)\Lambda\Omega(z,\xi) \qquad R^{\omega}_{\partial D} f(z) = \int_0^1 d\lambda \int_{\xi\in\partial D} f(\xi)\Lambda\underline{\Omega}(z,\xi,\lambda)$$

$$Tf = (-1)^q(B_D f + R^{\omega}_{\partial D} f).$$

Pour $q = 0$, on a $B_D f = 0$ et $R^{\omega}_{\partial D} f = 0$ tandis que pour $q \geq 1$, on obtient des formes de type $(0,q-1)$ en z.

Lemme 3.1. *Les opérateurs B_D et $R^{\omega}_{\partial D}$ sont invariants par $Aut'(V)$ c'est à dire:*

$$h^* B_D f = B_D h^* f \quad et \quad h^* R^{\omega}_{\partial D} f = R^{\omega}_{\partial D} h^* f \quad \forall h \in Aut'(V).$$

Preuve:
Pour $h \in Aut'(V)$, notons $\widetilde{h}$ l'endomorphisme de $V \times V$ défini par $\widetilde{h}(z,\xi) = (h(z),h(\xi))$. Il est trivial que la remarque 3.1 s'applique aux sections $\rho(z,\xi) = \sigma(z,\xi)$ et $\rho'(z,\xi) = \xi$. D'après la formule (8), elle est également applicable pour $\rho = \eta$ et $\rho' = \xi$; on obtient ainsi $\widetilde{h}^*\Omega = \Omega$ et $\widetilde{h}^*\underline{\Omega} = \underline{\Omega}$. Il suffit donc, d'effectuer dans les intégrales définissant $B_D h^* f$ et $R^{\omega}_{\partial D} h^* f$ le changement de variable $h(\xi) = \tau$ pour retrouver $h^* B_D f$ et $h^* R^{\omega}_{\partial D} f$.

Théorème 3.1. *Etant donnée une $(0,q)$ forme $(q = 1,...,n)$ f continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$ on a:*

$$f = T\overline{\partial}f + \overline{\partial}Tf.$$

En particulier, pour $q = 1, ..., n$ *et si* $\overline{\partial}f = 0$, Tf *est solution de l'équation* $\overline{\partial}u = f$. *De plus, cet opérateur de résolution* T *vérifie:*

$$Th^*f = h^*Tf \quad \forall h \in Aut'(V).$$

Enfin, il existe $C > 0$ *tel que*

$$\sup_{z\in D} \mid Tf(z)\delta(z,\partial D)^{r(n-1)} \mid \leq C \sup_{z\in D} \mid f(z) \mid .$$

Preuve:
Du moment que l'on a construit ci-dessus une section de Leray holomorphe en z et que la formule de Stokes est applicable, il suffit de reprendre mutadis mutandis les paragraphes [1.6]-[1.12] de [3] pour avoir la formule de représentation intégrale annoncée.
La propriété d'invariance de T résulte directement du lemme 3.1.
Pour l'estimation de croissance au bord, toujours suivant [3], on n'a besoin de l'établir que pour l'opérateur $R^{\omega}_{\partial D}$. Or d'après les calculs effectués dans le paragraphe [2.2] de [3], les coefficients de $R^{\omega}_{\partial D}f$ sont des combinaisons linéaires d' intégrales de la forme:

$$E(z) = \int_{\xi\in\partial D} \frac{f_I(\xi)\Gamma(z,\xi)}{N(z,\xi)^{n-s-1} \left\langle z-\xi \mid z-\xi \right\rangle^{(s+1)}} \underset{m\neq j}{\Lambda} d\overline{\xi}^m \underset{1\leq k\leq n}{\Lambda} d\xi^k$$

où $0 \leq s \leq n-2,\ 1 \leq m \leq n,\ f_I$ est un coefficient de f et Γ une expression ne dépendant que de la section ω et vérifiant une inégalité du type

$$\mid \Gamma(z,\xi) \mid \leq C \mid z-\xi \mid \ \ \forall z \in D,\ \forall \xi \in D.$$

Appliquons le lemme 2.2, il vient:

$$\delta(z,\partial D)^{r(n-1)} \mid E(z) \mid \leq C \sup_{z\in D} \mid f(z) \mid \int_{\xi\in\partial D} \mid z-\xi \mid^{-(2n-3)} \qquad \forall z \in D.$$

Mais par la formule de Stokes, cette dernière intégrale se majore par $\int\limits_{\xi\in D} \mid z-\xi \mid^{-(2n-2)}$ qui est bornée en z.

4. La formule de Cauchy-Leray.

Appliquons l'identité (7) pour $u = z,\ v = \xi,\ t = \xi$, puis pour $u = z,\ v = \xi$, $t = z$, il vient:

$$N(z,\xi) = N(\xi,\xi) + (\alpha(z,\xi,\xi), \xi - z) \ ; \ N(z,z) = N(\xi,z) + (\alpha(z,\xi,z), \xi - z).$$

On aura alors $L(z,\xi) = (s(\xi,z), \xi - z)$ avec

$$s(\xi,z) = N(\xi,z)\alpha(z,\xi,\xi) - N(\xi,\xi)\alpha(z,\xi,z).$$

Il est évident que $s(z,z) = 0$ et donc il existe $C > 0$ tel que:

$$| \, s(\xi,z) \, | \leq C \mid \xi - z \mid \ \ \forall z, \ \xi \in \overline{D}. \tag{9}$$

Sur l'ouvert $\{ \ L(z,\xi) \neq 0\}$, considérons la forme différentielle:

$$K(\xi,z) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{j+1} \frac{s^j(\xi,z)}{(s(\xi,z), \xi - z)^n} \underset{m \neq j}{\Lambda} ds^m \underset{1 \leq k \leq n}{\Lambda} (d\xi^k - dz^k).$$

C'est l'image réciproque de μ par l'application qui à (z,ξ) associe $(s(\xi,z), \xi - z)$; elle est donc fermée. Pour $1 \leq q \leq n$, on note K^q la composante de bidegré $(n, n-q)$ en ξ et de bidegré $(0, q-1)$ en z.

Lemme 4.1. *Soit des $STJHP$ simples V_i, de boule unité Δ_i pour $i = 1,...,m$, $V = \oplus \ V_i$ et D la boule unité de V. Notons $Aut'(D) = \{\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m); \ \varphi_i \in Aut(\Delta_i) \ \forall i = 1,...,m.\}$. Pour un point z de D et φ dans $Aut'(D)$ telle $\varphi(0) = z$, on a*

$$L(z,\xi) = \mid N(z,\xi) \mid^2 \, L(0, \varphi^{-1}(\xi)) \ \ \forall \xi \in D.$$

Preuve:
Il s'agit d'appliquer plusieurs fois la formule (3) à chacun des systèmes simples V_i.

Lemme 4.2. *i) On a l'inégalité*

$$L(0,\tau) \geq \mid \tau \mid^2 \ \ \forall \tau \in D.$$

ii) Pour tout point $z \in D$, il existe $C_z > 0$ et un voisinage U_z tels que:

$$L(z,\xi) \geq C_z \mid z - \xi \mid^2 \ \ \forall \xi \in U_z.$$

Preuve:
i) Par la formule (4) on a $L(0,\tau) = 1 - N(\tau,\tau)$ pour tout τ dans D. Or, la décomposition spectrale d'un point $\tau \in D$ s'écrit $\tau = \lambda^1 e_1 + ... + \lambda^r e_r$ où les e_i constituent un repère et $\mid \tau \mid = \sup \ \lambda^i$; d'après l'identité (5) on aura $N(\tau,\tau) \leq 1 - \mid \tau \mid^2$ ce qui suffit.
ii) Soit $z \in D$, puisque $Aut'(D)$ opère transitivement sur D, choisissons $\varphi \in Aut'(D)$ tel que $\varphi(0) = z$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe

un voisinage W de z et une constante $C > 0$ tels que $\mid \varphi^{-1}(\xi) \mid \geq C \mid z-\xi \mid$ pour tout ξ dans W. On conclut alors en utilisant le lemme 4.1 et le point i).

Ainsi, pour $z \in D$ fixé et tenant compte de l'inégalité (9), la fonction $s(\xi,z)/L(z,\xi)^n$ est intégrable sur D. On peut donc définir pour toute forme différentelle u de type $(0,q-1)$, $(2 \leq q \leq n+1)$, la $(0,q-2)$ forme:

$$\overline{T}u(z) = (-1)^q \int\limits_{\xi \in D} u(\xi) \Lambda K^{q-1}(\xi,z).$$

Lemme 4.3. *i)* $\overline{\partial}_\xi K^1(\xi,z) = 0$ *et pour* $q \geq 2$, *on a* $\overline{\partial}_\xi K^q(\xi,z) = -\overline{\partial}_z K^{q-1}(\xi,z)$.
ii) Pour $q \geq 2$, *on a* $K^q(\xi,z) = 0$ *lorsque* $z \in D$ *et* $\xi \in \partial D$.

Preuve:
i) Provient du fait que la forme différentielle K est fermée.
ii) En reprenant l'expression de K, on constate que K^q provient de la somme:

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{j+1} \frac{s^j(\xi,z)}{(s(\xi,z),\xi-z)^n} \underset{m \neq j}{\Lambda} \overline{\partial} s^m \underset{1 \leq k \leq n}{\Lambda} d\xi^k.$$

D'autre part, un calcul direct donne:

$$\overline{\partial}_z s^i(\xi,z) \Lambda \overline{\partial}_z s^j(\xi,z) = 0 \ \ \forall z \in D, \ \xi \in \partial D \ \ et \ \ 1 \leq i,j \leq n.$$

Ceci assure le lemme pour $q \geq 3$. Pour $q = 2$, on constate après calcul que K^2 est multiple de

$$\sum_{i \prec j} (-1)^{j+i} (s^i \overline{\partial}_z s^j - s^j \overline{\partial}_z s^i) \underset{k \neq i,j}{\Lambda} \overline{\partial}_\xi s^k$$

et on vérifie que sur $\{z \in D, \ \xi \in \partial D\}$, on a $s^i \overline{\partial}_z s^j - s^j \overline{\partial}_z s^i = 0 \ \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n$.

Lemme 4.4. *Il existe* $C > 0$ *telle que*:

$$\mid \varphi(\tau) - \varphi(0) \mid \leq C \mid \tau \mid \ \ \forall \varphi \in Aut(D), \ \forall \tau \in D$$

Preuve:
Comme D est la boule unité, on a $\mid \varphi(\tau) \mid \leq 1$ pour tout τ dans D et φ dans $Aut(D)$. D'après la formule de Cauchy pour les polydisques, il existe $C > 0$ telle que:

$$\sup_{\varphi \in Aut(D), \ |\tau| \leq \frac{1}{2}} \mid D_\tau \varphi \mid \leq C.$$

Le théorème des accroissements finis donne alors le lemme sur $\{\mid \tau \mid \leq \frac{1}{2}\}$. Sur le complémentaire $\{\mid \tau \mid \geq \frac{1}{2}\}$ l'inégalité à établir est triviale.

Théorème 4.1. *Soit pour* $1 \leq q \leq n+1$ *une* $(0, q-1)$ *forme* u *continue sur* $\overline{D}$ *telle que* $\overline{\partial} u$ *soit aussi continue sur* $\overline{D}$, *alors:*
i) si $q \geq 2$, *on a* $u = (-1)^q \overline{T}\,\overline{\partial} u + \overline{\partial}_z \overline{T} u$.
ii) pour $q = 1$, *on a* $u(z) = \int\limits_{\xi \in \partial D} u(\xi) K^1(z, \xi) \;-\; \overline{T}\,\overline{\partial} u(z) \quad \forall z \in D$.
iii) $\overline{T}(h^* u) = h^*(\overline{T} u) \quad \forall h \in Aut'(V)$.
iv) On suppose $V = \bigoplus\limits_{1 \leq i \leq m} V_i$ *et pour tout* i, *soit* k_i, g_i, r_i, δ_i, Δ_i *les noyaux de Bergman, genres, rangs, distances spectrales et boules unité de chacun des STJHP simples* V_i. *Posons* $N(i) = r_i(2n - g_i)$; *alors il existe* $C > 0$ *telle que:*

$$\sup_{(z_1, \ldots, z_m) \in D} \prod_{1 \leq i \leq m} \delta_i(z_i, \partial \Delta_i)^{N(i)} \mid \overline{T} u(z_1, \ldots, z_m) \mid \leq C \sup_{z \in D} \mid u(z) \mid .$$

Preuve:
Grace au lemme 4.3, on peut reprendre le raisonnement du paragraphe 1 de[1] et obtenir ainsi les points i) et ii).
iii) Par ailleurs la formule (8) assure que la remarque 3.1 est applicable pour les sections $\rho = s$ *et* $\rho'(z, \xi) = \xi - z$; on aura ainsi $\widetilde{h}^* K = K$ pour tout h dans $Aut'(V)$ et après le changement de variables $\xi' = h(\xi)$ dans l'intégrale qui définit $\overline{T}(h^* u)$, on retrouve $h^* \overline{(T u)}$.
iv) Les coefficients de $\overline{T} u(z)$sont des combinaisons linéaires d'intégrales de la forme:

$$F(z) = \int\limits_{\xi \in D} \frac{R_I(z, \xi) u_I(\xi) s^j(\xi, z)}{L(z, \xi)^n}$$

où u_I est un coefficient de u, R_I un polynome et $j = 1, \ldots, n$. Soit $\varphi \in Aut'(D)$ telle que $\varphi(0) = z$; on aura à l'aide du lemme 4.1 et du i) du lemme 4.2 l'inégalité:

$$\mid \overline{T} u(z) \mid \leq C \sup_{t \in D} \mid u(t) \mid \int\limits_{\xi \in D} \frac{\mid s(\xi, z) \mid}{\mid \varphi^{-1}(\xi) \mid^{2n} \mid N(z, \xi) \mid^{2n}}$$

Effectuons le changement de variable $\xi = \varphi(\tau)$ puis utilisons le lemme 4.4 et la formule (9), cette intégrale sera majorée par:

$$\int\limits_{\tau \in D} \mid J\varphi(\tau) \mid^2 \mid \tau \mid^{1-2n} \mid N(z, \varphi(\tau) \mid^{-2n} .$$

Mais la formule (3) donne:

$$\mid J\varphi_i(\tau_i) \mid^2 = k_i(0,0) k_i(z_i, z_i) \mid k_i(z_i, \varphi_i(\tau_i)) \mid^{-2}$$

et on conclut alors en appliquant le lemme 2.2 à chaque V_i.

References

[1] P. Charpentier, *Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\overline{\partial} u = f$ dans la boule et le polydisque de C^n.* Ann. Inst. Fourier 30, 4 (1980), 121-154.

[2] M. S. Hachaichi, *Formules de représentation intégrale des formes différentielles et application à la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann dans le disque généralisé de $M_n(C)$.* Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.T.H.B. Alger (1998).

[3] G. M. Henkin, J. Leiterer, *Theory of functions on complex manifolds.* Birkhauser-Verlag. Basel-Boston-Stuttgart (1984).

[4] O. Loos, *Jordan pairs.* Lect. Notes in Math. Vol 460 (1975).

[5] O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs.* Univ. of California at Irvine (1977).

[6] G. Roos, *La géométrie des domaines hermitiens symétriques et les systèmes triples de Jordan.* Univ. de Poitiers, dpt de Math. Prépublication n°18 (1985).

[7] G. Roos, *Fonctions de plusieurs variables complexes et formules de représentation intégrale.* Thèse de Doctorat d'Etat. Paris VII (1983).

[8] L. Schwartz, *Cours d'analyse.* Hermann. Paris (1967).

Atallah Affane
Institut de Mathématiques
U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia
Bab Ezzouar
Algiers, Algeria.
atallahaffane@hotmail.com