Théorie d'Iwasawa et Loi Explicite de Réciprocité

Un Remake d'un Article de P. Colmez

Bernadette Perrin-Riou

Received: October 1, 1998
Revised: May 12, 1999

Communicated by Peter Schneider

Abstract. Let V be a crystalline p-adic representation of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$. The author has built the Iwasawa theory of such a representation in Invent. Math (1994) and conjectured a reciprocity law which has been proved by P. Colmez. In this text, we write the initial construction with simplification and the proof of P. Colmez in a different language. This point of view will allow us to study the universal norms in the geometric cohomology classes associated to V by Bloch and Kato in a forthcoming article.

1991 Mathematics Subject Classification: 11E95 11R23
Keywords and Phrases: p-adic representation, Iwasawa theory, exponential, reciprocity law

La loi explicite de réciprocité classique sur un corps local remonte à Artin-Hasse et Iwasawa et donne une description du symbole de Hilbert. Elle a été généralisée à des modules de Lubin-Tate, citons Wiles, Kolyvagin, Vostokov, Brückner, Coleman, Sen, de Shalit, Fesenko. On renvoie à [3] pour un historique. Le développement de ces lois s'est fait en parallèle et en liaison avec le développement de la théorie d'Iwasawa locale ; dans le cas classique, il s'agit de l'étude du comportement des unités locales sur la $\mathbb{Z}_p^\times$-extension cyclotomique K_∞ à l'aide de l'application exponentielle (Iwasawa, Coates-Wiles, Coleman). On peut envisager des généralisations de la loi de réciprocité à des représentations cristallines quelconques. Dans [4], nous avons donné une généralisation de cette étude des unités locales à des représentations cristallines V du groupe de Galois de $\mathbb{Q}_p$ générales : les unités locales sont remplacées par la limite projective $Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$ des groupes de cohomologie galoisiennes $H^1(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}), T)$ et on construit une application "exponentielle" Ω_V d'un $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-module libre $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{D}_p(V)$

dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]} Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$ où $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ est l'algèbre d'Iwasawa de $G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty, \mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{H}(G_\infty)$ une algèbre de "séries formelles" avec condition de croissance, contenant $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ et $\mathbf{D}_p(V)$ le module de Fontaine associé à V. On a alors conjecturé dans ce cadre une loi explicite de réciprocité. On peut en donner deux formulations : la première (appelée $\mathrm{Réc}(V)$) dit essentiellement que pour les dualités naturelles, Ω_V et $\Omega_{V^*(1)}$ sont adjoints (ici $V^*(1)$ est le dual de Tate de V). La deuxième formulation ([6]) plus proche de la formulation traditionnelle calcule à un niveau fini (c'est-à-dire sur le corps $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$) l'application duale de l'exponentielle sur $\Omega_{V(k)}(g)$ en termes de g pour des twists à la Tate $V(k)$ convenables de V. Il n'est pas difficile de voir que les deux formulations sont équivalentes.

Cette loi vient d'être montrée par P. Colmez ([1]) et indépendemment par Kato, Kurihara, Tsuji. Plus récemment, D. Benois en a aussi donné une démonstration en utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine.

Nous reprenons dans ce texte la démonstration de Colmez de la loi explicite de réciprocité pour une représentation cristalline (ou un tout petit peu plus généralement pour la partie cristalline de son module filtré). La présentation est très légèrement différente : outre que nous n'utilisons pas le langage des distributions, nous commençons par démontrer la loi explicite de réciprocité puis nous voyons la construction (un peu modifiée) de son application $\mathrm{Log}_V^{(h)}$ (dans le cas où V est cristalline) comme une conséquence de cette loi, ce qui permet d'utiliser des arguments sur l'anneau B_{cris} moins subtils que les siens. Cependant, comme il a été souligné, nous ne regardons ici que la partie cristalline du module filtré associé à V, ce qui nous permet de travailler uniquement avec des fonctions analytiques. Dans [1], il est fait plus mais cette généralisation très importante est encore mal comprise (par moi en tout cas) : il semble en effet qu'il faille abandonner l'idée de raisonner avec de bonnes vieilles fonctions (ou distributions sur $\mathbb{Z}_p$). La justification de ce texte est peut-être qu'avant de sauter ce pas, nous voulions faire le point sur le cas cristallin, dans le langage "usuel". La démonstration de Colmez est alors extrêmement simple et naturelle : donnons-en les ingrédients. Si u est un générateur topologique de $1+p\mathbb{Z}_p$, il s'agit de calculer la valeur d'une fonction analytique f sur le disque unité de $\mathbb{C}_p$ en u^k-1, la fonction f étant obtenue par interpolation de nombres en h familles de points de la forme $\zeta u^j - 1$ pour ζ racine de l'unité d'ordre une puissance de p et $0 \leq j < h$; bien sûr k est différent de ces j. Il y a pour cela une formule générale qui exprime $f(u^k-1)$ comme une limite de combinaisons linéaires des $f(\zeta u^j - 1)$. Plus précisément, on a par exemple

$$\frac{(-1)^h(h-1)!}{k(k-1)\dots(k-h+1)} \frac{f(u^k-1)}{\log u} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{h-1} (-1)^i \frac{p^n}{1-u^{(k-i)p^n}} \binom{h-1}{i} R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)$$

où $R_{n,i}(f)$ est le polynôme de degré $< p^n$ tel que

$$f \equiv R_{n,i}(f)(u^{-i}(1+T)-1) \mod u^{-ip^n}(1+T)^{p^n}-1 \; .$$

Maintenant, si Γ est le groupe de Galois de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p)$ de générateur topologique γ et si $u = \chi(\gamma)$ avec χ le caractère cyclotomique, par définition de la fonction f dont on veut calculer la valeur en u^k-1, $R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)$ est relié à la valeur en $\gamma_n = \gamma^{p^{n-1}}$ d'un cocycle de Γ_n à valeurs dans V : ce cocycle devient un cobord $(\gamma_n-1)c_n$ lorsqu'on étend les scalaires à $B_{\mathrm{cris}}^{G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}}$. On relie ainsi $\frac{R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)}{1-u^{(k-i)p^n}} = \chi^k(\frac{R_{n,i}(f)(u^{-i}\gamma-1)}{1-u^{-i}\gamma_n^k})$ à l'image de c_n dans $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ par l'application $\lambda_{k,n} : B_{\mathrm{dR}}^{G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}} \to B_{\mathrm{dR}}/(\chi^{-k}(\gamma_n)\gamma_n-1) \to \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ (application de Tate). On peut relier ce dernier élément à l'application exponentielle duale grâce à une formule due à Kato.

Nous avons ensuite donné quelques conséquences de cette loi. Certaines sont déjà dans des articles antérieurs ([4], [7]). D'autres sont plus nouvelles.
Dans les §1 et 2, nous faisons quelques préliminaires et rappels : théorie d'Iwasawa locale, lemme fondamental d'interpolation des fonctions analytiques, résolution d'équations du type $(1-\varphi)G = g$. Dans le §3, nous reprenons complètement la construction de l'application exponentielle $\Omega_{V,h}$ faite dans [4] en tenant compte des points de $H^1_f(K_n, V)$. Nous donnons dans le §4 la démonstration due à Colmez de la loi explicite de récipocité. Dans le §5, se trouvent des conséquences de cette loi explicite (anciennement conjecture Réc(V)) et des calculs sur les valeurs spéciales de l'application logarithme que l'on peut en grande partie déjà trouvés dans [4], [5] et [7]. On espère ainsi donner un panorama complet des formules que l'on a à sa disposition. Ces formules sont très utiles dans la théorie des fonctions L p-adiques comme cela a déjà beaucoup exploité dans [5] et [4]. Dans l'appendice A, on donne quelques formules relatives au lemme de Shapiro, aux opérations de twist et de projections puis reliant différentes manières de voir les fonctions analytiques. Dans l'appendice B, on démontre la formule exprimant la valeur de $f(u^k-1)$ en termes des valeurs aux points d'interpolation pour une fonction analytique f d'ordre fini. Dans l'appendice C, on reprend la suite exacte de Coleman-Colmez en modifiant légèrement la présentation de Colmez.

Errata. Une erreur dans [4] m'a été signalée par J. Nekovář. La plupart des résultats ne sont valables que lorsque H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, car on utilise à divers endroits l'accouplement local de dualité. Ainsi, il n'y a en particulier pas de résultats nouveaux sur les représentations p-adiques ordinaires sur un corps local dont le corps résiduel n'est pas fini dans [4].

TABLE DES MATIÈRES

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. On pose $K = \mathbb{Q}_p$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ pour toute extension algébrique L de K (supposée contenue dans $\overline{K}$). On pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ où μ_{p^n} est le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité. On fixe dans tout le texte un système ϵ de racines de l'unité ζ_n d'ordre p^n vérifiant $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$. On note G_n le groupe de Galois de K_n/K pour $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. On note χ le caractère cyclotomique $G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$. On désigne par γ un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_1)$ et on pose $\gamma_n = \gamma^{p^{n-1}}$ pour $n \geq 1$, c'est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$. On pose $\Delta = \mathrm{Gal}(K(\mu_p)/K) = \mathrm{Gal}(K_1/K)$. Tous les groupes de cohomologie galoisienne considérés sont les groupes de cohomologie continue.

1.2. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre des séries formelles en une variable convergeant sur le disque unité $\{x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x| < 1\}$ où $\mathbb{C}_p$ est le complété p-adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Si ρ est un réel inférieur à 1, on note $||f||_\rho = \sup_{|x|=\rho} |f(x)| = \sup_{|x|\leq\rho} |f(x)|$.
On pose $\rho_n = p^{-\frac{1}{p^n(p-1)}}$. Il est commode d'introduire $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{r^-\text{pour } r \in \mathbb{R}\}$ avec l'ordre total : si $r_1 < r_2$, alors $r_1 < r_2^- < r_2$. Pour $r \in \mathbb{R}^-$, on note $\lfloor r\rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à r. Si r est entier, on a donc $\lfloor r^-\rfloor = r-1$. Si $r \in \bar{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{H}_r$ le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ formé des séries F telles que la suite $\frac{||F||_{\rho_n}}{p^{nr}}$ est bornée si $r \in \mathbb{R}$ et tend vers 0 si $r \in \mathbb{R}^-$. On dit que F est tempérée d'ordre $\leq r$. Si $r_1 < r_2$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, on a $\mathcal{H}_{r_1} \subset \mathcal{H}_{r_2}$. Plus précisément, si F appartient à $\mathcal{H}_r$, la suite $\frac{||F||_{\rho_n}}{p^{nr'}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour tout $r' < r$. On note $\mathcal{H}_\infty$ la réunion des $\mathcal{H}_r$. Si $g \in \mathcal{H}_\infty$, on note $\mathfrak{o}(g)$ (resp. $\mathfrak{O}(g)$) la borne inférieure des $r \in \mathbb{R}$ tel que $g \in \mathcal{H}_{r^-}$ (resp. le plus petit réel r tel que $g \in \mathcal{H}_r$ s'il existe). Pour $r \in \bar{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$, on note $\mathcal{H}_r(\Gamma)$ les éléments de $\mathbb{Q}_p[[\Gamma]]$ de la forme $f(\gamma-1)$ avec $f \in \mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_r(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K(\mu_p)/K)] \otimes \mathcal{H}_r(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(G_\infty)$ la réunion des $\mathcal{H}_r(G_\infty)$.
On munit $\mathcal{H}_r$ de la norme C_r définie par $C_r(F) = \sup_n \frac{||F||_{\rho_n}}{p^{nr}}$ et $\mathcal{H}_r(G_\infty)$ de la norme qui s'en déduit.

1.3. Si $g \in \mathbb{Q}_p[[T]]$, on pose $D(g) = (1+T)\frac{d}{dT}g$. On pose $\varphi(g) = g((1+T)^p - 1)$ et on note ψ l'opérateur de $\mathbb{Q}_p[[T]]$ tel que $\varphi \circ \psi(g) = p^{-1}\sum_{\zeta \in \mu_p} f(\zeta(1+T)-1)$. On peut aussi voir $p\psi$ comme la trace de l'extension $\mathbb{Q}_p[[T]]/\varphi\mathbb{Q}_p[[T]]$.
Il est important de rappeler qu'on dispose d'un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels normés entre $\mathcal{H}_r^{\Psi=0}$ et $\mathcal{H}_r(G_\infty)$. Si $\tau \in G_\infty$, on pose $\tau.(1+T) = (1+T)^{\chi(\tau)}$ et on prolonge cette action à Λ par continuité. Pour la prolonger à $\mathcal{H}_r(G_\infty)$, on montre que si $f_{n,r}$ est le polynôme d'approximation de f modulo $\prod_{i=0}^{\lfloor r \rfloor)}(\chi^{-i}(\gamma_n)\gamma_n - 1)$, la suite $f_{n,r}.(1+T)$ converge dans $\mathcal{H}_r$ et ne dépend pas des choix ; c'est par définition $f.(1+T)$. L'opérateur D sur $\mathcal{H}_r^{\Psi=0}$ correspond sur $\mathcal{H}_r(G_\infty)$ à l'opération de twist $\tau \mapsto \chi(\tau)\tau$ et est un isomorphisme topologique de $\mathcal{H}_r^{\Psi=0}$.

Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme fixée. On définit alors naturellement $||f||_\rho$ pour $f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$.

1.4. Définition : Soit u un automorphisme de $\mathcal{D}$. On dit qu'un élément $F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ est u-borné (resp. u^--borné) si la suite $||(1 \otimes u)^{-n}F||_{\rho_n}$ est bornée (resp. tend vers 0) lorsque n tend vers l'infini.

On note $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon}$ l'espace vectoriel des éléments u^ϵ-bornés (il est contenu dans $\mathcal{H}_\infty \otimes \mathcal{D}$) et on pose alors $C_u(F) = \sup_n(||(1 \otimes u)^{-n}F||_{\rho_n})$.

Remarques : 1) Prenons $\mathcal{D} = \mathbb{Q}_p$ et pour $u = p^{-r}I$ la multiplication par p^{-r}. Alors, si $r \geq 0$, $\mathcal{H}_{p^{-r}I^\epsilon} = \mathcal{H}_{r^\epsilon}$; si $r < 0$, $\mathcal{H}_{p^{-r}I^\epsilon} = 0$. Ainsi, on a $C_{p^{-r}I} = C_r$ pour $r \geq 0$.
2) Supposons la suite d'opérateurs $p^{-nr}u^{-n}$ de $\mathcal{D}$ bornée. Alors, $\mathcal{H}_{r^\epsilon} \otimes \mathcal{D}$ est contenu dans $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon}$. On a en effet alors

$$||(1 \otimes u)^{-n}F||_{\rho_n} \leq c_n \frac{||F||_{\rho_n}}{p^{nr}}$$

avec c_n bornée. Si l'on pose $||v||_r = \sup ||p^{-nr}v^n||$ pour un endomorphisme v de $\mathcal{D}$ lorsque cela existe (r peut être négatif), on obtient plus précisément

$$C_u(F) \leq ||u^{-1}||_r C_r(F) \ .$$

3) Supposons la suite $p^{ns}u^n$ bornée. Alors, $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon}$ est contenu dans $\mathcal{H}_{s^\epsilon} \otimes \mathcal{D}$. En particulier, si $s < 0$, $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon} = 0$. En effet, en écrivant $F = (1 \otimes u^n)(1 \otimes u^{-n})F$, on a

$$\frac{||F||_{\rho_n}}{p^{ns}} \leq c'_n ||(1 \otimes u)^{-n}F||_{\rho_n}$$

avec c'_n bornée et on obtient plus précisément

$$C_s(F) \leq ||u||_{-s} C_u(F) \ .$$

4) Si g est un élément de $(\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon}$, alors $D^k(g)$ est aussi u^ϵ-borné et on a $C_u(D^k(g)) = C_u(g)$.
5) Si $r \leq s$, on a

$$(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{p^{-r}u^\epsilon} \subset (\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{p^{-s}u^\epsilon} \ .$$

6) S'il existe un réel s tel que $g \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ soit $p^{-s}u^{-}$ bornée, on note $\mathfrak{o}_u(g)$ (resp. $\mathfrak{O}_u(g)$) la borne inférieure des $r \in \mathbb{R}$ tel que $g \in \mathcal{H}_{p^{-r}u^{-}}$ (resp. le plus petit des r tels que $g \in \mathcal{H}_{p^{-r}u}$ s'il existe). Ainsi, $\mathfrak{o}_u(g) < r$ si et seulement si la suite $||p^{rn}u^{-n}g||_{\rho_n}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Si $\mathfrak{O}_u(g)$ existe, on a $\mathfrak{O}_u(g) = \mathfrak{o}_u(g)$.

1.5. Soit V une représentation p-adique continue de G_K de dimension finie. Si T est un réseau de V stable par G_K, on note $Z^1_\infty(K,T)$ la limite projective des $H^1(K_n,T)$ pour les applications de corestriction (encore appelées trace) et $Z^1_\infty(K,V) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_\infty(K,T)$. On note $\tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ le quotient du Λ-module $Z^1_\infty(K,T)$ par son sous-Λ-module de torsion et $\tilde{Z}^1_\infty(K,V) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{Z}^1_\infty(K,T)$. Rappelons que ce sous-$\Lambda$-module de torsion est la limite projective des $H^1(K_\infty/K_n, T^{G_{K_\infty}})$ et est isomorphe à $T^{G_{K_\infty}}$ une fois choisi un générateur de G_∞. Le lemme de Shapiro implique que $Z^1_\infty(K,T) = H^1(K, \Lambda \otimes T)$ ([1, II.1], il s'agit ici de cohohomologie continue). Grâce à la suite exacte inflation-restriction, les applications de restriction induisent l'isomorphisme canonique

$$\tilde{Z}^1_\infty(K,T) \cong H^1(K_\infty, \Lambda \otimes T)^\Gamma$$

et en tensorisant par $\mathbb{Q}_p$ l'isomorphisme canonique

$$\tilde{Z}^1_\infty(K,V) \cong H^1(K_\infty, \Lambda \otimes V)^\Gamma \ .$$

1.6. Si k est un entier, on note $V(k)$ la représentation p-adique V avec la nouvelle action de G_K donnée pour $\tau \in G_K$ par $v \mapsto \chi(\tau)^k \tau v$. On a alors un opérateur de twist $Tw^k : Z^1_\infty(K,T) \to Z^1_\infty(K,T(k))$ induit par l'identité, l'action de Galois étant modifiée : $\tau(Tw^k(x)) = \chi(\tau)^k Tw^k(\tau x)$. Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, le composé des opérateurs de twists et de la projection canonique de $Z^1_\infty(K,T(k)) \to H^1(K_n,T(k))$ induisent des applications

$$\begin{aligned} \pi_{n,k} : Z^1_\infty(K,V) &\to H^1(K_n,V(k)) \\ \tilde{\pi}_{n,k} : \tilde{Z}^1_\infty(K,V) &\to H^1(K_n,V(k))/H^1(G_n,V(k)^{G_{K_\infty}}) \overset{res_\infty}{\cong} H^1(K_\infty,V(k))^{\Gamma_n} \end{aligned}$$

où res_∞ est la restriction de $H^1(K_n,V(k))$ dans $H^1(K_\infty,V(k))^{\Gamma_n}$. On démontre comme dans [4, 3.4.3] que si V est de de Rham, l'action de G_∞ sur $V^{G_{K_\infty}}$ est semi-simple et que $V^{G_{K_\infty}} = \oplus V(-j)^{G_K}(j)$. En particulier, on en déduit que $V^{G_{K_n}} = V^{G_K}$ pour tout entier n et que $V^*(1)^{G_{K_n}} = V^*(1)^{G_K}$. En utilisant la dualité locale et le fait que G_∞ est de dimension cohomologique 1, il n'est pas difficile de démontrer que l'image de $Z^1_\infty(K,T)$ dans $H^1(K_n,T(k))$ est d'indice borné par rapport à n dès que $V(k)^*(1)^{G_K}$ est nul (voir par exemple [4, 3.2.1]). Lorsque $V^*(1)^{G_K}$ est non nul, l'application

$$Z^1_\infty(K,T)_{\Gamma_n} \to H^1(K_n,T)$$

n'est pas surjective, le conoyau est isomorphe à $H^1(\Gamma_n, (V^*(1)/T^*(1))^{G_{K_\infty}})\hat{}$. L'image de $Z^1_\infty(K,T)_{\Gamma_n}$ est par contre d'indice fini borné dans l'intersection de

$H^1(K_n, T)$ et de l'image Y_n de $\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_\infty(K,T)_{\Gamma_n}$. Un élément de $H^1(K_n, V)$ est dans Y_n si et seulement si son image dans

$$H^1(\Gamma_n, V^*(1)^{G_{K_\infty}})^* = (V^*(1)^{G_{K_\infty}}/(\gamma_n - 1))^* \cong (V^*(1)^{G_{K_n}})^* \cong (V^*(1)^{G_K})^*$$

est nulle, l'application $H^1(K_n, V) \to H^1(\Gamma_n, V^*(1)^{G_{K_\infty}})^*$ provenant de la dualité locale. Nous dirons que $x \in H^1(K_n, V)$ est admissible s'il appartient à l'image de $\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_\infty(K,T)_{\Gamma_n}$. Ce qui précède montre que x est admissible si et seulement si sa trace à K l'est.

1.7. Les applications $\pi_{n,k}$ se prolongent en des applications que l'on note de la même manière :

$$\pi_{n,k} : \mathcal{H}_r(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda} Z^1_\infty(K,V) \to H^1(K_n, V(k))$$

ou

$$\begin{aligned}\pi_{n,k} : \mathcal{H}_r(G_\infty) \otimes_\Lambda \tilde{Z}^1_\infty(K,V) \to & H^1(K_n, V(k))/H^1(\Gamma_n, V(k)^{G_{K_\infty}}) \\ & = H^1(K_\infty, V(k))^{\Gamma_n}\end{aligned}$$

pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout entier relatif k. Nous verrons souvent $H^1(K_\infty, V(k))^{\Gamma_n}$ comme contenu dans $H^1(K_\infty, V)$. On note $*_k$ l'action twistée : $\tau *_k m = \chi(\tau)^k \tau m$.
Nous allons donner un critère pour qu'une famille de points de $H^1(K_n, V(k))$ soit dans l'image de $\mathcal{H}_r(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda} Z^1_\infty(K,V)$ (interpolation de familles de points).

1.8. Proposition. *Soit $s \in \overline{\mathbb{R}}$ et h un entier $> s$. Soit $P_{n,k}$ une famille d'éléments admissibles de $H^1(K_n, V(k))$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \dots h-1$ telle que*

(i) *$Tr_{n+1,n}(P_{n+1,k}) = P_{n,k}$;*
(ii) *les suites $p^{\lfloor n(s-j) \rfloor} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} res_\infty P_{n,k}$ convergent vers 0 dans $H^1(K_\infty, V)$ pour tout $0 \leq j \leq h-1$.*

Alors, il existe un unique élément z de $\mathcal{H}_{s^-}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ tel que $\tilde{\pi}_{n,k}(z) = \tilde{P}_{n,k}$.

Démonstration. On commence par remplacer G_∞ par Γ (on a $\mathcal{H}_{s^-}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T) = \mathcal{H}_{s^-}(\Gamma) \otimes \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes Z^1_\infty(K,T)$). Il existe un système libre $X_1, \cdots, X_d$ du Λ_Γ-module $Z^1_\infty(K,T)$ tels que pour tout entier k compris entre 0 et $h-1$, les éléments $\tilde{\pi}_{n,k}(X_i)$ de $res_\infty H^1(K_n, T(k)) = H^1(K_\infty, T(k))^{\Gamma_n} \subset H^1(K_\infty, T)$ en forment un système libre (modulo torsion) engendrant un $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module d'indice borné c par rapport à n dans le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des éléments admissibles de $H^1(K_\infty, T(k))^{\Gamma_n}$. On écrit alors les points $res_\infty(P_{n,k})$ dans cette base :

$$res_\infty(P_{n,k}) = \sum_{i=1}^{d} b^{(i)}_{n,k} *_k \tilde{\pi}_{n,k}(X_i) = \sum_{i=1}^{d} Tw^k b^{(i)}_{n,k} \tilde{\pi}_{n,k}(X_i)$$

avec les $b^{(i)}_{n,k}$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$. On peut écrire $b^{(i)}_{n,k} = R^{(i)}_{n,k}(\gamma - 1)$ avec γ générateur de Γ et $R^{(i)}_{n,k}$ polynôme en T de degré $< p^n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p[\Delta]$. La première condition signifie que par l'application naturelle de $\mathbb{Q}_p[G_{n+1}]$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$, l'image de $b^{(i)}_{n+1,k}$ est $b^{(i)}_{n,k}$ et donc que $R^{(i)}_{n+1,k} \equiv R^{(i)}_{n,k} \mod (1+T)^{p^n}-1$. La deuxième condition signifie que pour tout entier j avec $0 \leq j \leq h-1$ et pour $i = 1, \cdots, d$, les suites $p^{n(s-j)} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} R^{(i)}_{n,k}(\chi(\gamma)^k(1+T)-1)$ tendent vers 0, ce qui est la condition pour qu'il existe un unique élément de $f^{(i)} \in \mathcal{H}_{s^-}$ tel que $f^{(i)}(T) \equiv R^{(i)}_{n,k}(\chi(\gamma)^k(1+T)-1) \mod \chi(\gamma^{p^n})^k\gamma^{p^n}-1$. L'élément $\sum_{i=1}^{d} f^{(i)}(\gamma-1)X_i \in \mathcal{H}_{s^-}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ convient. L'unicité de z vient de l'unicité des $f^{(i)}$. □

Remarques : 1. Une famille d'éléments vérifiant les conditions de la proposition sera dite tempérée d'ordre $< s$. Nous parlerons de congruences pour évoquer les conditions (ii).
2. On peut mettre d'autres types de conditions : par exemple, si s est un entier, une famille de points $P_{n,k}$ pour $n \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, s-1\}$ telle que

(i) $Tr_{n+1,n}(P_{n+1,k}) = P_{n,k}$
(ii) les suites $p^n \sum_{k=0}^{s-1} (-a)^k \binom{s-1}{k} res_\infty P_{n,k}$ convergent vers 0 pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$,

est tempérée d'ordre $< s$. Pour le démontrer, on écrit $(X-1)^j$ pour $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ dans le système libre formé des $(X-a_l)^{s-1}$ pour a_l s points distincts de $\mathbb{Z}_p$ et on en déduit une relation

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} res_\infty P_{n,k} = \sum_{l=0}^{s-1} c_{k,l} \sum_{k=0}^{s-1} (-a_l)^k \binom{s-1}{k} res_\infty P_{n,k} \ .$$

Le résultat s'en déduit.
3. La proposition dit aussi que l'application naturelle

$$\mathcal{H}_{s^-}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,T) \overset{\prod \tilde{\pi}_{n,k}}{\to} \prod_{n, 0 \leq k \leq h-1} H^1(K_\infty, V(k))$$

est injective.

1.9. L'application naturelle de Λ-modules de $Z^1_\infty(K,T)$ dans $H^1(K, \Lambda \otimes T)$ se prolonge en une application δ de $\mathcal{H}_s(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_\infty(K,T)$ dans $H^1(K, \mathcal{H}_s(G_\infty) \otimes T)$. Colmez démontre qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme. Pour cela, on remarque qu'il suffit de montrer que l'homomorphisme $\mathcal{H}_s(G_\infty) \otimes_\Lambda \tilde{Z}^1_\infty(K,T) \to H^1(K_\infty, \mathcal{H}_s(G_\infty) \otimes T)^{G_\infty}$ est un isomorphisme. On a en effet un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & \mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T^{G_{K_\infty}} & \to & \mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,T) & \to \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^1(G_\infty, \mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T^{G_{K_\infty}}) & \to & H^1(K,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T) & \to \\
& & & & \\
& & \to & \mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,T) & \to 0 \\
& & & \downarrow & \\
& & \to & H^1(K_\infty,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T)^{G_\infty} & \to 0
\end{array}$$

Il est facile de vérifier que la première flèche verticale est un isomorphisme. Il ne reste donc plus qu'à montrer que la troisième l'est. On a des applications naturelles de $H^1(K,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T)$ dans $H^1(K_n,V(k))$ pour tout entier $n\geq 1$ et $k\in\mathbb{Z}$ induites par l'homomorphisme $s_{n,k}$ de G_{K_n}-modules $\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes V\to \mathbb{Z}_p[G_n]\otimes V(k)\to V(k)$ donné par $f\mapsto R_{n,k}(f)\equiv Tw^k(f) \mod \gamma^{p^n}-1\mapsto \nu^n_{Id}(R_{n,k}(f))$ où $\nu^n_{Id}(\sum_\tau a_\tau\tau)=a_{Id}$ (cf. l'appendice A.1) et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes_\Lambda \tilde{Z}^1_\infty(K,T) & \xrightarrow{\delta} & H^1(K_\infty,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T)^{G_\infty} \\
\tilde{\pi}\downarrow & & \pi'\downarrow \\
\prod_{n,k} H^1(K_\infty,V(k))^{\Gamma_n} & = & \prod_{n,k} H^1(K_\infty,V(k))^{\Gamma_n}
\end{array}$$

L'image d'un élément de $H^1(K_\infty,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T)^{G_\infty}$ vérifie les conditions de la proposition 1.8, ce qui permet de définir un homomorphisme δ' de Λ-modules de $H^1(K_\infty,\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes T)^{G_\infty}$ dans $\mathcal{H}_s(G_\infty)\otimes_\Lambda\tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ tel que $\pi'(\delta\circ\delta'(x)-x)=0$ et tel que $\tilde{\pi}(\delta'\circ\delta(x)-x)=0$. Comme $\prod_{n,0\leq k\leq h-1}\tilde{\pi}_{n,k}$ est injective, $\delta'\circ\delta(x)=x$. De même, il n'est pas difficile de voir que $\prod_{n,0\leq k\leq h-1}\pi'_{n,k}$ est injective, ce qui implique $\delta\circ\delta'(x)=x$. D'où l'isomorphisme.

2. Equations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$

On fixe un φ-module $\mathcal{D}$ de dimension finie, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme φ. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ est muni d'une action continue de G_∞, des opérateurs $\Phi=\varphi\otimes\varphi$ et $D=D\otimes 1$.

2.1. On note $\tilde{\Delta}:\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes\mathcal{D}\to\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}/(1-p^{-k}\varphi)\mathcal{D}$ l'application définie par $g\mapsto(\frac{D^k(g)(0)}{k!} \mod (1-p^{-k}\varphi)\mathcal{D})_{k\in\mathbb{Z}}$. On note $\mathcal{D}_{\infty,e}=(\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes\mathcal{D})^{\tilde{\Delta}=0}$ l'ensemble des éléments $g\in\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes\mathcal{D}$ tels que $\frac{D^k(g)(0)}{k!}\in(1-p^{-k}\varphi)\mathcal{D}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Soit $g\in\mathcal{D}_{\infty,e}$. Alors, l'équation $(1-p^r\Phi)H=D^rg$ a une solution dans $\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ pour tout $r\in\mathbb{Z}$. Pour le démontrer, on fixe un entier h assez grand pour que la série $\sum_{n=0}^\infty\Phi^n(f)$ converge dans $\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ dès que $f\in\mathcal{H}\cap T^h\mathbb{Q}_p[[T]]$, on remarque que $f=D^r(g)-\sum_{0\leq k<h}\frac{D^{r+k}(g)(0)}{k!}\log^k(1+T)\in T^h\mathbb{Q}_p[[T]]$; comme $\frac{D^{r+k}(g)(0)}{k!}=(1-p^{r+k}\varphi)a_k$ et que $(1-p^r\Phi)(a_k\frac{\log^k(1+T)}{k!})=\frac{D^{r+k}(g)(0)}{k!}\log^k(1+T)$, on en déduit l'existence d'une solution de l'équation $(1-p^r\Phi)H=D^r(g)$.

Définition : Soit $g \in \mathcal{D}_{\infty,e}$. On appelle solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$ une famille $\overline{G}=(G_r)$ de solutions $G_r \in \mathcal{H}_\infty \otimes D$ de l'équation $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r g$ tels que $D(G_r)=G_{r+1}$. On pose alors $D^r(\overline{G}) = G_r$ pour tout r et $D^0(\overline{G}) = G$.

Deux solutions compatibles des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$ différent d'un élément $\overline{H}=(H_r)$ avec $H_r = \sum_{i\geq 0}\frac{a_{i+r}}{i!}\log^i(1+T) = \sum_{j\geq r}\frac{a_j}{(j-r)!}\log^{j-r}(1+T)$ avec $a_j \in \mathcal{D}^{\varphi=p^{-j}}$.
D'autre part, il existe toujours une telle solution pour $g\in\mathcal{D}_{\infty,e}$: soit r vérifiant $\mathcal{D}^{\varphi=p^{-s}}=0$ pour tout $s<r$; pour $s<r$ deux solutions H et H' de l'équation $(1-p^s\Phi)H = D^s g$ telles que $D^{r-s}(H)=D^{r-s}(H')$ sont égales. Pour exhiber une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$, il suffit donc de choisir $G_r \in \mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ tel que $(1-p^r\Phi)G_r = D^r(g)$ et de prendre $G_k = D^{k-r}(G_r)$ pour $k\geq r$ et $G_k =$ l'unique solution de $(1-p^k\Phi)H = D^k g$ telle que $D^{r-k}(H) = G_r$ pour $k<r$.
On obtient aussi que $\overline{G}$ est déterminé par G_r pour r assez petit. De plus, si $\mathcal{D}^{\varphi=p^r}$ est nul pour tout $r\in\mathbb{Z}$, la donnée de G_0 détermine tous les G_r. Il suffit donc de se donner une solution G de l'équation $(1-\Phi)G=g$.

2.2. Notons $\mathcal{D}_{\infty,f} = \mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes\mathcal{D}$. Pour tout entier r, définissons une application $L_r : \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}\to\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ par $L_r(c) = \sum_{j\geq r}\frac{c_j}{(j-r)!}\log^{j-r}(1+T)$. On a $D(L_r(c)) = L_{r+1}(c)$.

Définition : Soit $g\in\mathcal{D}_{\infty,f}$. On appelle solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$ un couple $\overline{G}=(b,G)$ où $b\in\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}$ et où $G=(G_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ tels que

1. $D(G_r) = G_{r+1}$
2. $(1-p^r\Phi)G_r - L_r(b) = D^r(g)$.

Il existe toujours une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. Il suffit en effet de choisir des éléments a_j presque tous nuls tels que $a_j \equiv D^j(g)(0) \mod (1-p^j\varphi)\mathcal{D}$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, de poser $b=(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et de prendre pour r_0 assez petit une solution G_{r_0} de l'équation $(1-p^{r_0}\Phi)\mathcal{G}_{r_0} = D^{r_0}(g) - \sum_{j\geq r_0}\frac{a_j}{(j-r_0)!}\log^{j-r_0}(1+T)$. et de poser pour tout $r\geq r_0$, $G_r = D^{r-r_0}G_{r_0}$ et pour $r<r_0$ l'unique solution G_r telle que $D^{r_0-r}G_r = G_{r_0}$.
Considérons l'application $\beta : \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}\to(\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D})\oplus\oplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ donnée par

$$(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto (((1-p^j\varphi)\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}, (\sum_{j\geq r}\frac{\alpha_j}{(j-r)!}(\log(1+T))^{j-r}))_{r\in\mathbb{Z}}$$

Deux solutions compatibles des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$ différent d'un élément $(\beta_r(\alpha))$ avec $\alpha\in\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}$.
Si $\overline{G}=(b,G)$ est une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$, on note $D^r(\overline{G}) = (L_r(b), G_r)$ pour tout $r\in\mathbb{Z}$.

2.3. Si τ est un élément de G_∞, on pose

$$\Pi_\tau(T) = (1-p^{-1}\varphi)\log\frac{(1+T)^{\chi(\tau)}-1}{T}\ .$$

Comme $((1+T)^{\chi(\tau)}-1)/T$ appartient à $\mathbb{Z}_p^\times + T\mathbb{Z}_p[[T]]$, $\Pi_\tau \in \mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[[T]]$ par le lemme de Dwork. C'est de plus un élément de $\mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$ et l'on peut donc considérer pour tout entier $r\in\mathbb{Z}$ l'élément $D^r(\Pi_\tau)\in\mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$.

Définition : On définit $\mathcal{D}_{\infty,g}$ comme l'extension de G_∞-modules de $\oplus\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)$ par $\mathcal{D}_{\infty,f}=\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes\mathcal{D}$ donnée par le cocycle

$$\tau\mapsto((a_i)\mapsto\sum_{i\in\mathbb{Z}}D^{i+1}(\Pi_\tau)a_i)\ ,$$

l'action de G_∞ sur $\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)=\mathcal{D}^{\varphi=p^i}$ étant donnée par le caractère χ^{i+1}. Si $a\in\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)$, on note $U(a)$ l'élément de $\mathcal{D}_{\infty,g}$ tel que $(\tau-1)(U(a)) = D^{i+1}(\Pi_\tau)a$.

On a donc une suite exacte de G_∞-modules

$$0\to\mathcal{D}_{\infty,f}\to\mathcal{D}_{\infty,g}\to\oplus\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)\to 0\ .$$

Remarquons aussi que si l'on tensorise par l'anneau total des fractions $\mathcal{K}(G_\infty)$ de $\mathcal{H}(G_\infty)$, on obtient un isomorphisme $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}_{\infty,f}\cong\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}_{\infty,g}$. On prolonge l'application U par linéarité sur $\oplus\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)$. La formule $D\circ\tau = \chi(\tau)\tau\circ D$ et le fait que l'on a muni ici $\mathcal{D}^{\varphi=p^i}$ de l'action de G_∞ donnée par χ^{i+1} impliquent que l'expression écrite est bien un cocycle. L'équation $D\circ\varphi=p\varphi\circ D$ implique que pour $a\in\mathcal{D}^{\varphi=p^i}$,

$$(1-\Phi)(D^{i+1}\log\frac{(1+T)^{\chi(\tau)}-1}{T}a) = D^{i+1}(\Pi_\tau)a\ .$$

Ainsi, moralement pour $a\in\mathcal{D}^{\varphi=p^{-1}}$, on a $U(a)=(1-\Phi)(a\log T)$ et pour $a\in\mathcal{D}^{\varphi=p^i}$, $U(a)=(1-\Phi)((D^{i+1}\log T)a)$. On notera symboliquement $\tilde U(a) = (D^{i+1}\log T)a$ et $(1-\Phi)\tilde U(a) = U(a)$. Remarquons que si l'on veut évaluer $\log T$ en $T=\zeta_n-1$, il est nécessaire de faire un choix du logarithme : nous prendrons lorsque cela sera nécessaire l'extension de log telle que $\log p = 0$. Si $g\in\mathcal{D}_{\infty,g}$, on note $\lambda_i(g)$ sa projection sur $\mathcal{D}^{\varphi=p^i}(i+1)$; donc

$$g-\sum_i U(\lambda_i(g))\in\mathcal{D}_{\infty,f}\ .$$

Définition : Soit $g\in\mathcal{D}_{\infty,g}$. On appelle solution compatible des équations de $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$ une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{H}_r = D^r(g-\sum_i U(\lambda_i(g)))\in\mathcal{D}_{\infty,f}$.

Ainsi, on se donne $b\in\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}$ et $H_r\in\mathcal{H}_\infty\otimes\mathcal{D}$ tels que

1. $D(H_r) = H_{r+1}$
2. $(1-p^r\Phi)H_r - \sum_{j\geq r}\frac{b_j}{(j-r)!}\log^{j-r}(1+T) = D^r(g-\sum_i U(\lambda_i(g)))$.

Si $\overline{G}$ est une telle solution, on pose $D^r(\overline{G}) = (\lambda_r(g), L_r(b), H_r)$.

3. Application exponentielle

3.1. Nous utiliserons comme Colmez les anneaux $A_{\max}$ et $B_{\max}[t^{-1}]$ à la place de B_{cris}. La norme définie sur $B_{\max}$ par $||x||_{\max} \leq 1$ si et seulement si $x \in A_{\max}$ vérifie la propriété

$$p^{-1}||x||_{\max}.||y||_{\max} \leq ||xy||_{\max} \leq ||x||_{\max}.||y||_{\max}$$

L'importance de la norme $|| \ ||_{\max}$ vient en particulier de son lien avec les $|| \ ||_\rho$ définies sur $\mathcal{H}$. Pour l'énoncer, introduisons $[\epsilon]$ le relèvement de Teichmüller de $\epsilon = (\zeta_n)$ dans $A_{\max}$ et $\beta_n = \varphi^{-n}([\epsilon]) = [(\zeta_{m+n})_m]$.

3.1.1. Lemme. *Si F est un élément de $\mathcal{H}$, alors $F(\beta_n - 1) = \Phi^{-n}(F([\epsilon]-1))$ vérifie*

$$||F||_{\rho_n} \leq ||F(\beta_n - 1)||_{\max} \leq p||F||_{\rho_n} \ .$$

Ainsi, si F est $p^{-u}\varphi^{-}$-borné, la suite $||p^{nu}(1\otimes\varphi)^{-n}F(\beta_n-1)||_{\max}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. Nous ne donnons qu'une esquisse de la démonstration. Colmez ([1, corollaire V.5.5]) démontre que dans $B_{\max}^{G_{K_\infty}}$ muni de la norme $|| \ ||_{\max}$, les éléments $e_{n,k} = \frac{(\beta_n-1)^k}{p^{[\frac{k}{p^n(p-1)}]}}$ (à n fixé) forment un système libre de Banach, c'est-à-dire que la série $\sum_{k\geq 0} a_k e_{n,k}$ converge dans $B_{\max}$ pour $a_k \in K$ si et seulement si $\sup |a_k| < \infty$ et on a alors

$$||\sum_{k\geq 0} a_k e_{n,k}||_{\max} = \sup |a_k|$$

(il démontre plus que cela, mais nous ne nous servirons que de cela). Si $F \in \mathcal{H}$, on a d'autre part

$$||F||_{\rho_n} = \sup |a_k|\rho_n^k = \sup |a_k| p^{-\frac{k}{p^n(p-1)}} \ .$$

En utilisant le fait que

$$\frac{k}{p^n(p-1)} - 1 \leq [\frac{k}{p^n(p-1)}] \leq \frac{k}{p^n(p-1)} \ ,$$

on en déduit que $F(\beta_n - 1)$ existe dans $B_{\max}$ et que

$$||F||_{\rho_n} \leq ||F(\beta_n - 1)||_{\max} \leq p||F||_{\rho_n} \ ,$$

ce qui termine la démonstration. Remarquons qu'en utilisant le fait que $||FG||_\rho = ||F||_\rho ||G||_\rho$, on peut en déduire l'inégalité pour $x = F(\beta_n - 1)$ et $y = G(\beta_n - 1)$

$$p^{-2}||x||_{\max}||y||_{\max} \leq ||xy||_{\max} \leq p||x||_{\max}||y||_{\max} \ ,$$

ce qui est bien sûr moins fort que ce que démontre Colmez, mais suffisant. □

Soit $\mathbf{D}_p(V) = (B_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{G_K} = (B_{\max} \otimes V)^{G_K}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (B_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{G_K}$. On note e_k la base canonique du φ-module filtré $\mathbb{Q}_p[k]$ égal à $\mathbb{Q}_p$ avec $\varphi\alpha = p^k\alpha$; on a donc un isomorphisme canonique entre $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbf{D}_p(V(k))$ donné par $d \mapsto d \otimes e_{-k}$. On plonge $\mathbf{D}_p(V(k))$ dans $B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ par $d \mapsto t^{-k} \otimes (de_k)$, ce qui donne l'identification $\mathbf{D}_p(V(k)) = \mathbf{D}_p(V) \otimes e_{-k} \to B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$: $d \otimes e_{-k} \mapsto t^{-k} \otimes d$. Remarquons que cette identification est compatible avec la filtration et avec l'homomorphisme de Frobenius, mais non avec l'action de Galois : ainsi, on obtient bien que $\mathrm{Fil}^0(B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V(k)))^{\varphi=1}$ est $V(k)$.
Nous utiliserons la propriété suivante du φ-module filtré $\mathbf{D}_p(V)$: si $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, les applications $1 - p^s\varphi$ sont des isomorphismes de $\mathbf{D}_p(V)$ pour $s > h$.
Bloch et Kato définissent une application $\exp_V = \exp_{V,K_n} : \mathbf{D}_p(V) \oplus K_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1(K_n, V)$. Plus précisément, nous noterons :

$$\begin{aligned}
\exp_{V,e} = \exp_{V,K_n,e} :& K_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1_e(K_n, V),\\
\exp_{V,f} = \exp_{V,K_n,f} :& \mathbf{D}_p(V) \oplus K_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1_e(K_n, V)\\
\exp_{V,g} = \exp_{V,K_n,g} :& \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \oplus \mathbf{D}_p(V) \oplus K_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1_g(K_n, V)
\end{aligned}$$

la dermière de ces exponentielles dépendant du choix d'un logarithme (nous prendrons ici $\log_p p = 0$). Rappelons les définitions des applications $\exp_*$ pour $* \in \{e, f, g\}$ sur la partie "cristalline" qui nous intéresse. Fixons un scindage continu Eul de

$$1 - \varphi : \mathrm{Fil}^0(B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)) \to B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V) \ .$$

Deux tels scindages diffèrent d'un homomorphisme continu de $B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ dans V. Ainsi, si $b \in B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$, $(1-\varphi)Eul(b) = b$ et $Eul(b) \in \mathrm{Fil}^0(B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V))$.
Soit L une extension algébrique de K contenue dans $\bar{K}$.

3.1.2. Soit $a \in L \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Alors $P = \exp_{V,e}(a) \in H^1(L, V)$ est la classe du cocycle

$$\tau \in G_L \mapsto (\tau - 1)(c - Eul((1 - \varphi)c))$$

où $c \in B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ vérifie $c - a \in \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$. Si $C = c - Eul((1-\varphi)c)$, on a donc $(1 - \varphi)C = 0$, $NC = 0$ et $C \equiv a \mod \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$.

3.1.3. Soit $(b, a) \in \mathbf{D}_p(V) \oplus L \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Alors $P = \exp_{V,f}(b, a) \in H^1(L, V)$ est la classe du cocycle

$$\tau \in G_L \mapsto (\tau - 1)(c - Eul((1 - \varphi)c - b))$$

où $c \in B_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ vérifie $c - a \in \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$. De nouveau, si $C = c - Eul((1-\varphi)c - b)$, il vérifie $(1-\varphi)C = b$ et $C \equiv a \mod \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$.

3.1.4. Soit $(d,b,a) \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \oplus \mathbf{D}_p(V) \oplus L \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Alors $P = \exp_{V,g}(d,b,a) \in H^1(L,V)$ est la classe du cocycle

$$\tau \in G_L \mapsto (\tau-1)(c - Eul((1-\varphi)c-b))$$

où $c \in B_{st} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ vérifie

1. $c - a \in \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$,
2. $Nc = d$

(remarquons que $N((1-\varphi)c-b) = (1-p^{-1}\varphi)Nc = 0$ et $Eul((1-\varphi)c-b)$ est donc définie) et $C = c - Eul((1-\varphi)c-b)$ vérifie $(1-\varphi)C = b$, $NC = d$ et $C \equiv a \mod \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$.

Remarque : $e_B(a) = c - Eul((1-\varphi)c)$ est bien définie à valeurs dans $B_{\max}^{\varphi=1} \otimes V/V$. Lorsque L est contenue dans K_∞, on peut en fait choisir c dans $B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V)$: en effet la nullité de $H^1(K_\infty, \mathrm{Fil}^0 B_{\max})$ (voir [1, IV], voir aussi le §4.1) implique la surjectivité de l'application $B_{\max}^{G_{K_\infty}} \to (B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$ et donc en tensorisant par V celle de $B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes V \to (B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}} \otimes V$; nous allons le faire explicitement au paragraphe suivant. On en déduit que la restriction $res_\infty(P)$ de P à K_∞ est la classe du cocycle $\tau \mapsto -(\tau-1)Eul((1-\varphi)c)$, où c est un élément de $B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ congru à $a \mod \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$.

3.2. On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\infty,e}(V) =& (\mathcal{H}_\infty^{\psi=0} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\tilde{\Delta}=0}\\ \mathcal{D}_{\infty,f}(V) =& \mathcal{H}_\infty^{\psi=0} \otimes \mathbf{D}_p(V)\\ \mathcal{D}_{\infty,g}(V) =& \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V))\end{aligned}$$

Soit h un entier ≥ 1 et k un entier tel que $h+k-1 \geq 0$.

3.2.1. Soient $g \in \mathcal{D}_{\infty,e}(V)$ et $\overline{G}$ une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. Posons pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\Xi_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!p^{-n}(1\otimes\varphi)^{-n}(D^{-k}(\overline{G})(\zeta_n-1)\otimes e_{-k})\\ =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(\overline{G})(\zeta_n-1)\otimes e_{-k}\ ;\end{aligned}$$

c'est un élément de $K_n \otimes \mathbf{D}_p(V(k))$. Posons pour $n \geq 1$

$$P_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) = \exp_{V(k),e}(\Xi_{n,k}^{(h)}(\overline{G})) \in H_e^1(K_n, V(k))\ .$$

3.2.2. Soient $g \in \mathcal{D}_{\infty,f}(V)$ et $\overline{G}$ une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$: $\overline{G} = (b,(G_r)_{r\in\mathbb{Z}})$ avec $b \in \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}$ et $G_r \in \mathcal{H}_\infty \otimes \mathcal{D}$. Posons pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\Xi_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!p^{-n}(1\otimes\varphi)^{-n}(D^{-k}(\overline{G})(\zeta_n-1)\otimes e_{-k})\\ =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(\overline{G})(\zeta_n-1)\otimes e_{-k}\ ;\end{aligned}$$

c'est un élément de $\mathbf{D}_p(V(k)) \oplus K_n \otimes \mathbf{D}_p(V(k))$. Posons

$$P_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) = \exp_{V(k),f}(\Xi_{n,k}^{(h)}(\overline{G})) \in H^1_f(K_n, V(k)) \ .$$

Comme $\log \zeta_n = 0$, les contributions des b_i dans $L_{-k}(b)$ pour $i > -k$ sont nulles et on a donc

$$\Xi_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) =$$
$$(-1)^{h+k-1}(h+k-1)! p^{n(k-1)}(\varphi^{-n} b_{-k} \otimes e_{-k}, (1 \otimes \varphi)^{-n} G_{-k}(\zeta_n - 1) \otimes e_{-k}) \ .$$

3.2.3. Enfin, soit $g \in \mathcal{D}_{\infty,g}(V)$. On fixe une solution compatible $\overline{\Psi}_\tau$ des équations $(1-p^r\varphi)\mathcal{G}_r = D^r(\Pi_\tau)$, c'est-à-dire une famille de $\Psi_\tau^{(r)} = D^r(\overline{\Psi}_\tau)$ de solutions de l'équation $(1-p^r\varphi)\Psi_\tau^{(r)} = D^r\Pi_\tau$ pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$ vérifiant $D(\Psi_\tau^{(r)}) = \Psi_\tau^{(r+1)}$. On vérifie alors que pour $\tau \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ non trivial et $i \neq 0$, l'expression $(\chi^{-i}(\tau)-1)^{-1} D^i(\overline{\Psi}_\tau)(\zeta_n - 1)$ est un élément de K_n ne dépendant pas du choix de τ. On le note $\ell^{(1-i)}(\zeta_n - 1)$. On pose $l^{(1)}(\zeta_n - 1) = \log(\zeta_n - 1)$ (où l'on a choisi $\log_p p = 0$).
Si $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi = p^{k-1}}$, on pose

$$\Xi_{n,k}^{(h)}(\tilde{U}(a)) = (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!(a, 0, \log(\zeta_n - 1)a) \otimes e_{-k} \ .$$

Si $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi = p^i}$ avec $k \neq i+1$, on pose

$$\begin{aligned}\Xi_{n,k}^{(h)}(\tilde{U}(a)) =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!(0, 0, \ell^{(k-i)}(\zeta_n - 1)a \otimes e_{-k} \\ =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!(0, 0, \frac{D^{-k+i+1}(\overline{\Psi}_\tau)(\zeta_n - 1)}{(\chi^{-k+i+1}(\tau) - 1)} a \otimes e_{-k}) \ .\end{aligned}$$

On pose $P_{n,k}^{(h)}(\tilde{U}(a)) = \exp_{V(k),g}(\Xi_{n,k}^{(h)}(\tilde{U}(a))$. On note $\tilde{P}_{n,k}^{(h)}(U(a))$ la restriction de $P_{n,k}^{(h)}(\tilde{U}(a))$ à $H^1(K_\infty, V(k))$.
Si maintenant $g = h + \sum_{i \in \mathbb{Z}} U(a_i)$ est un élément de $\mathcal{D}_{\infty,g}(V)$ et si $\overline{G} = \overline{H} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{U}(a_i)$ est une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G} = D^r(g)$, on étend les définitions de $\Xi_{n,k}^{(h)}$ et de $P_{n,k}^{(h)}$ par linéarité. On a donc $\tilde{P}_{n,k}^{(h)}(\overline{G}) = \tilde{P}_{n,k}^{(h)}(\overline{H}) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{P}_{n,k}^{(h)}(U(a_i))$.

3.3. Théorème. *Soit V une représentation de de Rham et soit h un entier ≥ 1 tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Soient $g \in \mathcal{D}_{\infty,f}(V)$ et $\overline{G}$ une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. Soit u un entier $> -h$ tel que g soit $p^{-u}\varphi^-$-bornée. Si g n'est pas dans $\mathcal{D}_{\infty,e}(V)$, on suppose de plus que $D^h(g)(0) \in (1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$. La famille $(P_{n,k}^{(h)}(\overline{G}))_{n\geq 1, k \geq -h+1}$ est tempérée d'ordre $\leq (u+h)^-$ et définit un élément $\Omega_{V,h}(g)$ de $\mathcal{H}_{(u+h)^-}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ ne dépendant que de g. Ainsi, on a*

$$\tilde{\pi}_{n,k}(\Omega_{V,h}(g)) = \tilde{P}_{n,k}^{(h)}(g)$$

pour $n \geq 1$ et pour $k \in \{1-h, \cdots, +\infty\}$.

On a

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) \leq h + \mathfrak{o}_{\varphi}(g)$$

et lorsque V est cristalline,

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) = h + \mathfrak{o}_{\varphi}(g) \ .$$

Ainsi, si r_0 est un entier tel que la suite d'opérateurs $p^{nr_0}\varphi^{-n}$ de $\mathbf{D}_p(V)$ est bornée et si g appartient de plus à $\mathcal{H}_{s^-}^{\psi=0} \otimes \mathbf{D}_p(V)$, $\Omega_{V,h}(g)$ appartient à $\mathcal{H}_{(r_0+s+h)^-}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(T)$. En effet, g est alors $p^{-(r_0+s)}\varphi^-$-borné. Remarquons que r_0 peut être négatif, mais on a nécessairement $r_0 + h \geq 0$ et donc $r_0 + s > -h$. Par exemple, si $V = \mathbb{Q}_p(r)$, on peut prendre $h = r$ et $r_0 = -r$. La relation entre les ordres de tempérance signifie : $\Omega_{V,h}(g)$ est un $o(\log^s)$ si et seulement si g est $p^{-(s-h)}\varphi^-$-bornée et $\Omega_{V,h}(g)$ est un $O(\log^s)$ si et seulement si g est $p^{-(s-h)}\varphi$-bornée.

REMARQUES : 1) Cet homomorphisme est $(-1)^{h-1}$ fois le $\Omega_{V,h}$ de [4]. Cela permet d'éliminer certains signes : par exemple, il n'est pas difficile de déduire du théorème la relation suivante entre $\Omega_{V,h+1}$ et $\Omega_{V,h}$:

$$\Omega_{V,h+1} = \ell_h \Omega_{V,h}$$

avec

$$\ell_h = \frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)} - h = \frac{\log\chi(\gamma)^{-h}\gamma}{\log\chi(\gamma)} = Tw^{-h}(\frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)})$$

(attention au changement de signe par rapport à [4]). On pose pour tout entier r,

$$\Omega_{V,r} = (\prod_{r\leq j<h} \ell_j)^{-1}\Omega_{V,h} \tag{3.3.1}$$

pour $h > r$ et tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. C'est un élément de $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ avec $\mathcal{K}(G_\infty)$ l'anneau des factions total de $\mathcal{H}(G_\infty)$ (il suffit en fait d'inverser les ℓ_j). De même, avec des identifications convenables, on a

$$\Omega_{V(j),h+j}(g) = Tw^j(\Omega_{V,h}(D^j(g))) \ .$$

2) La lettre Ω évoque pour certains une période : isomorphisme de périodes entre $\mathcal{H}_\infty \otimes \mathbf{D}_p(V)$ et $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(K,V)$. On peut le voir aussi comme une manière de mettre ensemble toutes les exponentielles de Bloch-Kato relatives à V et à ses twists cyclotomiques, d'où la notation $\mathrm{Exp}_{h,V}$ de [2]. Il est d'ailleurs amusant de remarquer que dans [2], c'est le point de vue “matrice de périodes” de cet homomorphisme qui est utilisé.
3) Ici, on n'a pas supposé V cristalline mais si V ne l'est pas, la dimension de $K_n \otimes \mathbf{D}_p(V)$ est de dimension sur K_n strictement inférieure à la dimension de V et donc le rang de $\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V)$ est strictement inférieure à celui de $Z^1_\infty(K,T)$.

Nous ne démontrons dans les paragraphes qui suivent que l'inégalité

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) \leq h + \mathfrak{o}_\varphi(g) \ ;$$

l'égalité dans le cas où V est cristalline sera une conséquence de la loi de réciprocité (cf. 4.2.4).
4) Si $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-h}} \neq 0$, V contient alors $\mathbb{Q}_p(h)$. Dans ce cas, si $D^h(g)(0) \notin (1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$, on peut définir $\Omega_{V,h}(g)$ à valeurs dans $(\chi(\gamma)^{-h}\chi - 1)^{-1}\mathcal{H}_{(u+h)^-}(G_\infty) \otimes \tilde{Z}^1_\infty(T)$ par

$$\Omega_{V,h}(g) = (\chi(\gamma)^{-h}\gamma - 1)^{-1}\Omega_{V,h}((\chi(\gamma)^{-h}\chi - 1)g) \ .$$

Remarquons qu'alors $\Omega_{V,h+1}(g)$ est défini directement par le théorème, ce qui est cohérent avec la relation $\Omega_{V,h+1}(g) = \ell_h\Omega_{V,h}(g)$: $\Omega_{V,h+1}(g)$ n'a plus de pôles. Donnons maintenant les formules qui s'en déduisent pour $n = 0$:

3.3.1. Proposition. *Sous les hypothèses du théorème* 3.3, *on a*

$$\tilde{\pi}_{0,k}(\Omega_{V,h}(g)) = \exp_{V(k),f}(\Xi^{(h)}_{0,k}(\overline{G}))$$

avec

$$\begin{aligned}\Xi^{(h)}_{0,k}(\overline{G}) =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)! \times \\ & ((1-p^{k+1}\varphi^{-1})b_{-k} \otimes e_{-k}, (1-p^{k+1}\varphi^{-1})D^{-k}(G)(0) \otimes e_{-k}) \ .\end{aligned}$$

En particulier, si $1 - p^{-k}\varphi$ *est un isomorphisme sur* $\mathbf{D}_p(V)$, *on a*

$$\tilde{\pi}_{0,k}(\Omega_{V,h}(g)) = \exp_{V(k),e}(\Xi^{(h)}_{0,k}(\overline{G}))$$

avec

$$\begin{aligned}\Xi^{(h)}_{0,k}(\overline{G}) =& (-1)^{h+k-1}(h+k-1)! \times \\ & (1-p^{k+1}\varphi^{-1})(1-p^{-k}\varphi)^{-1}D^{-k}(g)(0) \otimes e_{-k} \ .\end{aligned}$$

La proposition se déduit de l'équation fonctionnelle reliant G et g et de ce que $\psi(g) = 0$ (voir (4.3.2)).
Avant de commencer la démonstration du théorème, expliquons comment on peut traiter le cas où $g \in \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V))$. Il s'agit de définir l'image de $U(a)$ pour $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^i}$. Pour cela, plutôt que de vérifier les congruences, ce que nous n'avons pas su faire, on définit directement $\Omega_{V,h}(U(a))$ puis on vérifie que $\pi_{n,k}(\Omega_{V,h}(U(a))$ est bien $\exp_{V(k),g}(\Xi^{(h)}_{n,k}(\tilde{U}(a)))$.
Pour cela, on commence par énoncer le lemme suivant :

Lemme. *Soit* τ *un élément de* G_∞ *non de torsion. Soit* $u \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ *tel que* $\pi_{0,0}(u) = 0$. *Alors, il existe* $v_\tau \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ *tel que* $(\tau - 1)v_\tau = u$.

On peut exprimer le lemme sous la forme suivante en le twistant : si $\pi_{0,j}(u) = 0$, il existe v_τ tel que $(\chi(\tau)^j\tau - 1)v_\tau = u$. Remarquons qu'on a alors pour tout

entier k la formule $(\chi(\tau)^{j-k}-1)\pi_{n,k}(v_\tau)=\pi_{n,k}(u)$ pour τ laissant fixe K_n, c'est-à-dire que pour tout entier $k\neq j$, $\pi_{n,k}(v_\tau)=\frac{1}{\chi(\tau)^{j-k}-1}\pi_{n,k}(u)$.
Enfin, remarquons que l'on a unicité de v_τ si l'on ne regarde que son image dans $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\tilde{Z}^1_\infty(K,T)$ et que si u est tempérée d'ordre $\leq r$, il en est de même de v_τ.
Appliquons ce lemme à $x_\tau=\Omega_{V,h}(D^{i+1}\Pi_\tau a)$ pour $a\in\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^i}$. Par twist, on peut se ramener au cas où $i=-1$.
Comme $\pi_{n,0}(x_\tau)=\exp_{V,e}((-1)^{h-1}(h-1)!\ G_\tau(\zeta_n-1)a)$ pour $n\geq 1$ avec $G_\tau=\log\frac{(1+T)^{\chi(\tau)}-1}{T}$, on a

$$\pi_{0,0}(x_\tau)=Tr_{K_1/K}(\exp_{V,e}((-1)^{h-1}(h-1)!\log\frac{\zeta_1^{\chi(\tau)}-1}{\zeta_1-1}a))=0\ .$$

Il existe donc $y\in\mathcal{H}_\infty(G_\infty)\otimes\tilde{Z}_\infty(K,T)$ tel que $(\tau-1)y=x_\tau$ et on vérifie facilement que y ne dépend pas de τ. On pose alors $\Omega_{V,h}(U(a))=y$. On a donc

$$\Omega_{V,h}(U(a))=(\tau-1)^{-1}\Omega_{V,h}(\Pi_\tau(a)$$

et en général pour $a\in\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^i}$

$$\Omega_{V,h}(U(a))=(\chi(\tau)^{i+1}\tau-1)^{-1}\Omega_{V,h}(D^{i+1}\Pi_\tau(a)\ .$$

On définit ainsi un prolongement de $\Omega_{V,h}$ à $\mathcal{D}_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V))$. La formule

$$\exp_{V(k),f}(\Xi^{(h)}_{n,k}(U(a)))=\pi_{n,k}(\Omega_{V,h}(U(a)))$$

est claire pour $k\neq i+1$. Pour $k=i+1$, nous la montrerons plus tard en utilisant la loi de réciprocité.

3.4. Démonstration du théorème.

3.4.1. Il s'agit de montrer que les points $P_{n,k}(\overline{G})$ vérifient les conditions de la proposition 1.8. La propriété que

$$Tr_{n+1,n}(P^{(h)}_{n+1,k}(\overline{G}))=P^{(h)}_{n,k}(\overline{G})$$

dans $H^1(K_n,V(k))$ se déduit de la condition $\psi(g)=0$. Pour montrer que les points $P_{n,k}(\overline{G})$ sont admissibles, il suffit de le faire pour $P_{0,k}(\overline{G})=Tr_{K_n/K}(P_{n,k}(\overline{G}))$. Prenons $k=0$ pour simplifier (on s'y ramène en remplaçant V par $V(k)$). Ce point est admissible si et seulement son accouplement local avec un élément v de $V^*(1)^{G_K}\cong H^1(\Gamma,V^*(1)^{G_K})\subset H^1(K,V^*(1))$ est nul (§1.6). Pour le calculer, nous utilisons les formules de Kato qui sont rappelées en 4.1.3. On en déduit que si v est vu comme élément de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V^*(1))^{\varphi=1}\subset\mathbf{D}_p(V^*(1))$, cet accouplement est de la forme $[(1-p\varphi^{-1})(u),v]=[u,(1-\varphi)v]=0$.
Démontrons les congruences vérifiées par les $P^{(h)}_{n,k}$. Comme me l'a fait remarqué Colmez, il y a une démonstration beaucoup plus simple au niveau des calculs que celle faite dans [4]. Nous allons commencer par celle-là. Cependant, nous

avons besoin pour la démonstration de la loi de réciprocité du calcul explicite du cocycle fait dans [4]. Aussi, ferons-nous ensuite ce calcul.
Notons $[\epsilon]$ le relèvement de Teichmüller de $\epsilon = (\zeta_n)$ dans $A_{\max}$ et $\beta_n = \varphi^{-n}([\epsilon]) = [(\zeta_{m+n})_m]$. Il s'agit donc d'un relèvement de la racine de l'unité ζ_n dans $B_{\max}$ puisque l'image de β_n dans $\overline{K} \subset B_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$ est ζ_n.
Prenons $g \in \mathcal{D}_{\infty,e}(V)$. On se donne une solution compatible $\overline{G}$ de l'équation$(1-\Phi)\mathcal{G} = g$, c'est-à-dire des éléments G_r de $\mathcal{H}_\infty \otimes \mathbf{D}_p(V)$ vérifiant $D(G_r) = G_{r+1}$ et $(1 - p^r\Phi)G_r = D^r(g)$. On pose $D^r(\overline{G}) = D^r(G) = G_r$. Le point $P^{(h)}_{n,k}(\overline{G})$ est la classe du cocycle

$$(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!p^{n(k-1)}e_B((1\otimes\varphi)^{-n}G_{-k}(\zeta_n-1)\otimes e_{-k})\ .$$

Pour démontrer les congruences, il suffit de montrer que pour $s' \geq h+u$ et pour $\tau \in G_{K_\infty}$, la limite de la suite

$$p^{n(s'-(j+h-1))}(\tau-1)e_B(\sum_{k=1-h}^{j}(-1)^{k+h-1}\binom{j+h-1}{k+h-1}\Xi^{(h)}_{n,k}(\overline{G})t^{-k})$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. (rappelons que $\Xi^{(h)}_{n,k}(G) \in \mathbf{D}_p(V(k))$ est identifié à $\Xi^{(h)}_{n,k}(G)t^{-k}e_k \in B_{\max}\otimes\mathbf{D}_p(V)$). Notons

$$\mathcal{Y}^h_j = \sum_{k=1-h}^{j}(-1)^{k+h-1}\binom{j+h-1}{k+h-1}\Xi^{(h)}_{n,k}(\overline{G})t^{-k}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^h_j &= (j+h-1)!\sum_{k=1-h}^{j}\frac{p^{n(k-1)}}{(j-k)!}(1\otimes\varphi)^{-n}G_{-k}(\zeta_n-1)t^{-k}\\ &= (j+h-1)!p^{n(j-1)}\sum_{k=0}^{h+j-1}\frac{p^{-nk}}{k!}(1\otimes\varphi)^{-n}D^k(G_{-j})(\zeta_n-1)t^{k-j}\end{aligned}$$

en changeant k en $j-k$.
Soit $H \in \mathcal{H}_\infty\otimes\mathbf{D}_p(V)$. Posons $\tilde{H}(Z) = H(\zeta_n\exp(Z)-1)$: comme $\beta_n = \zeta_n\exp(t/p^n)$, on a $H(\beta_n-1) = \tilde{H}(t/p^n)$. Si $\mathcal{T}_{h-1}(\tilde{H})$ est le développement de Taylor d'ordre $h-1$ de $\tilde{H}$ en 0, on vérifie facilement que

$$\tilde{H}(t/p^n) - \mathcal{T}_{h-1}(\tilde{H})(t/p^n) \in t^hB^+_{\mathrm{dR}}\otimes\mathbf{D}_p(V) = \mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{dR}}\otimes\mathbf{D}_p(V)$$

et que

$$\mathcal{T}_{h-1}(\tilde{H})(t/p^n) = \sum_{i=0}^{h-1}\frac{1}{i!}D^i(H)(\zeta_n-1)\frac{t^i}{p^{ni}}$$

On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{h-1}\frac{1}{i!}D^i(H)(\zeta_n-1)\frac{t^i}{p^{ni}} - H(\beta_n-1) \in \mathrm{Fil}^h(B_{\mathrm{dR}})\otimes\mathbf{D}_p(V)\ ,$$

et en remplaçant h par $h+j$, que

$$\sum_{i=0}^{h+j-1}\frac{1}{i!}D^i(H)(\zeta_n-1)\frac{t^i}{p^{ni}}t^{-j}-H(\beta_n-1)t^{-j}\in \mathrm{Fil}^h(B_{\mathrm{dR}})\otimes \mathbf{D}_p(V))\ .$$

Remarquons que la condition sur h implique que $\mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{dR}}\otimes \mathbf{D}_p(V)$ est contenu dans $\mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}}\otimes \mathbf{D}_p(V))$. En appliquant cela à $H=(1\otimes\varphi)^{-n}G_{-j}$ et en utilisant le fait que e_B est nul sur $\mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}}\otimes\mathcal{D})$, on obtient que

$$\begin{aligned} e_B(\mathcal{Y}_j^h) &= e_B((j+h-1)!p^{n(j-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}G_{-j}(\beta_n-1)t^{-j})\\ &=(j+h-1)!p^{n(j-1)}e_B(\Phi^{-n}(G_{-j}(\epsilon-1))t^{-j}\end{aligned}$$

Par définition de e_B et de Eul et comme $\Phi^{-n}(G_{-j}(\epsilon-1))t^{-j}$ appartient à $(B_{\max}\otimes \mathbf{D}_p(V))^{G_{K_\infty}}$, on a

$$(\tau-1)e_B(\mathcal{Y}_j^h)=-(j+h-1)!p^{n(j-1)}(\tau-1)Eul(\Phi^{-n}(D^{-j}(g)([\epsilon]-1))t^{-j})\ .$$

Il s'agit donc de montrer par continuité de Eul et stabilité de $A_{\max}$ par G_K que pour $s'-h\geq u$, la suite $p^{n(s'-h)}\Phi^{-n}(D^{-j}(g)([\epsilon]-1))$ tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. On applique pour cela le lemme 3.1.1 à $D^{-j}(g)$ qui est $p^{-u}\varphi^{-}$-bornée :

$$||p^{n(s'-h)}\Phi^{-n}(D^{-j}(g)([\epsilon]-1))||_{\max}=p^{n(h+u-s')}||p^{nu}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-j}(g)||_{\rho_n}$$

tend vers 0 lorsque $n\to\infty$.
Il n'est pas difficile de voir que la même démonstration s'applique à $g\in\mathcal{D}_{\infty,f}(V)$.

3.4.2. Comme annoncé, nous allons maintenant reprendre la démonstration en calculant explicitement un cocycle représentant $P_{n,k}^{(h)}$ pour $g\in\mathcal{D}_{\infty,f}(V)$. On se donne donc une solution compatible $\overline{G}$, c'est-à-dire $b=(b_r)\in\oplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathbf{D}_p(V)$ et des éléments G_r de $\mathcal{H}_\infty\otimes\mathbf{D}_p(V)$ vérifiant $D(G_r)=G_{r+1}$ et $(1-p^r\Phi)G_r=D^r(g)+L_r(b)$ avec $L_r(b)=\sum_{i\geq r}\frac{b_i}{(i-r)!}\log^{i-r}(1+T)$. Il est commode de noter formellement $L(b)=\sum_i\frac{b_i}{i!}\log^i(1+T)$ et $L(b)_r=D^r(L(b))=L_r(b)$. On pose $\overline{G}=(b,G)$ avec $G=(G_r)$ et $D^r(\overline{G})=(L_r(b),D^r(G))=(L_r(b),G_r)$. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0^{(h)}(G)=&(-1)^{h-1}(h-1)!\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\frac{1}{i!}D^i(G)([\epsilon]-1)t^i\\ \mathcal{S}_k^{(h)}(G)=&(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\sum_{i=0}^{h+k-1}(-1)^i\frac{1}{i!}D^{i-k}(G)([\epsilon]-1)t^{i-k}\\ =&(-1)^{h-1}(h+k-1)!\sum_{i=-k}^{h-1}(-1)^i\frac{1}{(i+k)!}D^i(G)([\epsilon]-1)t^i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(h)}_{n,0,cris}(G) =&(p\Phi)^{-n}(S^{(h)}_0(G))\\ \mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(G) =&(p\Phi)^{-n}(S^{(h)}_k(G))\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}^{(h)}_k(G) = \mathcal{S}^{(h+k)}_0(D^{-k}(G))t^{-k}$.
Lorsque $h = 1$, les formules se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(1)}_{n,0,cris}(G) =&(p\Phi)^{-n}(G_0([\epsilon]-1))\\ \mathcal{S}^{(1)}_{n,k,cris}(G) =&(p\Phi)^{-n}(k!\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-k}\frac{1}{i!}D^{i-k}(G)([\epsilon]-1)t^{i-k})\\ =&(p\Phi)^{-n}(k!\sum_{u=0}^{k}(-1)^{u}\frac{1}{(k-u)!}D^{-u}(\overline{G})([\epsilon]-1)t^{-u})\ .\end{aligned}$$

Notons $b^{(r)}$ la suite b où l'on a remplacé le r-ième terme par 0. On définit par les mêmes formules $\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b))$ et $\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(r)}))$.

3.4.3. Lemme. *Supposons comme dans le théorème que* $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *et que* $h+k-1 \geq 0$. *Alors,*
(i) $P^{(h)}_{n,k}(\overline{G})$ *est la classe du cocycle*

$$\tau \in G_{K_n} \mapsto (\tau-1)(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(G) - Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g + L(b^{(-k)})))\ ;$$

(ii) $res_\infty(P^{(h)}_{n,k}(\overline{G}))$ *est la classe du cocycle*

$$\tau \in G_{K_\infty} \mapsto -(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g) - p^{-n}\frac{D^h(g)(0)t^h}{h+k})$$

Si $D^h(g)(0) \in (1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$, $res_\infty(P^{(h)}_{n,k}(\overline{G}))$ *est la classe du cocycle*

$$\tau \in G_{K_\infty} \mapsto -(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g))\ .$$

Démonstration. Soit $H \in \mathcal{H}_\infty \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Posons $\tilde{H}(Z) = H(\beta_n \exp(-Z)-1)$: en utilisant la formule $\zeta_n = \beta_n \exp(-t/p^n)$, on a $H(\zeta_n - 1) = \tilde{H}(t/p^n)$. La même démonstration que précédemment donne que

$$H(\zeta_n-1) - \sum_{i=0}^{h-1}\frac{(-1)^i}{i!}D^i(H)(\beta_n-1)\frac{t^i}{p^{ni}} \in t^h B^+_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V)$$

En appliquant cette formule à $D^{-k}(G)$ et à $h+k-1 \geq 0$, on en déduit que

$$\Xi^h_{n,k}(G) - \mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(G) \in \mathrm{Fil}^h(B_{\mathrm{dR}}) \otimes \mathbf{D}_p(V) \subset \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_p(V(k)))$$

De plus, $\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(G)$ est invariant par G_{K_∞}. En utilisant la formule $(1-p^r\Phi)D^r(G)=D^r(g)+L_r(b)$, on a

$$(1-\Phi)\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(G)=\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g)+\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b)) \ .$$

En revenant à la définition de $\exp_f$ et en remarquant que

$$\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b))-(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!(p\varphi)^{-n}b_{-k}t^{-k}=\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(-k)})) \ ,$$

on obtient que $res_\infty(P^{(h)}_{n,k}(\overline{G}))$ est la classe du cocycle

$$\tau\in G_{K_\infty}\mapsto -(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g+L(b^{(-k)}))) \ .$$

Calculons maintenant $\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(-k)})$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b))\\
&\qquad=(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\sum_{i=0}^{h+k-1}\frac{(-1)^i}{i!}\Big(\sum_{u\geq i-k}\frac{b_u}{(u-i+k)!}t^{u-i+k}\Big)t^{i-k}\\
&\qquad=(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\sum_{i=0}^{h+k-1}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{u\geq i-k}\frac{b_u}{(u-i+k)!}t^{u}\\
&\qquad=(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\sum_{u\geq -k}\alpha^h_{u,k}b_ut^u
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha^h_{u,k}=\sum_{\substack{i\leq u+k\\ 0\leq i\leq h+k-1}}\frac{(-1)^i}{i!(u-i+k)!} \ .$$

Lorque $u\leq h-1$, on a

$$(u+k)!\alpha^h_{u,k}=\sum_{0\leq i\leq u+k}\frac{(-1)^i(u+k)!}{i!(u-i+k)!}=(1-1)^{u+k}=\begin{cases}0 & \text{si } -k<u\leq h-1\\ 1 & \text{si } u=-k\end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b))=(h+k-1)!(-1)^{h+k-1}\Big(b_{-k}t^{-k}+\sum_{u\geq h}\alpha^h_{u,k}b_ut^u\Big)$$

et

$$\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(k)}))=(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\sum_{u\geq h}\alpha^h_{u,k}b_ut^u$$

et $\alpha^h_{h,k}=\frac{(-1)^{h+k-1}}{(h+k)!}$. On en déduit que

$$\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(k)}))\in t^hB^{+G_{K_\infty}}_{\max}\otimes\mathbf{D}_p(V)\subset\mathrm{Fil}^0(B_{\max}\otimes\mathbf{D}_p(V)) \ .$$

Plus précisément, pour $u>h$ ou pour $b_h\in(1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$, b_ut^u appartient à $(1-\varphi)\,\mathrm{Fil}^0(B^{+G_{K_\infty}}_{\max}\otimes\mathbf{D}_p(V))$, car $1-p^u\varphi$ est alors un isomorphisme de

$\mathbf{D}_p(V)$, et on en déduit que $(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(L(b^{(k)}))=0$ pour $\tau\in G_{K_\infty}$ et $res_\infty(P^{(h)}_{n,k}(\overline{G}))$ est simplement la classe du cocycle

$$\tau\in G_{K_\infty}\mapsto -(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g)+p^{-n(h+1)}\frac{\varphi^{-n}(b_h)t^h}{h+k})$$

et si $b_h\in(1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$, c'est la classe du cocycle

$$\tau\in G_{K_\infty}\mapsto -(\tau-1)Eul(\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g))\ .$$

Sans condition sur b_h, remarquons que $b_h+D^h(g)(0)\in(1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$ et pour les mêmes raisons,

$$\begin{aligned}&(\tau-1)Eul(\varphi^{-n}(b_h)t^h)\\ &\qquad=(\tau-1)Eul(p^{nh}b_ht^h)=-p^{nh}(\tau-1)Eul(D^h(g)(0)t^h)\ .\end{aligned}$$

On en déduit le lemme. □

3.4.4. Corollaire. *La restriction de $P^{(h)}_{n,k}(\overline{G})$ à $H^1(K_\infty,V(k))$ ne dépend que de g, on la note $\tilde{P}^{(h)}_{n,k}(g)$.*

3.4.5. Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème en supposant que $D^h(g)(0)\in(1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$. Montrons que pour $s'\geq h+u$, la suite

$$\begin{aligned}&p^{n(s'-(j+h-1))}\sum_{k=1-h}^{j}(-1)^{k+h-1}\binom{j+h-1}{k+h-1}\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g)\\ &\qquad=p^{n(s'-j-h+1)}\sum_{k=0}^{j+h-1}(-1)^k\binom{j+h-1}{k}\mathcal{S}^{(h)}_{n,k-h+1,cris}(g)\end{aligned}$$

tend vers 0. Notons

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}^{(h)}_j=\\ &\sum_{k=0}^{j+h-1}(-1)^k\binom{j+h-1}{k}k!(-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{i!}D^{i-k+h-1}(g)([\epsilon]-1)t^{i-k+h-1})\ .\end{aligned}$$

On a donc $(p\Phi)^{-n}(\mathcal{Z}^{(h)}_j)=\sum_{k=1-h}^{j}(-1)^{k+h-1}\binom{j+h-1}{k+h-1}\mathcal{S}^{(h)}_{n,k,cris}(g)$. On a en changeant i en $k-i$

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}^{(h)}_j=\\ &=\sum_{k=0}^{j+h-1}(-1)^k\binom{j+h-1}{k}k!\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{(k-i)!}D^{-i+h-1}(g)([\epsilon]-1)t^{-i+h-1})\\ &=\sum_{i=0}^{j+h-1}(-1)^iv_{i,j+h-1}D^{-i+h-1}(g)([\epsilon]-1)t^{-i+h-1}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} v_{i,t} =& \sum_{k=i}^{t} (-1)^k \binom{t}{k} \frac{k!}{(k-i)!} \\ =& \sum_{k=i}^{t} (-1)^k \binom{u}{k} k(k-1)\dots(k-i+1) \\ =& (\frac{d^i}{dX^i}(1-X)^t)_{|X=1} \end{aligned}$$

Donc, seul $v_{t,t}$ est non nul, il vaut $(-1)^t t!$ et on obtient finalement

$$\begin{aligned} p^{-nj}(p\Phi)^{-n}(\mathcal{Z}_j^{(h)}) =& p^{-nj}(p\Phi)^{-n}((j+h-1)!D^{-j}(g)([\epsilon]-1)t^{-j}) \\ =& (p\Phi)^{-n}((j+h-1)!D^{-j}(g)([\epsilon]-1))t^{-j} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que $p^{n(s'-1-h+1)}\Phi^{-n}(D^{-j}(g)([\epsilon]-1))$ tend vers 0 pour $s' \geq h+u$. On applique pour cela le lemme 3.1.1 à $D^{-j}(g) \in \mathcal{H}_\infty^{\psi=0} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ qui est $p^{-u}\varphi^-$-bornée pour obtenir que

$$||p^{n(s'-h)}\Phi^{-n}(D^{-j}(g)([\epsilon]-1))||_{\max} = p^{n(h+u-s')}||p^{nu}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-j}(g)||_{\rho_n}$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Cela termine la démonstration du théorème 3.3.

3.4.6. Revenons sur le cas où $D^h(g)(0) \notin (1-p^h\varphi)\mathbf{D}_p(V)$. Rappelons que le fait que $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-h}} \neq 0$ avec $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$ implique que $V(-h)^{G_K}$ est non nul.
On voit alors apparaître dans le cocycle définissant le point $P_{n,k}^{(h)}(G)$ un terme de la forme $\frac{c_{k,h}}{p^n}$. Ce terme est signe de l'existence d'un pôle dans $\Omega_{V,h}(g)$. Il disparaît si l'on remplace g par $\tilde{g} = (\chi(\gamma)^{-h}\gamma - 1)g$ (on a alors $D^h(\tilde{g})(0) = 0$), d'où la définition

$$\Omega_{V,h}(g) = (\chi(\gamma)^{-h}\gamma - 1)^{-1}\Omega_{V,h}(\tilde{g}) \ .$$

Il disparaît aussi lorsqu'on remplace par h par $h+1$ et cela s'explique par la formule :

$$\Omega_{V,h+1}(g) = \ell_h \Omega_{V,h}(g)$$

et le fait que $\chi(\gamma)^{-h}\gamma - 1$ divise l_h. Que peut-on dire du résidu, c'est-à-dire de $\pi_{0,-h}((\chi(\gamma)^{-h}\gamma-1)\Omega_{V,h}(g)$? D'après la deuxième formule, il s'agit de

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{0,-h}(\Omega_{V,h+1}(g)) = \tilde{P}_{0,-h}^{(h+1)} &= Tr_{K_1/K_0}(\tilde{P}_{0,-h}^{(h+1)}) \\ &= res_\infty \exp_{V(-h),f}(b_h \otimes e_h, (1-p^{-h+1}\varphi^{-1})D^h(\overline{G})(0)\otimes e_h) \ . \end{aligned}$$

Le cocycle associé (restreint à K_∞) est

$$\tau \mapsto (\tau - 1)Eul(D^h(g)([\epsilon]-1)t^h) \ .$$

On peut supposer que $b_h = D^h(g)(0)$ car

$$D^h(g)([\epsilon]-1)t^h \equiv \\ (1-\Phi)(D^h(G)([\epsilon]-1)t^h) + D^h(g)(0)t^h \mod (1-\Phi)(t^h \otimes \mathbf{D}_p(V)) \ .$$

Le premier terme disparaît lorsqu'on applique $(\tau-1)Eul$ pour $\tau \in G_{K_\infty}$, on obtient donc

$$(\tau-1)Eul(D^h(g)(0)t^h) \ .$$

Dans ce cas, $Eul(D^h(g)(0)t^h)$ appartient en fait à $\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr} \otimes \mathbf{D}_p(V(-h)) = \hat{\mathbb{Q}}_p^{nr} t^h \otimes \mathbf{D}_p(V)e_h$, où $\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$ est le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire que comme il est bien connu, on n'a pas besoin de passer dans ce cas à B_{cris}. Par exemple, prenons $V = \mathbb{Q}_p(h)$ et $D^h(g)(0) = 1$, on est donc en train de construire un élément de $H^1(K_\infty, \mathbb{Q}_p)^{G_\infty}$ par la recette

$$\tau \mapsto (\tau-1)Eul(t^h) \ .$$

Il s'agit en fait de résoudre l'équation $(1-\varphi)\Omega = 1$, ce qui se résoud dans $\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$. 0n a dans ce cas un isomorphisme

$$H^1_{f/e}(K, \mathbb{Q}_p) = H^1_{/e}(K, \mathbb{Q}_p) \cong H^1(K_\infty, \mathbb{Q}_p)^{G_\infty} = \mathrm{Hom}_{G_\infty}(G^{ab}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p)$$

Cette situation ne se produit pas si $V^{G_{K_\infty}} = 0$. On ne le voit non plus pas très bien si $V(-i)^{G_K} \neq 0$ pour un $i < h$ à cause des relations du type

$$\Omega_{V,h+1}(g) = \ell_h \Omega_{V,h}(g)$$

qui font disparaître le pôle. Cependant cela doit apparaître en théorie globale avec une bonne normalisation des "facteurs Γ".

4. Lois de réciprocité

On désigne toujours par γ un générateur fixé de Γ et on pose $\gamma_n = \gamma^{p^{n-1}}$.

4.1. L'application exponentielle duale. Ce paragraphe repose sur les théorèmes de Tate dont on rappelle ici l'énoncé : on note $\hat{K}_\infty$ le complété de K_∞.

4.1.1. Théorème. (Tate)

1. $H^1(K_\infty, \mathbb{C}_p) = 0$, $H^0(K_\infty, \mathbb{C}_p) = \hat{K}_\infty$ *;*
2. *Pour* $n \geq 1$*, il existe un unique isomorphisme* $T_{K_n} : \hat{K}_\infty/(\gamma_n - 1) \to K_n$ *induisant* $\frac{1}{p^{m-n}} Tr_{K_m/K_n}$ *sur* K_m *;*
3. $H^m(K_\infty/K_n, \hat{K}_\infty(i)) = 0$ *pour* $i \neq 0$ *;* $H^0(K_\infty/K_n, , \hat{K}_\infty) = K_n$ *et* $H^1(K_\infty/K_n, , \hat{K}_\infty) \cong K_n$ *où cette dernière application est donnée par*

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Gamma_n, \hat{K}_\infty) & = & \hat{K}_\infty/(\gamma_n - 1) & \to & K_n \\ c & \mapsto & c_{\gamma_n} & \mapsto & \frac{1}{\log \chi(\gamma_n)} T_{K_n}(c_\gamma) \end{array}$$

Avec cette normalisation, on a $T_{K_m} = p^{n-m} Tr_{K_n/K_m} \circ T_{K_n}$ pour $n \geq m \geq 1$. On a le diagramme commutatif pour $m \leq n$

$$\begin{array}{ccccc} H^1(K_\infty/K_n, \hat{K}_\infty) & \to & \hat{K}_\infty/(\gamma^{p^n}-1) & \to & K_n \\ res \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^1(K_\infty/K_m, \hat{K}_\infty) & \to & \hat{K}_\infty/(\gamma^{p^m}-1) & \to & K_m \end{array}$$

où la deuxième flèche verticale est donnée par $c \mapsto \sum_{i=0}^{p^{n-m}-1} \gamma^{ip^m} c$ et la troisième par l'inclusion. Remarquons aussi que si $x \in K_m$ avec $m \geq n \geq 1$, on a $T_{K_n}(x) = \frac{1}{p^{m-n}} Tr_{K_m/K_n}(x)$.

4.1.2. Construisons une famille d'applications $\lambda_{k,n} : B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \to K_n$ pour $n \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$.
On rappelle que $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} / \mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}} = \mathbb{C}_p(i)$ en tant que G_K-modules. La nullité de $H^1(K_\infty, \mathbb{C}_p)$ implique que $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} / \mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} = \hat{K}_\infty(i)$. On déduit alors de la nullité des $H^m(G_\infty, \hat{K}_\infty(i))$ pour $i \neq 0$ que $\gamma_n - 1$ est inversible sur $\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}}$ de même que sur $B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} / \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}}$ et donc que

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}}/(\gamma_n - 1) B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \cong & B_{\mathrm{dR}}^{+\,G_{K_\infty}}/(\gamma_n - 1) B_{\mathrm{dR}}^{+\,G_{K_\infty}} \\ = & B_{\mathrm{dR}}^{+\,G_{K_\infty}} / \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}{}^{G_{K_\infty}}/(\gamma_n - 1) \\ = & \hat{K}_\infty/(\gamma_n - 1)\hat{K}_\infty \ . \end{aligned}$$

En composant avec T_{K_n}, on obtient une application $\lambda_{0,n} : B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \to K_n$. Les applications $\lambda_{k,n} : B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}}/(\chi(\gamma_n)^{-k}\gamma_n - 1) B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \to K_n$ sont obtenues par twist :

$$B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \overset{\times t^{-k}}{\to} B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}}/(\gamma_n - 1) \overset{\lambda_{0,n}}{\to} K_n \ .$$

On a ainsi $\lambda_{k,n}(b) = \lambda_{0,n}(t^{-k} b)$.

Lemme. *Les applications $\lambda_{k,n}$ vérifient :*

1. $\lambda_{k,n}(\tau x) = \chi(\tau)^k \lambda_{k,n}(x)$ *;*
2. $Tr_{K_m/K_n}(\lambda_{k,n}(x)) = p^{m-n} \lambda_{k,n}(x)$ *pour* $m \geq n$.
3. *Soit* $G \in \mathcal{H}_\infty$. *Alors, pour* $m \geq n$ *et* $k \geq 0$

$$\lambda_{k,n}(G(\beta_m - 1)) = \frac{1}{p^{m-n}} \frac{Tr_{K_m/K_n}(D^k(G)(\zeta_m - 1))}{p^{mk} k!}$$

Démonstration. Démontrons la troisième assertion. Remarquons d'abord qu'il est facile de calculer $\lambda_{k,n}$ sur un élément de $K_m((t))$. En effet, si $\alpha \in K_m$ et $m \geq n$, on a $\lambda_{k,n}(\alpha t^i) = 0$ si $i \neq k$ et $\frac{1}{p^{m-n}} Tr_{K_m/K_n}(\alpha)$ si $i = k$. Le premier cas vient de ce que $\chi(\gamma_n)^{i-k}\gamma_n - 1$ est un isomorphisme sur $\hat{K}_\infty$, le deuxième de ce que $\lambda_{k,n}(\alpha t^i) = \lambda_{0,n}(\alpha) = T_{K_n}(\alpha)$.

Si on utilise le fait que $\beta_m = \zeta_m e^{t/p^m}$, on obtient que

$$G(\beta_m - 1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(G)(\zeta_m - 1)}{j!} \frac{t^j}{p^{mj}}$$

et donc que

$$\begin{aligned}\lambda_{k,n}(G(\beta_m - 1)) =& \lambda_{k,n}(\frac{D^k(G)(\zeta_m - 1)}{k!} \frac{t^k}{p^{mk}})\\ =& p^{n-m} \frac{Tr_{K_m/K_n}(D^k(G)(\zeta_m - 1))}{k! p^{mk}}\end{aligned}$$

□

Remarquons (ce qui a été utilisé dans la démonstration) que si $f = \sum_j a_j(f) t^j \in K_n((t))$, on a $\lambda_{k,n}(f) = a_k(f)$ et que l'on peut définir une application T_n de $K_\infty((t))$ dans $K_n((t))$ par $T_n(f) = p^{-n} \sum_k \lambda_{k,n}(f) t^k$. Un résultat important de Colmez est que T_n se prolonge en une application continue de $B_{\max}^{G_{K_\infty}}$ dans $K_n((t))$. Nous n'en avons pas besoin pour la démonstration de la loi de réciprocité pour l'application $\Omega_{V,h}$ que nous avons construite ici. Ce prolongement semble par contre fondamental dans l'extension qu'en donne Colmez.

4.1.3. Rappelons le théorème de Kato relatif à l'application exponentielle duale. Si W est une représentation p-adique de de Rham de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et L une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$, on note $\exp^*_{W^*(1),L,/u^*}$ l'application duale de l'application exponentielle $\exp_{W^*(1),L,u}$ avec $u \in \{e, f\}$ et $e^* = g$, $f^* = f$. On pose

$$\lambda_{W,L} = \exp^*_{W^*(1),L,/g} : H^1(L, W) \to L \otimes \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W) \ .$$

En notant par $< ., . >_{W,L}$ le cup produit :

$$H^1(L, W) \times H^1(L, W^*(1)) \to H^2(L, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p$$

et $[., .]_{\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W)}$ la dualité naturelle

$$L \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W) \times L \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W^*(1)) \to L \overset{Tr_{L/\mathbb{Q}_p}}{\to} \mathbb{Q}_p \ ,$$

on a donc par exemple la formule

$$< x, \exp_{W^*(1),L,e}(b) >_{W,L} = [\exp^*_{W^*(1),L,/g}(x), b]_{\mathbf{D}_p(W)} = [\lambda_{W,L}(x), b]_{\mathbf{D}_p(W)} \ .$$

On fera attention que

$$< \exp_{W,L,e}(a), y >_{W,L} = -[a, \exp^*_{W,L,/g}(y)]_{\mathbf{D}_p(W)} = -[a, \lambda_{W^*(1),L}(y)]_{\mathbf{D}_p(W)} \ .$$

Proposition. *L'application* $\lambda_{V(k),K_n} : H^1(K_n, V(k)) \to K_n \otimes \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ *peut se calculer de la manière suivante : soit* $\tau \mapsto c_\tau$ *un* *cocycle de* G_{K_n} *à valeurs dans* $B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *ayant même image que* $x \in H^1(K_n, V(k))$ *dans* $H^1(K_n, B_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ *; alors,*

$$\lambda_{V(k),K_n}(x) = \lambda_{-k,n}(\frac{c_{\gamma_n}}{\log \chi(\gamma_n)}) \ .$$

Démonstration. L'existence de c vient de ce que $H^1(K_\infty, B_{\mathrm{dR}} \otimes V) = 0$, ce qui implique que l'application inflation suivante est un isomorphisme :

$$H^1(G_\infty, (B_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{G_{K_\infty}}) = H^1(G_\infty, B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \stackrel{\cong}{\to} H^1(K, B_{\mathrm{dR}} \otimes V) \ .$$

Kato démontre que si x est représenté par un cocycle $\tau \mapsto d_\tau$, les deux cocycles de G_{K_n} à valeurs dans $B_{\mathrm{dR}} \otimes V$ donnés par $\tau \mapsto \lambda_{V,K_n}(x) \log \chi(\tau)$ et par $\tau \mapsto d_\tau$ ont même image dans $H^1(K_n, B_{\mathrm{dR}} \otimes V)$. Colmez remarque alors qu'on peut remplacer d par le cocycle $\tau \mapsto c_\tau$ ayant même image que d dans $H^1(K_n, B_{\mathrm{dR}} \otimes V)$. On en déduit que $\lambda_{V,K_n}(x) \log \chi(\gamma_n) \equiv c_{\gamma_n} \mod \gamma_n - 1$ et donc que

$$\lambda_{V,K_n}(x) \log \chi(\gamma_n) = \lambda_{0,n}(\lambda_{V,K_n}(x) \log \chi(\gamma_n)) = \lambda_{0,n}(c_{\gamma_n}) \ .$$

Pour passer à $V(k)$, il suffit de faire un twist convenable. □

REMARQUES : 1) L'image de $H^1(G_n, V^{G_{K_\infty}})$ dans $K_n \otimes \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ par $\lambda_{V,K}$ est égale à $V^{G_K} = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)^{\varphi=1}$. Notons $\tilde{\lambda}_{V(k),K_n}$ le composé de $\lambda_{V(k),K_n}$ avec la projection modulo $V(k)^{G_K}$.
2) On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(K,V) & & & & \\
\downarrow & & & & \\
H^1(K, B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) & \stackrel{\cup \log\chi}{\longleftarrow} & H^0(K, B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) & = & K \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \\
\cong\uparrow & & \downarrow & & || \\
H^1(G_\infty, B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) & \stackrel{\cup \log\chi}{\longleftarrow} & B_{\mathrm{dR}}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/(\gamma - 1) & \to & K \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)
\end{array}$$

où $\log \chi$ est vu comme élément de $H^1(K, \mathbb{Q}_p) = H^1(G_\infty, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{Hom}(G_\infty, \mathbb{Q}_p)$.

4.2. LOI DE RÉCIPROCITÉ (ENONCÉS).

4.2.1. THÉORÈME. (Colmez) *Soit* h *un entier tel que* $\mathrm{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. *Soit* $g \in \mathcal{D}_{\infty,e}(V)$, G *une solution compatible des équations* $(1 - p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. *Alors, pour tout entier* $k \leq -h$ *et pour tout entier* $n \geq 1$, *on a*

$$\tilde{\lambda}_{V(k),K_n}(\tilde{\pi}_{n,k}(\Omega_{V,h}(g))) \equiv \frac{p^{n(k-1)}(1 \otimes \varphi)^{-n} D^{-k}(G)(\zeta_n - 1)}{(-k-h)!} \otimes e_{-k} \mod V(k)^{G_K} \ .$$

Remarquons que sous les hypothèses du théorème, $V(k)^{G_K}=0$ sauf peut-être pour $k=-h$.
Rappelons que l'on a par définition même de $\Omega_{V,h}(g)$ les formules pour $k\geq 1-h$,

$$\begin{aligned}\log_{V(k),n}(\pi_{n,k}\Omega_{V,h}(g)) &\equiv (-1)^{h+k-1}(h+k-1)!\times\\ &\times p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(G)(\zeta_n-1)\otimes e_{-k}\mod \operatorname{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(k))\ .\end{aligned}$$

Pour uniformiser les formules, posons (cf. [5]) $\Gamma^*(k)=(k-1)!$ si $k>0$ et $(-1)^k/(-k!)$ si $k\leq 0$. On a encore l'équation fonctionnelle : $\Gamma^*(k+1)=k\Gamma^*(k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ sauf pour $k=0$. On obtient alors que

(4.2.1)

$$\frac{p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(G)(\zeta_n-1)}{\Gamma^*(-k-(h-1))}=\begin{cases}\log_{V(k),n}(\pi_{n,k}\Omega_{V,h}(g)) & \text{si } h+k-1>0\\ \lambda_{V(k),K_n}(\pi_{n,k}(\Omega_{V,h}(g))) & \text{si } h+k-1<0\end{cases}$$

On peut aussi remarquer que

$$\Gamma^*(-k)=\prod_{i=1}^{h-1}(-k-i).\Gamma^*(-k-(h-1))$$

à condition que $k\notin\{-h+1,\cdots-1\}$. Le produit $\prod_{i=1}^{h-1}(-k-i)$ est un produit de $h-1$ termes et c'est aussi la valeur de $\prod_{i=1}^{h-1}\ell_i$ sur le caractère χ^{-k}. On a donc aussi

$$\frac{p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(G)(\zeta_n-1)}{\Gamma^*(-k)}=\begin{cases}\log_{V(k),n}(\Omega_{V,1}(g)) & \text{si } k\geq 0\\ \lambda_{V(k),K_n}(\pi_{n,k}(\Omega_{V,1}(g))) & \text{si } k\leq -h\end{cases}$$

en posant $\Omega_{V,1}=(\prod_{i=1}^{h-1}\ell_i)^{-1}\Omega_{V,h}$. On a en effet alors

$$\pi_{n,k}(\Omega_{V,1}(g))=(\prod_{i=1}^{h-1}(-i-k))^{-1}\pi_{n,k}(\Omega_{V,h})$$

On a bien sûr perdu un certain nombre de termes.

4.2.2. Il est commode de transformer le théorème 4.2.1 et de le mettre sous la forme de la conjecture Réc(V) de [4]. Cela permettra ensuite d'obtenir de nouvelles formules que nous donnerons dans le §5.2. Nous supposons dans la fin du §4.2 que V est une représentation cristalline.
Rappelons que l'on a un accouplement naturel sesquilinéaire par rapport à l'involution ι induite par $\tau\mapsto\tau^{-1}$

$$Z^1_\infty(K,V)\times Z^1_\infty(K,V^*(1))\to\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$$

donnée par

$$<x,y>_V=\lim_{\substack{\leftarrow\\ n}}\sum_{\tau\in G_n}<\tau^{-1}\pi_{n,0}(x),\pi_{n,0}(y)>_{V,K_n}\tau$$

où $< \, , \, >_{V,K_n}$ est l'accouplement de Kummer $H^1(K_n,V)\times H^1(K_n,V^*(1))\to \mathbb{Q}_p$. Il vérifie pour tout entier i

$$Tw^{-i}(< x,y >_V) =< Tw^i(x), Tw^{-i}(y) >_{V(i)} \quad .$$

On a d'autre part l'accouplement naturel

$$\mathbf{D}_p(V)\times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p \ .$$

On prolonge respectivement ces deux accouplements par extension des scalaires à $\mathcal{K}(G_\infty)$:

$$< \ ., \ . >_V : \mathcal{K}(G_\infty)\otimes_\Lambda Z^1_\infty(K,V)\times \mathcal{K}(G_\infty)\otimes_\Lambda Z^1_\infty(K,V^*(1)) \to \mathcal{K}(G_\infty)$$

et

$$[\ ., \ .]_{\mathbf{D}_p(V)} : \mathcal{K}(G_\infty)\otimes_\Lambda \mathbf{D}_p(V)\times \mathcal{K}(G_\infty)\otimes_\Lambda \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathcal{K}(G_\infty)$$

On note de la même manière l'accouplement qui s'en déduit sur $\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes \mathbf{D}_p(V)\times \mathcal{H}_\infty^{\psi=0}\otimes \mathbf{D}_p(V)$. Notons encore ι l'involution de $\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}$ correspondant à l'involution ι précédemment définie sur $\mathcal{H}(G_\infty)$. Enfin, notons σ_{-1} l'élément de G_∞ agissant sur les racines de l'unité par $\zeta\mapsto\zeta^{-1}$. On a donc $\sigma_{-1}(1+T) = (1+T)^{-1}$.

4.2.3. Théorème. (Réc(V)) *Supposons que V est une représentation cristalline. On a pour tout entier h*

$$<\Omega_{V,h}(g_1), \sigma_{-1}\Omega_{V^*(1),1-h}(g_2)>_V .(1+T) = (-1)^h[g_1, \iota(g_2)]_{\mathbf{D}_p(V)} \ .$$

Autrement dit, l'inverse de $\Omega_{V,h}$ est au signe près l'adjoint de $\Omega_{V^*(1),1-h}$.

Ainsi, au lieu de commencer à construire $\Omega_{V,h}$ à partir des exponentielles de Bloch-Kato, on aurait pu construire $\Omega^*_{V^*(1),1-h}$ à partir de l'exponentielle duale, ou son inverse, ou l'adjoint de son inverse. Remarquons que l'application $\Omega_{V,h}$ dépend du choix de ϵ. Appliquer σ_{-1} revient à changer ϵ en ϵ^{-1}.
Nous donnerons au §5 les formules sur l'application inverse $\mathcal{L}_{V,h}$ de $\Omega_{V,h}$ se déduisant de ce théorème.

Démonstration. Montrons comment le théorème 4.2.3 se déduit du théorème 4.2.1. On s'appuie sur les formules données dans l'appendice A.2. On vérifie facilement que cela ne dépend pas de h, on prend alors h tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. Soit h^* tel que $\mathrm{Fil}^{-h^*}\,\mathbf{D}_p(V^*(1)) = \mathbf{D}_p(V^*(1))$. On a alors $\mathrm{Fil}^{h^*}\,\mathbf{D}_p(V) = 0$. Prenons k tel que $-k\geq 1-h$ et $k< -h^*$. On pose $x = \Omega_{V,h}(g_1)$ et $y = \Omega_{V^*(1),h^*}(g_2)$. On note encore abusivement $\pi_{n,k}$ la projection $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,T^*(1))\to H^1(K_n,V^*(1)(k))$. On a alors

$$\begin{aligned}
&s_{n,k}(<\Omega_{V,h}(g_1),\Omega_{V^*(1),1-h}(g_2)>_V)\\
&\quad = s_{n,k}(<\Omega_{V,h}(g_1),(\prod_{-h<j<h^*}\ell_j)^{-1}\Omega_{V^*(1),h^*}(g_2)>_V)\\
&\quad = s_{n,k}(<(\prod_{-h<j<h^*}-\ell_{-j})^{-1}x,y>_V)\\
&\quad = \frac{(-k-h^*)!}{(-k+h-1)!}<\pi_{n,-k}(x),\pi_{n,k}(y)>_{V(-k),K_n}
\end{aligned}$$

car $\pi_{n,-k}(\ell_{-j}x)=(j+k)\pi_{n,-k}(x)$;

$$=-\frac{(-k-h^*)!}{(-k+h-1)!}Tr_{K_n/K}([\log_{V(-k),K_n}\pi_{n,-k}(x),\lambda_{V(k),K_n}(\pi_{n,k}(y))]_{\mathbf{D}_p(V(-k))})$$

(remarquons que $\pi_{n,-k}(x)\in H^1_e(K_n,V(-k))$ sous les hypothèses faites sur k : $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-k))=0$; le signe $-$ provient de 4.1.3). Exprimons le dernier terme à l'aide de g_1 et g_2. Avec $(1-p^k\Phi)D^k(G_1)=D^k(g_1)$ et $(1-p^{-k}\Phi)D^{-k}(G_2)=D^{-k}(g_2)$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{(-k-h^*)!}{(-k+h-1)!}<\pi_{n,-k}(x),\pi_{n,k}(y)>_{V(-k),K_n}\\
&\quad =(-1)^{h-k}p^{-n}Tr_{K_n/K}([D^k(G_1)(\zeta_n-1),D^{-k}(G_2)(\zeta_n-1)]_{\mathbf{D}_p(V(-k))})
\end{aligned}$$

en utilisant les formules (4.2.1) et

$$[\varphi u,\varphi v]_{\mathbf{D}_p(V(-k))}=p^{-1}[u,v]_{\mathbf{D}_p(V(-k))}\ .$$

Ce qui vaut pour $n\geq 1$,

$$(-1)^{h-k}p^{-n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}}[D^k(G_1)(\zeta-1),D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\ .$$

On remarque que pour $n>1$

$$\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}}[D^k(G_1)(\zeta^p-1),D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}=0$$

car $\psi(g_2)=0$ et idem en renversant les rôles de G_2 et G_1. Donc,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}}[D^k(G_1)(\zeta-1),D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\qquad =\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}}[D^k(g_1)(\zeta-1),D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\qquad\quad +p.p^{-1}\sum_{\zeta\in\mu_{p^{n-1}}-\mu_{p^{n-2}}}[D^k(G_1)(\zeta-1),D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}
\end{aligned}$$

En recommençant, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}} &[D^k(G_1)(\zeta-1), D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &= \sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_p}[D^k(g_1)(\zeta-1), D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &\quad + \sum_{\zeta\in\mu_p-\{1\}}[D^k(G_1)(\zeta-1), D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}&\sum_{\zeta\in\mu_p-\{1\}}[D^k(G_1)(\zeta-1), D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &=\sum_{\zeta\in\mu_p}[D^k(G_1)(\zeta-1), D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)} - [D^k(G_1)(0), D^{-k}(G_2)(0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &=\sum_{\zeta\in\mu_p}[D^k(g_1)(\zeta-1), D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &\qquad + [D^k(G_1)(0), D^{-k}(G_2)(0)]_{\mathbf{D}_p(V)} - [D^k(G_1)(0), D^{-k}(G_2)(0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &=\sum_{\zeta\in\mu_p}[D^k(g_1)(\zeta-1), D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\end{aligned}$$

D'où l'égalité pour $n\geq 1$

$$\begin{aligned}p^{-n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}-\mu_{p^{n-1}}}&[D^k(G_1)(\zeta-1), D^{-k}(G_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &= p^{-n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}} D^k(g_1)(\zeta-1), D^{-k}(g_2)(\zeta-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\ .\end{aligned}$$

Comme $D^{-k}\circ\sigma_{-1} = (-1)^k\sigma_{-1}D^k$, on obtient finalement que pour $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}&s_{n,k}(<\Omega_{V,h}(g_1), \Omega_{V^*(1),1-h}(g_2)>_V)\\ &\qquad = (-1)^h p^{-n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}}[D^k(g_1)(\zeta-1), D^{-k}(\sigma_{-1}g_2)(\zeta^{-1}-1)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &\qquad = (-1)^h s_{n,k}([\hat{g}_1, \sigma_{-1}\hat{g}_2^{\iota}]_{\mathbf{D}_p(V)})\end{aligned}$$

L'égalité ayant lieu pour tout k inférieur à h et à $-h^*$, on en déduit que

$$<\Omega_{V,h}(g_1), \Omega_{V^*(1),1-h}(g_2)>_V = (-1)^h[\hat{g}_1, \sigma_{-1}\hat{g}_2^{\iota}]_{\mathbf{D}_p(V)}\ ,$$

ou ce qui revient au même que

$$<\Omega_{V,h}(g_1), \Omega_{V^*(1),1-h}(g_2)>_V .(1+T) = (-1)^h[g_1, \sigma_{-1}g_2^{\iota}]_{\mathbf{D}_p(V)}\ .$$

□

4.2.4. Avant de passer à la démonstration de la loi de réciprocité, montrons comment elle permet de transformer l'inégalité

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) \leq h + \mathfrak{o}_\varphi(g)$$

pour $g \in \mathcal{D}_{\infty,f}(V)$ en égalité. On a de même

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V^*(1),h^*}(g^*)) \leq h^* + \mathfrak{o}_\varphi(g^*)$$

pour $g^* \in \mathcal{D}_{\infty,f}(V^*(1))$ avec h^* comme précédemment. Choisissons g^* de manière à ce que $\mathfrak{o}_\varphi(g) + \mathfrak{o}_\varphi(g^*) = \mathfrak{o}_\varphi([g, \sigma_{-1}g^{*\iota}]_{\mathbf{D}_p(V)})$. Les inégalités déjà montrées et le théorème 4.2.3 impliquent alors que

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) + \mathfrak{o}(\Omega_{V,h^*}(g^*)) &\leq \mathfrak{o}_\varphi(g) + h + \mathfrak{o}_\varphi(g^*) + h^* \\ &\leq \mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) + \mathfrak{o}(\Omega_{V,h^*}(g^*))\end{aligned}$$

à cause du terme $(\prod_{-h<j<h^*} \ell_j)^{-1}$. On en déduit l'égalité

$$\mathfrak{o}(\Omega_{V,h}(g)) = h + \mathfrak{o}_\varphi(g)\ .$$

4.3. Loi de réciprocité (Démonstration). Soient g un élément de $\mathcal{D}_{\infty,e}(V)$ et $\overline{G}$ une solution compatible des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. On suppose que g est $p^{-u}\varphi^-$-bornée, ce qui assure que $\Omega_{V,h}(g)$ appartient à $\mathcal{H}_{(h+u)^-}(G_\infty)\otimes\tilde{Z}^1_\infty(K,T)$. Au cours de la construction de $\Omega_{V,h}(G)$, nous avons construit explicitement (lemme 3.4.3) un cocycle $Z_{n,k,\tau}$ de G_{K_n} à valeurs dans V représentant $\pi_{n,k}(\Omega_{V,h}(G))$ pour $n \geq 0$ et $k+h-1 \geq 0$: pour $\tau \in G_{K_n}$,

$$Z_{n,k,\tau} = (\chi(\tau)^k\tau - 1)(e_{n,k})$$

avec $e_{n,k} = c_{n,k} - Eul((1-\varphi)c_{n,k})$ et $c_{n,k} = S^{(h)}_{n,k,cris}(G)$. Une remarque fondamentale de P. Colmez est qu'on peut retrouver G à partir d'un tel cocycle :

4.3.1. Proposition. *Soit g un élément $p^{-u}\varphi^-$-borné de $\mathcal{H}^{\psi=0}_\infty \otimes \mathcal{D}$ et et $\overline{G}$ une solution des équations $(1-p^r\Phi)\mathcal{G}_r = D^r(g)$. Alors, la suite $p^m\sum_{j=0}^{u+h-1}(-1)^j\binom{u+h-1}{j}e_{m,j-h+1}$ converge dans $(B_{\max}^{G_{K_\infty}}\otimes\mathbf{D}_p(V))^{\Phi=p^u}$ et on a pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier k tel que $k+u \geq 0$,*

$$\lambda_{k,n}(\lim_{m\to\infty} p^m \sum_{j=0}^{u+h-1}(-1)^j\binom{u+h-1}{j}e_{m,j-h+1}) = \frac{(u+h-1)!}{(k+u)!}\frac{(1\otimes\varphi)^{-n}D^k(G)(\zeta_n-1)}{p^{nk}}\ .$$

Remarquons que pour $k+u<0$, le membre de gauche est nul.

Démonstration. La limite de $p^m\sum_{j=0}^{u+h-1}(-1)^j\binom{u+h-1}{j}S^{(h)}_{n,j-h+1,cris}(g)$ est nulle (3.4.5, c'est d'ailleurs un argument essentiel dans l'existence de l'homomorphisme $\Omega_{V,h}$) et donc par continuité de Eul, il s'agit d'étudier la limite de

$$p^m \sum_{j=0}^{u+h-1} (-1)^j \binom{u+h-1}{j} S^{(h)}_{n,j-h+1,cris}(G) \ .$$

Nous avons calculé dans le §3.4.5 (avec g à la place de G, mais le calcul est bien sûr identique)

$$\sum_{j=0}^{u+h-1} (-1)^j \binom{u+h-1}{j} S^{(h)}_{m,j-h+1,cris}(G) =$$
$$= (u+h-1)!p^{m(u-1)}\Phi^{-m}D^{-u}(G)([\epsilon]-1)t^{-u}$$

On utilise alors le lemme suivant :

LEMME. *Si g est $p^{-u}\varphi^{-}$-bornée, alors, $p^{mu}\Phi^{-m}D^{-u}(G)([\epsilon]-1))$ a une limite dans $(B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=p^u}$.*

Démonstration. On s'appuie sur le fait que si $F \in \mathcal{H}_\infty$, $F(\beta_m-1)$ existe dans $B^+_{\max}$ et que l'on a

$$(4.3.1) \qquad ||F(\beta_m-1)||_{\max} \sim ||F||_{\rho_m} \ ,$$

(le symbole $\sim$ signifiant que $||F||_{\rho_m} \leq ||F(\beta_m-1)||_{\max} \leq p||F||_{\rho_m}$). Rappelons que $D^{-u}(g) = (1-p^{-u}\Phi)D^{-u}(G)$ et que $\psi(D^{-u}(g)) = 0$. Posons $u_m = p^{mu}\Phi^{-m}D^{-u}(G)([\epsilon]-1) = p^{mu}(1\otimes\varphi)^{-m}D^{-u}(G)(\beta_m-1)$. On a

$$\begin{aligned} u_m - u_{m-1} =& p^{mu}\Phi^{-m}(1-p^{-u}\Phi)(D^{-u}(G))([\epsilon]-1) \\ =& p^{mu}\Phi^{-m}(D^{-u}(g)([\epsilon]-1)) \ . \end{aligned}$$

On a grâce à 3.1.1

$$||u_m - u_{m+1}||_{\max} \sim ||p^{mu}(1\otimes\varphi)^{-m}f||_{\rho_m}$$

Comme g est par hypothèse $p^{-u}\varphi^{-}$-borné, il en est de même de $D^{-u}(g)$ (voir 1.3, 1.4) ; $u_m - u_{m+1}$ tend donc vers 0 dans $B^+_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ et la suite (u_m) converge dans $B^+_{\max} \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Il est clair que sa limite est fixe par G_{K_∞} puisque ce groupe de Galois laise fixe les β_m. Comme $p^{-u}\Phi(u_{m+1}) = u_m$, elle appartient à $(B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=p^u}$ □

On déduit de ce qui précède que

$$\lambda_{k,n}(\lim_{m\to\infty} p^m \sum_{j=0}^{u+h-1} (-1)^j \binom{u+h-1}{j} \mathcal{S}_{m,j-h+1,cris}(G)) =$$
$$= (u+h-1)!\lambda_{k,n}(\lim_{m\to\infty} p^{mu}\Phi^{-m}D^{-u}(G)([\epsilon]-1)t^{-u})$$
$$= (u+h-1)! \lim_{m\to\infty} \lambda_{k+u,n}(p^{mu}\Phi^{-m}D^{-u}(G)([\epsilon]-1))$$
$$= \frac{(u+h-1)!}{(k+u)!} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{m-n}} \frac{Tr_{K_m/K_n}(p^{mu}(1\otimes\varphi)^{-m}D^k(G)(\zeta_m-1)}{p^{m(k+u)}}$$

pour $k+u \geq 0$. Comme $\Psi((1-p^k\Phi)(D^k(G)))=0$, on a

$$\sum_{\zeta\in\mu_p} D^k(G)(\zeta(1+T)-1) = p^{k+1}(1\otimes\varphi)D^k(G)((1+T)^p-1)\ . \tag{4.3.2}$$

On en déduit que

$$Tr_{K_m/K_n}((1\otimes\varphi)^{-m}(D^k(G)(\zeta_m-1)) = \\ p^{(k+1)(m-n)}(1\otimes\varphi)^{m-n}D^k(G))(\zeta_n-1)\ ,$$

d'où,

$$\frac{1}{p^{m-n}}\frac{Tr_{K_m/K_n}(p^{mu}(1\otimes\varphi)^{-m}D^k(G)(\zeta_m-1)}{p^{m(k+u)}} = \frac{(1\otimes\varphi)^{-n}D^k(G)(\zeta_n-1)}{p^{kn}}\ .$$

On en déduit la proposition. □

4.3.2. Posons pour simplifier $\tilde{h}=h+u$. Notons $A_{max,v}=t^{-v}A_{\max}$. On a des applications

$$\alpha : H^1(G_\infty, \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes(A_{\max,v}^{G_{K_\infty}}\otimes \mathbf{D}_p(V))) \\ \to H^1(K_\infty, \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes(A_{\max,v}^{G_{K_\infty}}\otimes \mathbf{D}_p(V)))$$

et

$$\beta : \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,T) \to H^1(K, \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes V) \\ \to H^1(K_\infty, \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes(A_{\max,v}^{G_{K_\infty}}\otimes \mathbf{D}_p(V)))$$

Lemme. *Il existe un élément z' de $H^1(G_\infty, \mathcal{H}_{\tilde{h}^-}(G_\infty)\otimes(A_{\max,v}^{G_{K_\infty}}\otimes V))$ tel que $\alpha(z)=\beta(\Omega_{V,h}(g))$.*

La démonstration utilise les résultats du type de ceux de Tate et de Sen. On renvoie à [1, chap. IV,§1-3 et lemme VI.3.2].
Choisissons un cocycle Z' représentant z'. Pour $j+h-1\geq 0$, l'image de $\Omega_{V,h}(g)$ dans $H^1(K_n,(B_{\max}\otimes V(j))^{\varphi=1})$ est nulle, il en est donc de même de celle de z' et on a donc $\pi_{n,j}(Z'_\tau)=(\tau-1)*_j d_{n,j}=(\chi(\tau)^j\tau-1)d_{n,j}$.

Lemme. *Avec les notations précédentes, la suite $p^m\sum_{j=0}^{u+h-1}(-1)^j\binom{u+h-1}{j}d_{m,j-h+1}$ a une limite dans $(B_{\max}^{G_{K_\infty}}\otimes\mathbf{D}_p(V))^{\Phi=p^u}$ et pour tout entier $n\geq 0$ et tout entier k tel que $k+u\geq 0$, on a*

$$\lambda_{k,n}(\lim_{m\to\infty}p^m\sum_{j=0}^{u+h-1}(-1)^j\binom{u+h-1}{j}d_{m,j-h+1}) = \\ \frac{(u+h-1)!}{(k+u)!}\frac{(1\otimes\varphi)^{-n}D^k(G)(\zeta_n-1)}{p^{nk}}\ .$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la limite de

$$p^m \sum_{j=0}^{u+h-1} (-1)^j \binom{u+h-1}{j} (d_{m,j-h+1} - e_{m,j-h+1})$$

est nulle. Or si Z est le cocycle représentant $\Omega_{V,h}(g)$ tel que

$$\pi_{m,k}(Z)_\tau = (\tau - 1)(e_{m,k}) \ ,$$

on a $Z_\tau - Z'_\tau = (\tau - 1)(B)$ avec $B \in \mathcal{H}_{\tilde{h}^-} \otimes (A_{\max,v}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))$ et donc $e_{m,j-h+1} - d_{m,j-h+1} = s_{m,j-h+1}(B)$. Il s'agit donc de montrer que

$$\lim_{m\to\infty} p^m \sum_{j=0}^{\tilde{h}-1} (-1)^j \binom{\tilde{h}-1}{j} \pi_{m,j-h+1}(B) = 0 \ ,$$

ce qui se déduit du fait que B appartient à $\mathcal{H}_{\tilde{h}^-} \otimes A_{\max,v} \otimes \mathbf{D}_p(V)$. □

4.3.3. Prenons donc un cocycle Z' comme dans le paragraphe précédent et posons $\tilde{Z} = Z'_\gamma$. Avec les notations précédentes, on a pour $i + h - 1 > 0$,

$$\pi_{m,i}(Z')_\tau = (\tau - 1) *_i d_{m,i} = (\chi(\tau)^i \tau - 1) d_{m,i}$$

avec $d_{m,i} \in (A_{\max,v}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=1}$ et $\tau \in G_{K_m}$. D'où, pour $i + h - 1 \geq 0$,

$$\pi_{m,i}(Z')_{\gamma_m} = (\chi(\gamma_m)^i \gamma_m - 1) d_{m,i}$$

et pour $k \neq i$

$$\lambda_{-k,n}(d_{m,i}) = \frac{1}{\chi(\gamma_m)^{-k+i} - 1} \lambda_{-k,n}(\pi_{m,i}(Z')_{\gamma_m}) \ .$$

Commençons par faire le cas où $m \geq n = 1$. Dans l'appendice A, est fait le calcul explicite de $\pi_{m,i}(Z')$. Si $R_{m,i}(\tilde{Z})$ est le polynôme d'interpolation de $Tw^i \tilde{Z}$ modulo $\gamma_m - 1$ vu comme élément de $\mathbb{Z}_p[G_m] \otimes M$, on a

$$\lambda_{-k,1}(\pi_{m,i}(Z')_{\gamma_m}) =< \chi >^{k-i} (R_{m,i}(\tilde{Z}))$$

avec $M = (A_{\max,v}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=1}$. D'où

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \lambda_{-k,1}(\sum_{j=0}^{\tilde{h}-1} (-1)^j \binom{\tilde{h}-1}{j} p^m d_{m,j-h-1}) \\ &\qquad = \lambda_{-k,1}(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\tilde{h}-1} (-1)^j \binom{\tilde{h}-1}{i} \frac{p^m < \chi >^{k-j+h-1} (R_{m,j-h+1}(\tilde{Z}))}{< \chi > (\gamma_m)^{j-h+1-k} - 1}) \ . \end{aligned}$$

On applique alors la proposition de l'appendice B à $Tw^{-h+1}\tilde{Z}$ (avec k remplacé par $k + h - 1$, h par $\tilde{h}$ et $< \chi > (\gamma)$ par $< \chi > (\gamma)^{-1}$) et on obtient que pour

k n'appartenant pas à $\{1-h, \cdots, u\}$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{-k,1}(\sum_{j=0}^{\tilde{h}-1}(-1)^j \binom{\tilde{h}-1}{j} p^m d_{m,j-h-1})$$
$$= (-1)^{\tilde{h}} \frac{(\tilde{h}-1)!}{(k+h-1)\cdots(k-u)} \frac{\lambda_{-k,1}(<\chi>^k(\tilde{Z}))}{\log <\chi>(\gamma)}$$

Lorsque n est quelconque (avec toujours $m \geq n$), on décompose $\pi_{m,i}(Z')_{\gamma_m}$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $\pi_{m,i}(Z')^{(j)}_{\gamma_m}\gamma^j \in \mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K_m/K_n)]\gamma^j$ pour j compris entre 0 et $p^{n-1}-1$, ce qui revient à remplacer le groupe Γ par le groupe Γ_n, on utilise le fait que $\lambda_{-k,n}(\tau x) =<\chi>^{-k}(\tau)\lambda_{-k,n}(x)$ pour $\tau \in \Gamma_n$ (cela n'est pas vrai pour γ^j avec $j = 0, \cdots, p^{n-1}-1$) et on procède ensuite de la même manière. On obtient alors de nouveau que pour k n'appartenant pas à $\{1-h, \cdots, u\}$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{-k,n}(\sum_{j=0}^{\tilde{h}-1}(-1)^j \binom{\tilde{h}-1}{j} p^m d_{m,j-h-1})$$
$$= (-1)^{\tilde{h}} \frac{(\tilde{h}-1)!}{(k+h-1)\cdots(k-u)} \frac{\lambda_{-k,n}(<\chi>^k(\tilde{Z}))}{\log <\chi>(\gamma)}$$

Le premier membre vaut pour $-k+u \geq 0$,

$$\frac{(\tilde{h}-1)!}{(-k+u)!} p^{nk}(1\otimes\varphi)^{-n} D^{-k}(G)(\zeta_n - 1) .$$

D'où,

$$\frac{(\tilde{h}-1)!}{(-k+u)!} p^{nk}(1\otimes\varphi)^{-n} D^{-k}(G)(\zeta_n - 1) =$$
$$(-1)^{\tilde{h}} \frac{(\tilde{h}-1)!}{(k+h-1)\cdots(k-u)} \frac{\lambda_{-k,n}(<\chi>^k(\tilde{Z}))}{\log \chi(\gamma)} .$$

Grâce au lemme de Kato

$$\frac{\lambda_{-k,n}(<\chi>^k(\tilde{Z}))}{p^n \log \chi(\gamma)} = \lambda_{V(k),n}(\pi_{n,k}(z)) .$$

D'où,

$$\lambda_{V(k),K_n,/g}(\pi_{n,k}(z)) =$$
$$\frac{(-1)^{\tilde{h}}(k+h-1)\cdots(k-u)}{(-k+u)!} p^{(k-1)n}(1\otimes\varphi)^{-n} D^{-k}(G)(\zeta_n - 1)$$

pour $k-u<0$ et $k \neq 1-h, \ldots, u$, c'est-à-dire $k < 1-h$. En posant $\tilde{k} = k-u$ (on a toujours $\tilde{h} = h+u$), on trouve que le coefficient dans le membre de droite est

$$C = \frac{(-1)^{\tilde h}(\tilde k + \tilde h - 1)\cdots \tilde k}{(-\tilde k)!} = \frac{\tilde k' \cdots (\tilde k' - \tilde h + 1)}{\tilde k'!}$$

avec $\tilde k' = -\tilde k \geq h$

$$= \frac{1}{(\tilde k' - \tilde h)!} = \frac{1}{(-k-h)!} \ .$$

D'où,

$$\lambda_{V(k),K_n}(\pi_{n,k}(z)) = \frac{p^{n(k-1)}(1\otimes\varphi)^{-n}D^{-k}(G)(\zeta_n - 1)}{(-k-h)!}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 4.2.1.

5. Quelques conséquences

On suppose dans ce paragraphe V cristalline. Nous trouvons commode d'identifier ici $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ avec $\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$ et $\mathcal{H}(G_\infty)$ avec $\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}$ par l'application induite par $\tau \mapsto (1+T)^{\chi(\tau)}$ pour $\tau \in G_\infty$. On a donc canoniquement $\mathcal{D}_{\infty,f}(V) = \mathcal{H}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V)$.
Pour tout entier r, on note $\mathcal{L}_{V,r}$ l'inverse de $\Omega_{V,r}$. Il est donc à valeurs dans $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$.

5.1. Déterminant et inverse de $\Omega_{V,h}$.

Si $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, on note $\delta_h(\Omega_V)$ l'idéal suivant de $\mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{K}(G_\infty)$: c'est l'image par l'application déterminant $\det\Omega_{V,h}$ du $\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$-module $\det_{\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda}(\Lambda\otimes\mathbf{D}_p(V))\otimes \otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_{\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda} Z^i_\infty(K,V))^{(-1)^i}$ où $Z^2_\infty(K,V) = \mathbb{Q}_p \otimes \varprojlim_n H^2(K_n,T) \cong (V^*(1)^{G_{K_\infty}})^*$. Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathcal{B}'$ un système libre de $Z^1_\infty(K,T)$ engendrant un Λ-module Z de $Z^1_\infty(K,T)$, si $\det_{\mathcal{B}'}\Omega_{V,h}(\mathcal{B})$ est le déterminant de $\Omega_{V,h}$ dans les systèmes libres $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, si $F_{Z^1_\infty(K,T)/\mathcal{B}}$ est une série caractéristique du module $Z^1_\infty(K,T)/Z$ et $F_{T^*(1)^{G_{K_\infty}}}$ une série caractéristique de $T^*(1)^{G_{K_\infty}}$, on a

$$\delta_h(\Omega_V) = F_{Z^1_\infty(K,T)/\mathcal{B}}(F^\iota_{T^*(1)^{G_{K_\infty}}})^{-1}\det_{\mathcal{B}'}\Omega_{V,h}(\mathcal{B})\Lambda \ .$$

On pose ensuite

$$\delta(\Omega_V) = \prod_{j>-h} \ell_{-j}^{-\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\,\mathbf{D}_p(V)}\delta_h(V)$$

qui est indépendant de h à condition que $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. Il est démontré dans [4] que $\delta(V)$ est contenu dans $\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$ et que (Réc(V)) implique que $\delta(V) = \mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$. On obtient ainsi le théorème.

5.1.1. Théorème. *($\delta(V)$) Si V est une représentation cristalline, alors*

$$\delta(\Omega_V) = \mathbb{Q}_p \otimes \Lambda \ .$$

Soit $h \geq 1$ tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. On déduit de $\delta(V)$ que

$$\mathcal{L}_h(z) \in \prod_{j>-h} \ell_{-j}^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_p(V)} (F^{\iota}_{T^*(1)^{G_{K_\infty}}})^{-1} \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V) \ .$$

En particulier, si $Frac(\Lambda)$ est l'anneau total des fractions de Λ,

$$\mathcal{L}_h(z) \in \prod_{j>-h} \ell_{-j}^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_p(V)} Frac(\Lambda) \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V) \ .$$

Soit $h^* \geq 1$ tel que $\mathrm{Fil}^{h^*}\mathbf{D}_p(V) = 0$ (remarquons que cela est équivalent à dire que $\mathrm{Fil}^{-h^*}\mathbf{D}_p(V^*(1)) = \mathbf{D}_p(V^*(1))$). Dans le cas où V contient $\mathbb{Q}_p(h)$, (resp. où $V^*(1)$ contient $\mathbb{Q}_p(h^*)$), on augmente h (resp. h^*) de 1. En utilisant le fait que $V^*(1)^{G_{K_\infty}}$ est de la forme $\oplus_{j\in J} V^*(1)(-j)^{G_K}(j)$ avec J un sous-ensemble de $]-h^*, \ldots h[$, on en déduit qu'il existe des entiers α_j pour $-h < j < h^*$ tels que $\mathcal{L}_{V,h}(\prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}^{\alpha_j} x) \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$. On a en fait la proposition plus précise suivante.

5.1.2. Proposition. *Si $x \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$, alors*

$$\mathcal{L}_{-h^*}(x) = \prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j} \mathcal{L}_h(x)$$

appartient à $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$.

Remarquons que $x' = \prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j} x$ vérifie automatiquement la condition que $\pi_{n,k}(x') \in H^1_e(K_n, V(k))$ pour tout $k \geq 1-h$.

Démonstration. Soit $g = \mathcal{L}_{V,h}(\prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}^{\alpha_j} x) \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ avec $\alpha_j \geq 1$. On désire montrer que si $\alpha_j \geq 2$, il est possible de diviser g par ℓ_{-j} dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$, c'est-à-dire que g s'annule sur tout caractère du type $\chi^{-j}\eta$ avec η d'ordre fini. Soit $g_2 \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$ quelconque, on a alors en remarquant que $\Omega_{V^*(1),1-h} = (\prod_{-h<j<h^*} l_j)^{-1} \Omega_{V^*(1),h^*}$

$$\begin{aligned}(-1)^h [g, \sigma_{-1} g_2^{\iota}]_{\mathbf{D}_p(V)} &= < \Omega_{V,h}(g), (\prod_{-h<j<h^*} l_j)^{-1} \Omega_{V^*(1),h^*}(g_2) >_V \\ &= < \prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}^{\alpha_j - 1} x, \Omega_{V^*(1),h^*}(g_2) >_V \in \prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}^{\alpha_j-1} \mathcal{H}(G_\infty) \ .\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Ainsi, si $\alpha_j \geq 2$, le dernier terme est nul sur tout caractère $\eta\chi^{-j}$; comme g_2 est quelconque, cela implique qu'il en est de même de g qui est donc divisible par ℓ_{-j}. □

5.1.3. PROPOSITION. *Soit J un ensemble fini d'entiers contenu dans $\{-h+1,\ldots,h^*-1\}$ et J^c le complémentaire de J dans $\{-h+1,\ldots,h^*-1\}$. On suppose que $x\in\mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,T)$ vérifie $\pi_{n,k}(x)\in H^1_e(K_n,V(k))$ pour tout entier $n\geq 0$ et pour tout $k\in J$. Alors, $g_x^{h,h^*,J}=\prod_{j\in J^c}\ell_{-j}\mathcal{L}_h(x)$ appartient à $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$. Autrement dit, $\prod_{j\in J^c}\ell_{-j}.x$ appartient à l'image de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$ par $\Omega_{V,h}$. De plus, $\mathfrak{o}_\varphi(g_x^{h,h^*,J})=\mathfrak{o}(x)+h^*-\sharp J-1$.*

Démonstration. On prend $g=\mathcal{L}_{V,h}(\prod_{-h<j<h^*}\ell_{-j}x)$. On a alors comme précédemment

$$(-1)^h[g,\sigma_{-1}g_2^\iota]_{\mathbf{D}_p(V)}=<x,\Omega_{V^*(1),h^*}(g_2)>_V\quad . \tag{5.1.2}$$

Soit $k\in J$. Il s'agit de montrer que ℓ_{-k} divise g. Comme $h^*-k-1\geq 0$, $\pi_{n,-k}(\Omega_{V^*(1),h^*}(g_2))$ appartient à $H^1_f(K_n,V(k)^*(1))$, on en déduit que pour tout $g_2\in\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$, $\chi^{-k}\eta([g,\sigma_{-1}g_2^\iota]_{\mathbf{D}_p(V)})=0$ pour tout caractère d'ordre fini (cf. Appendice A.2, rappelons que l'orthogonal de $H^1_f(K_n,V(k))$ est égal à $H^1_f(K_n,V(k)^*(1))$ pour la dualité locale). Donc g est divisible par ℓ_{-k}.

La formule sur l'ordre de tempérence se déduit de ce que

$$\mathfrak{o}_\varphi(g_x^{h,h^*,J})+h=\mathfrak{o}(x)+h+h^*-1-\sharp J\ ,$$

(cf. 3.3). □

Prenons par exemple comme dans [1] $J=\{-r+1,\cdots,0\}$ avec $r=\mathfrak{o}(x)$. On a donc alors

$$\mathfrak{o}_\varphi(g_x^{h,h^*,J})=h^*-1\ .$$

Ainsi, $g_x^{h,h^*,J}$ est $p^{-(h^*-1)}\varphi^-$-bornée. On peut alors appliquer le lemme 4.3.2 : si l'on choisit un cocycle $Z(y)$ représentant $y=\prod_{j\in J^c}\ell_{-j}x$ avec $\pi_{n,k}(Z(y)_\tau)=(\chi(\tau)^k\tau-1)d_{n,k}(y)$ pour $k>-h$, la limite de

$$p^n\sum_{j=-h+1}^{h^*-1}(-1)^{j+h-1}\binom{h^*+h-2}{j+h-1}d_{n,j}(y)$$

existe et vaut

$$\lim_{m\to\infty}p^{m(h^*-1)}\Phi^{-m}(D^{-(h^*-1)}(G)([\epsilon]-1))t^{-(h^*-1)}=$$
$$\lim_{m\to\infty}\Phi^{-m}(D^{-(h^*-1)}(G)([\epsilon]-1)t^{-(h^*-1)})\ .$$

On remarque alors que l'on peut d'abord choisir un cocycle $Z(x)$ représentant x avec $\pi_{n,k}(Z(x)_\tau)=(\chi(\tau)^k\tau-1)d_{n,k}(x)$ pour $k>-h$ et que l'on peut alors prendre

$$d_{n,k}(y)=(\prod_{j\in J^c}j-k)d_{n,k}(x)$$

pour $j \in \{-h+1, \cdots, h^*-1\}$; en particulier, $d_{n,k}(y)$ est nul pour $k \in J^c$. Un calcul élémentaire montre que

$$\frac{1}{(h+h^*-2)!}\sum_{j=-h+1}^{h^*-1}(-1)^{j+h-1}\binom{h^*+h-2}{j+h-1}d_{n,j}(y) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=-r+1}^{0}(-1)^{j+r-1}\binom{r-1}{j+r-1}d_{n,j}(x)$$

Faisons-le ! Le premier terme vaut

$$\frac{1}{(h+h^*-2)!}\sum_{j=-r+1}^{0}(-1)^{j+h-1}\binom{h^*+h-2}{j+h-1}\prod_{k=-h+1}^{-r}(k-j)\prod_{k=1}^{h^*-1}(k-j)d_{n,j}(x)\ .$$

On a pour j compris entre $-r+1$ et 0

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{j+h-1}}{(h+h^*-2)!}&\binom{h^*+h-2}{j+h-1}\prod_{k=-h+1}^{-r}(k-j)\prod_{k=1}^{h^*-1}(k-j)\\ &= (-1)^{r+1-j}\frac{1}{(h+j-1)!(h^*-j-1)!}\frac{(h+j-1)!}{(r+j)!}\frac{(h^*-1-j)!}{(-j)!}\\ &= (-1)^{r+1-j}\frac{1}{(r-1+j)!(-j)!} = \frac{(-1)^{r-1-j}}{(r-1)!}\binom{r-1}{j+r-1}\ .\end{aligned}$$

La limite de la suite $\frac{p^n}{(r-1)!}\sum_{j=-r+1}^{0}(-1)^{j+r-1}\binom{r-1}{j+r-1}d_{n,j}(x)$ lorque $n \to \infty$ est ce que Colmez appelle $Log_V^{(r)}(x)$ modulo un isomorphisme entre $(B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=1}$ et $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ (voir appendice C). Ainsi,

$$\frac{1}{(h+h^*-2)!}\lim_{m\to\infty} p^{m(h^*-1)}\Phi^{-m}(D^{-(h^*-1)}(G)([\epsilon]-1))t^{-(h^*-1)} = Log_V^{(r)}(x)$$

pour $\Omega_{V,h}(g) = \prod_{j\in\{-h+1,\dots,-r\}\cup\{1,\cdots,h^*-1\}}\ell_{-j}.x$. Remarquons que l'on peut préciser dans quel cran de la filtration il est. A priori, on obtient un élément de $(\mathrm{Fil}^{-(h^*-1)} B_{\max}^{G_{K_\infty}} \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\Phi=1}$.

5.2. Un formulaire. Nous allons essayer de donner un formulaire complet. On a les formules

$$\mathcal{L}_{V,r} = \ell_r\mathcal{L}_{V,r+1}$$
$$\mathcal{L}_{V(k),r+k}(Tw^k(z)) = D^{-k}(\mathcal{L}_{V,r})\ .$$

Nous avons ici abandonné l'idée de ne pas identifier $\mathbf{D}_p(V(k))$ avec $\mathbf{D}_p(V)$! Nous réserverons la notation h pour un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. On fait agir φ sur $K_n \otimes \mathbf{D}_p(V)$ par $1 \otimes \varphi$. Soient $\rho = <\chi>^{k_\rho}\eta_\rho$ où k_ρ est un entier et η_ρ un caractère d'ordre fini et de conducteur $p^{\mathfrak{f}(\eta_\rho)}$. On note $\log_{V(\rho)}$ et

$\exp_{V(\rho),*}$ le logarithme et les exponentielles associés à la représentation twistée $V(\rho)$ et π_ρ l'application composée

$$Z^1_\infty(K,V) \overset{\pi_{k,f(\eta_\rho)}}{\to} H^1(K_{f(\eta_\rho)},V(k)) \overset{e_{\eta_\rho^{-1}}}{\to} H^1(K_{f(\eta_\rho)},V(k))^{(\eta_\rho)} = H^1(K,V(\rho))$$

Enfin, on pose

$$\begin{aligned}
\Gamma^*(\rho) &= \Gamma^*(k-h+1)\\
P_\rho(\varphi) &= \begin{cases} p^{f_\eta k_\rho}\varphi^{-f_\eta} & \text{si } \eta \text{ est non trivial}\\ (1-p^{k_\rho+1}\varphi^{-1})(1-p^{-k_\rho}\varphi) & \text{si } \eta \text{ est le caractère trivial}\end{cases}\\
\ell_\rho &= l_{k(\rho)} = \frac{\log \rho^{-1}(\tau)\tau}{\chi(\tau)}\\
G(\rho) &= G(\eta_\rho)
\end{aligned}$$

La proposition suivante est une simple traduction de résultats déjà démontrés:

5.2.1. Proposition. *Soit $x \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,V)$ appartenant à l'image de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V)$. Soit ρ un caractère géométrique de G_∞.*

1. *Si $k_\rho \geq 1-h$,*
$$P(\varphi_\rho)(\rho^{-1}(\mathcal{L}_{V,h}(x))) = G(\rho^{-1})\frac{\log_{V(\rho)}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})}$$
2. *Si $k_\rho < 1-h$,*
$$P_\rho(\varphi)(\rho^{-1}(\mathcal{L}_{V,h}(x))) = G(\rho^{-1})\frac{\lambda_{V(\rho),}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})}$$

On ne suppose maintenant plus que x est dans l'image de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V)$. Il ne l'est en particulier pas si $\pi_{n,k}(x)$ n'appartient pas à H^1_g pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 1-h$. On trouvera la démonstration des formules suivantes dans [7].

5.2.2. Proposition. *Soit $x \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(K,V)$.*

1. *Si $\mathrm{Fil}^{k_\rho}\mathbf{D}_p(V) = \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(\rho)) = 0$ et si $\mathbf{D}_p(V(\rho))^{\varphi=p^{-1}} = 0$,*
$$P_\rho(\varphi)\rho^{-1}(\ell^{-1}_{\rho^{-1}}\mathcal{L}_{V,h}(x)) = G(\rho^{-1})\frac{\log_{V(\rho)}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})}\ .$$
2. *Si $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(\rho)) \neq 0$ et $\mathbf{D}_p(V(\rho))^{\varphi=p^{-1}} = 0$, alors*
$$P_\rho(\varphi)\rho^{-1}(\mathcal{L}_{V,h}(x)) = G(\rho^{-1})\frac{\lambda_{V(\rho),}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})}$$
Si de plus $\pi_\rho(x) \in H^1_f(K,V(\rho))$, on a
$$P_\rho(\varphi)\rho^{-1}(\ell^{-1}_{\rho^{-1}}\mathcal{L}_{V,h}(x)) \equiv G(\rho^{-1})\frac{\log_{V(\rho)}\pi_\rho(x)}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})} \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(\rho))$$

3. *Si* $\mathbf{D}_p(V(\rho))^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$, *alors*

$$(\rho^{-1}\mathcal{L}_{V(\rho),h}(x), -(1-p^{k_\rho+1}\varphi^{-1})(\rho^{-1}\mathcal{L}_{V(\rho),h}(x))) = (1-p^{-k_\rho}\varphi)\frac{\exp^*_{V(\rho),f}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})} .$$

Si de plus $\pi_\rho(x) \in H^1_f(K, V(\rho))$, *on a*

$$\begin{aligned}&(1-p^{k_\rho+1}\varphi^{-1})(\rho^{-1}(\ell^{-1}_{\rho^{-1}}\mathcal{L}_{V,h}(x)))\\ &\equiv \frac{\log_{f,1}(\pi_\rho(x)) - (1-p^{-k_\rho}\varphi)\log_{f,2}(\pi_\rho(x))}{\Gamma^*(\rho\chi^{h-1})} \bmod (1-p^{-k_\rho}\varphi)\,\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V(\rho))\end{aligned}$$

où $\log_{f,1}$ *et* $\log_{f,2}$ *désignent les composantes de l'application réciproque de* $\exp_f$ *(voir 3.1).*

5.3. Conjecture de Tamagawa locale. On renvoie à [4] et à [6] pour les conséquences sur les conjectures de Tamagawa locales. La loi de réciprocité implique que ces conjectures sont invariantes par twist. En particulier, on peut pour la démontrer twister V de manière à ce que $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) = 0$ (un des nombres de Tamagawa est alors juste un cardinal d'un groupe de torsion).

Appendice A. Formules diverses

A.1. Lemme de Shapiro.

A.1.1. Soit G un groupe profini et H un sous-groupe fermé distingué de G. Soit M un H-module. On définit Ind M comme l'ensemble des applications localement constantes f de G dans M vérifiant $f(hx) = hf(x)$ pour $h \in H$. Le groupe G opère sur Ind M par $g(f)(x) = f(xg)$. L'application $\alpha : \mathrm{Ind}\ M \to M$ donnée par $\alpha(f) = f(1)$ est un homomorphisme de H-modules. On a en effet

$$\alpha(h(f)) = (hf)(1) = f(h) = hf(1) .$$

On en déduit une application de $Z^1(G, \mathrm{Ind}\ M)$ dans $Z^1(H, M)$ puis de $H^1(G, \mathrm{Ind}\ M)$ dans $H^1(H, M)$ qui est en fait un isomorphisme.
Le cas qui nous intéresse ici est celui où M est déjà muni d'une action de G-modules et où G/H est abélien et même cyclique. On a alors un isomorphisme de G-modules

$$\mathbb{Z}[G/H] \otimes M = M[G/H] \to \mathrm{Ind}\, M \ :$$

l'image de $\sum_{\tau\in G/H} a_\tau \tau$ est l'application $f : x \mapsto x a_{x^{-1}}$ avec un abus sur $a_{x^{-1}}$: il ne dépend que de l'image de x^{-1} dans G/H ; $f \in$ Ind M car $f(hx) = hxa_{(hx)^{-1}} = hxa_{x^{-1}} = hf(x))$; l'application réciproque est donnée par $f \mapsto \alpha = \sum_{\tau\in G/H} \tilde\tau^{-1}(f(\tilde\tau))\tau^{-1}$ (on vérifie que la définition ne dépend pas du choix des représentants $\tilde\tau$ des éléments τ de G/H, puisque pour $h \in H$, $(h\tilde\tau)^{-1}(f(h\tilde\tau)) = \tilde\tau^{-1}h^{-1}h(f(\tilde\tau)) = \tilde\tau^{-1}(f(\tilde\tau))$, le composé des deux applications est d'une part $f \mapsto g$ avec $g(x) = xa_{x^{-1}} = xx^{-1}f(x) = f(x)$,

d'autre part $\alpha \mapsto \beta$ avec $\beta = \sum_{\tau\in G/H} \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{\tau}a_{\tilde{\tau}^{-1}}).\tau^{-1} = \sum_{\tau\in G/H} a_\tau.\tau = \alpha$. L'action de G sur $\mathbb{Z}[G/H] \otimes M$ est l'action diagonale (si $g \in G$, l'image de gf est $\sum_{\tau\in G/H} \tilde{\tau}^{-1}(g(f)(\tilde{\tau}))\tau^{-1} = \sum_{\tau\in G/H} \tilde{\tau}^{-1}(f(\tilde{\tau}g))\tau^{-1} = \sum_{\tau\in G/H} g\tilde{\tau}^{-1}(f(\tilde{\tau}))g\tau^{-1} = g(\sum_{\tau\in G/H} \tilde{\tau}^{-1}(f(\tilde{\tau}))\tau^{-1})$. En composant avec l'application Ind $M \to M$, on obtient un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\nu_{Id}^{G/H} : \mathbb{Z}[G/H] \otimes M \to M$ donnée par $\sum_{\tau\in G/H} a_\tau \tau \to a_{Id}$, qui induit un isomorphisme de G/H-modules $H^1(G, \mathbb{Z}[G/H] \otimes M) \cong H^1(H, M)$, l'action sur le premier étant donnée par l'action de G/H sur $\mathbb{Z}[G/H]$ par multiplication. On a $\nu_{Id}^{G/H}(g(\sum_{\tau\in G/H} a_\tau.\tau)) = \nu_{Id}^{G/H}(\sum_{\tau\in G/H} g(a_\tau).g\tau) = \nu_{Id}^{G/H}(\sum_{\tau\in G/H} g(a_{g^{-1}\tau}).\tau) = g a_{g^{-1}}$.
Notons $\nu_g^{G/H}$ l'application $\sum_{\tau\in G/H} a_\tau.\tau \mapsto a_{g^{-1}}$. On a donc $\nu_{Id}^{G/H}(gf) = g\nu_g^{G/H}(f)$ pour $f \in \mathbb{Z}[G/H] \otimes M$ et $g \in G$.

A.1.2. Reprenons la situation du texte. Si M est un G_∞-module avec action continue de G_∞, on identifie M et $M(k)$ en tant que $\mathbb{Z}_p$-modules, on note $\tau *_k m$ l'action sur $M(k)$: $\tau *_k m = \chi(\tau)^k \tau m$. On note $\nu^{G_n} = \nu^n$ pour alléger les notations.
On considère d'abord l'isomorphisme de G_∞-modules $\iota_k : \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M \to \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M(k)$ induit par $\tau \otimes m \mapsto \chi(\tau)^k \tau \otimes m$ [vérifions que c'est compatible avec l'action diagonale de G_∞ : $\iota_k(g(\tau \otimes m)) = \iota(g\tau \otimes gm) = \chi(g)^k \chi(\tau)^k g\tau \otimes gm = \chi(\tau)^k g\tau \otimes g *_k m = g *_k (\chi(\tau)^k \tau \otimes m) = g *_k \iota_k(\tau \otimes m)$]. On peut aussi écrire $\iota_k = Tw^k \otimes id$. Soit R_n la projection de $\mathcal{H}(G_\infty)$ sur $\mathbb{Q}_p[G_n]$. On pose alors

$$s_{n,k} = \nu_{Id}^n \circ R_n \circ \iota_k = \nu_{Id}^n \circ R_n \circ Tw^k \ ;$$

c'est une application de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes M \to M(k)$. Remarquons que $R_n \circ Tw^k$ a à voir avec le "polynôme d'interpolation". Ainsi, on peut écrire avec d'autres notations $R_{n,k}(f) = R_n \circ Tw^k(f)$ et $Tw^{-k} R_{n,k}(f) \equiv f \mod \chi(\gamma)^{-kp^n}\gamma^{p^n} - 1$ ou $R_{n,k}(f) \equiv Tw^k f \mod \gamma^{p^n} - 1$.
Vérifions pour se rassurer que $s_{n,k}$ est bien un homomorphisme de G_{K_n}-modules : on a en effet pour $f \in \mathcal{H}(G_\infty)$ et $m \in M$

$$\begin{aligned} s_{n,k}(g(f \otimes m)) &= \nu_{Id}^n(\chi(g)^k R_n(gTw^k(f) \otimes g(m)) \\ &= \chi(g)^k \nu_g^n(R_n(Tw^k(f)) \otimes g(m) \\ &= \nu_g^n(R_n(Tw^k(f)) \otimes g *_k m) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que $g \in G_{K_n}$, ce qui implique que $\nu_g^n = \nu_{Id}^n$ et donc

$$\begin{aligned} s_{n,k}(g(f \otimes m)) &= \nu_{Id}^n(R_n(Tw^k(f)) \otimes g *_k m) \\ &= g *_k \nu_{Id}^n(R_n(Tw^k(f)) \otimes m) \\ &= g *_k s_{n,k}(f \otimes m) \end{aligned}$$

On désire maintenant décrire l'application

$$\pi_{n,k} : H^1(G_\infty, \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M) \to H^1(K_\infty/K_n, M(k)) \ .$$

induite par $s_{n,k} : \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M \to M(k)$. Rappelons que l'on a des isomorphismes

$$H^1(G_\infty, \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M/(\gamma_n - 1)$$

et

$$H^1(K_\infty/K_n, M(k)) \xrightarrow{\cong} M(k)/(\chi(\gamma_n)^k \gamma_n - 1)$$

obtenu en fixant un générateur γ de G_∞; $\gamma_n = \gamma^{p^n}$ est alors un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$: si Z est un cocycle de G_∞ (resp. de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$), on lui associe $Z_\gamma \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M$ (resp. Z_{γ_n}).
Soit donc $\tilde{Z} \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes M$ et Z le cocycle déterminé par $Z_\gamma = \tilde{Z}$. On a alors $Tw^k(Z_{\gamma^r}) = Tw^k(\sum_{i=0}^{r-1} \gamma^i \tilde{Z}) = \sum_{i=0}^{r-1} \chi(\gamma)^{ik} Tw^k(\gamma^i \tilde{Z})$. Le cocycle $\pi_{n,k}(Z)$ associé dans $Z^1(K_\infty/K_n, M(k))$ est déterminé par sa valeur en γ^{p^n} qui est

$$\begin{aligned}
\pi_{n,k}(Z)_{\gamma^n} &= \nu_{Id}^n(\sum_{i=0}^{p^n-1} \chi(\gamma)^{ik} R_n(\gamma^i Tw^k \tilde{Z}) \\
&= \sum_{i=0}^{p^n-1} \chi(\gamma)^{ik} \gamma^i \nu_{\gamma^i}(R_n(Tw^k \tilde{Z})) \\
&= \sum_{i=0}^{p^n-1} \gamma^i *_k \nu_{\gamma^i}(R_n(Tw^k \tilde{Z})) \\
&= \tilde{\nu}_k^n(R_n(Tw^k \tilde{Z}))
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\nu}_k^n(\sum_{i=0}^{p^n-1} a_{\gamma^i} \otimes \gamma^i) = \sum_{i=0}^{p^n-1} \gamma^i *_k a_{\gamma^{-i}} \ .$$

Si maintenant λ_s est un homomorphisme de M dans N vérifiant $\lambda_s(\tau m) = \chi^s(\tau)\lambda_s(m)$, on a pour $f \in \mathbb{Z}_p[G_n] \otimes M$, $\lambda_s \circ \tilde{\nu}_k^n(f) = \lambda_s(\chi^{-k-s}(f))$, d'où

$$\lambda_s(\pi_{n,k}(Z)_{\gamma^n}) = \lambda_s(\chi^{-k-s}(R_n(Tw^k \tilde{Z}))) = \lambda_s(\chi^{-k-s}(R_{n,k}(\tilde{Z})))$$

Si on écrit $\tilde{Z} = f(\gamma - 1)$ avec $f \in \mathcal{H} \otimes (\mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes M)$, si $u = \chi(\gamma)$, $R_{n,k}(f)$ est le polynôme en T de degré $< p^n$ tel que $R_{n,k}(f) \equiv f(u^k(1+T) - 1)$ mod $(1+T)^{p^n} - 1$ et la formule devient

$$\lambda_s(\pi_{n,k}(Z)_{\gamma^n}) = \lambda_s(R_{n,k}(f)(u^{-k-s} - 1)) \ .$$

A.2. Formulaire d'évaluation. Rappelons que l'on a un isomorphisme canonique de G_∞-modules entre Λ et $\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$ qui se prolonge en un isomorphisme entre $\mathcal{H}(G_\infty)$ et $\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}$. Il est induit par $\tau \mapsto (1+T)^{\chi(\tau)}$ pour $\tau \in G_\infty$. D'où l'isomorphisme canonique $\mathcal{D}_{\infty,f}(V) \cong \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Si $g \in \mathcal{H}_\infty^{\psi=0} \otimes \mathbf{D}_p(V)$, on posera $g = \hat{g}.(1+T)$.

A.2.1. Si η est un caractère d'ordre fini de conducteur p^n avec $n \geq 0$, on note $e_\eta = \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(K_n/K)} \eta(\tau)\tau$. Soit $\rho = \eta\chi^k$ un caractère continu de G_∞ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$ avec η un caractère d'ordre fini de $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ de conducteur p^n (c'est-à-dire ne se factorisant pas par K_{n-1}). On peut évaluer les éléments de $\mathcal{H}(G_\infty)$ sur un tel caractère. On a

$$e_\eta g(\zeta_n - 1) = G(\eta)\eta^{-1}(\hat{g})$$

avec

$$G(\eta) = e_\eta(\zeta_n) = \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(K_n/K)} \eta(\tau)\tau\zeta_n$$

la somme de Gauss associée à η. On a d'autre part

$$D^k(g) = Tw^k(\hat{g}).(1+T)\ .$$

On en déduit que

$$G(\eta)\rho^{-1}(\hat{g}) = e_\eta D^{-k}(g)(\zeta_n - 1)\ . \tag{A.2.1}$$

A.2.2. On a une application $R_{n,k} : \mathcal{H}(G_\infty) \to \mathbb{Q}_p[G_n]$, composé du twist Tw^k et de la projection sur $\mathbb{Q}_p[G_n]$. Si $x \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ et $y \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T^*(1))$, l'image twistée de $< x, y >_V$ dans $\mathbb{Z}_p[G_n]$ est donnée par

$$\begin{aligned} R_{n,k}(< x, y >_V) &= R_n(< Tw^{-k}(x), Tw^k(y) >_{V(k)} \\ &= \sum_{\tau\in G_n} < \tau^{-1}.\pi_{n,-k}(x), \pi_{n,k}(y) >_{V(-k),K_n} \tau\ . \end{aligned}$$

En prenant le coefficient de $Id \in G_n$, on obtient que

$$s_{n,k}(< x, y >_V) =< \pi_{n,-k}(x), \pi_{n,k}(y) >_{V(-k),K_n}\ .$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(< x, y >_V) &= \eta^{-1}(R_{n,-k}(< x, y >_V)) \\ &= \sum_{\tau\in G_n} < \tau^{-1}.\pi_{n,k}(x), \pi_{n,-k}(y) >_{V(k),K_n} \eta^{-1}(\tau) \\ &=< \sum_{\tau\in G_n} \eta^{-1}(\tau)\tau^{-1}.\pi_{n,k}(x), \pi_{n,-k}(y) >_{V(k),K_n} \end{aligned}$$

D'où

$$\rho^{-1}(< x, y >_V) = (\sharp G_n)^{-1} < e_\eta \pi_{n,k}(x), e_{\eta^{-1}}\pi_{n,-k}(y) >_{V(k),K_n} \tag{A.2.2}$$

A.2.3. Passons aux formules concernant le produit de convolution. On a $g_1 * g_2 = \hat{g_1}\hat{g_2}.(1+T)$. On a $D^k(g_1 * g_2) = D^k(g_1) * D^k(g_2)$. D'autre part, on note ι l'involution de $\mathcal{H}_\infty^{\psi=0}$ correspondant à l'involution ι de $\mathcal{H}(G_\infty)$ changeant τ en τ^{-1}. On a alors $D^k(g^\iota) = D^{-k}(g)^\iota$ et $D^k(g_1 * g_2^\iota) = D^k(g_1) * D^{-k}(g_2)^\iota$. Enfin, $\sigma_{-1} \circ D^k(g) = (-1)^k D^k(\sigma_{-1}g)$.

Le polynôme d'interpolation de $g_1 * g_2$ modulo $(1+T)^{p^n}-1$ est

$$R_n(g_1 * g_2) = \sum_{j=0,(j,p)=1}^{p^n-1} \frac{1}{p^n} \sum_{\zeta\in\mu_{p^n}} g_1(\zeta^{j^{-1}}-1)g_2(\zeta^{-1}-1)(1+T)^j \ .$$

D'où,

$$s_{n,k}(\hat{g_1}\hat{g}_2^{\iota}) = s_{n,0}(Tw^k(\hat{g_1}\hat{g}_2^{\iota})) = \frac{1}{p^n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}} D^k(g_1)(\zeta-1)D^{-k}(g_2)^{\iota}(\zeta^{-1}-1) \ .$$

Enfin,

$$e_\eta(D^{-k}(g_1 * g_2^{\iota})) = G(\eta)\rho^{-1}(\hat{g}_1)\rho(\hat{g}_2) \ .$$

Appendice B. Interpolation

Soit u un générateur topologique de $1+p\mathbb{Z}_p$. Un élément $f\in\mathcal{H}_{h^-}$ est connu par ses polynômes d'interpolation modulo les $u^{-ip^n}(1+T)^{p^n}-1$ pour $i\in\{0,\dots h-1)$ et on peut calculer $f(u^k-1)$ pour tout entier k comme une limite de combinaisons linéaires des $R_{n,i}(f)(u^j-1)$ pour $i\in\{0,\dots h-1)$ ([4, lemme 1.3.4]. Nous allons ici démontrer la formule exacte.
Pour tout entier i, on désigne par $R_{n,i}(f)$ est le polynôme de degré $< p^n$ tel que

$$f \equiv R_{n,i}(f)(u^{-i}(1+T)-1) \mod u^{-ip^n}(1+T)^{p^n}-1 \ .$$

En particulier, on a $f(u^i-1) = R_{n,i}(f)(0)$.

Lemme. *Si $f\in\mathcal{H}_{h^-}$, alors pour tout entier $k\geq h$ (resp. pour tout élément k de $\mathbb{Z}_p-\{0,\cdots h-1\}$), on a*

$$(-1)^{h-1}\frac{(h-1)!}{k(k-1)\dots(k-h+1)}f(u^k-1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\frac{R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)}{k-i}.$$

La formule peut encore s'écrire pour $f\in\mathcal{H}_{h^-}(G_\infty)$ et $k\in\mathbb{Z}_p-\{0,\cdots h-1\}$,

$$(-1)^{h-1}\frac{(h-1)!}{k(k-1)\dots(k-h+1)} <\chi>^k (f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i} <\chi>^{k-i} \frac{R_n(Tw^i(f))}{k-i} \ .$$

Ici, $<\chi>$ est la projection de χ sur $1+p\mathbb{Z}_p$. La formule s'étend par continuité à tout élément de $\mathbb{Z}_p-\{0,\cdots,h-1\}$.

Ce lemme ou ses variantes est à la base de tous les calculs de valeurs de fonctions obtenues par interpolation p-adique. Lorsque $f \in \Lambda$ ou $\mathcal{H}_{1^-}$, le lemme dit simplement que

$$f(u^k-1) = \lim_{n\to\infty} R_{n,0}(f)(u^k-1) \ .$$

Démonstration. Nous avons choisi une démonstration “élémentaire”. Il suffit de démontrer la formule pour $k \geq h$ et de conclure par continuité.
Si g est une fonction sur les entiers positifs, on définit (cf [8])

$$\delta_s(g) = \sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{s}{r}g(s-r) \ .$$

On a alors la formule d'inversion

$$g(n) = \sum_{s=0}^{\infty}\delta_s(g)\binom{n}{s} \ .$$

En particulier, si les $\delta_s(g)$ sont nuls pour $s \geq h$, on a

$$g(k) = \sum_{s=0}^{h-1}\delta_s(g)\binom{k}{s} \ .$$

et toute valeur de g sur un entier positif s'exprime uniquement en fonction de $g(0)$, $g(1)$, ... , $g(h-1)$. Plus précisément,

$$g(k) = \sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}c_{h,k,i}\,g(i)$$

avec

$$c_{h,k,i} = (-1)^i\frac{k!(h-1-i)!}{(h-1)!(k-i)!}\sum_{s=0}^{h-1-i}(-1)^s\binom{k-i}{s} \ .$$

On remarque alors que l'on a l'identité (que l'on peut montrer par récurrence)

$$\sum_{s=0}^{u}(-1)^s\binom{v}{s} = (-1)^u\binom{v-1}{u}$$

pour $0 < u < v$. On obtient alors

$$\begin{aligned} c_{h,k,i} &= (-1)^{h-1}\frac{k!(h-1-i)!}{(h-1)!(k-i)!}\binom{k-i-1}{h-1-i} \\ &= (-1)^{h-1}\frac{k!}{(k-h)!(h-1)!(k-i)} \ . \end{aligned}$$

Ainsi, si g est une fonction sur les entiers telle que $\delta_s(g) = 0$ pour tout entier $s \geq h$, on a pour tout entier $k \geq h$

$$(-1)^{h-1}\frac{(h-1)!}{k(k-1)\cdots(k-h+1)}g(k) = \sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\frac{g(i)}{k-i}$$

Revenons au lemme à démontrer et posons $g_n(i) = R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)$. Le fait que $f \in \mathcal{H}_{h^-}$ implique que pour tout entier $s \geq h$, la suite $\delta_s(g_n) = \sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}g_n(s-i)$ tend vers 0 avec n. On en déduit que pour tout entier $k \geq h$, la limite de $g_n(k) - \sum_{s=0}^{h-1}\delta_s(g_n)\binom{k}{s}$ est nulle. Il ne reste plus qu'à utiliser le calcul précédent et à remarquer que $g_n(k) = f(u^k-1)$ pour tout entier $n > 0$ pour conclure. $\square$

Lemme. *Si $f \in \mathcal{H}_{h^-}$ et P est un polynôme de degré $< t$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} p^{n\inf(t,h)}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}P(k-i)R_n(f)(k-i) = 0 \ .$$

Démonstration. Soit g une fonction sur les entiers vérifiant $\delta_r(g) = 0$ pour $r \geq h-1$ et P un polynôme de degré $< t$ avec $t \geq 1$; on a en $P(x) = \sum_{s=0}^{t-1}\delta_s(P)\binom{x}{s}$ (ces deux polynômes de degré $\leq t-1$ coïncident en $x = 0, \cdots, t-1$ et sont donc égaux), ainsi, $\delta_s(P) = 0$ pour $s \geq t$). On a

$$\begin{aligned}\delta_{h-1}(Pg) &= \sum_{j=0}^{h-1}\delta_j(P)\delta_{h-1-j}(g)\\ &= \sum_{j=0}^{t-1}\delta_j(P)\delta_{h-1-j}(g) \ .\end{aligned}$$

Prenons pour P le polynôme $Q = P(k-x)$ et remplaçons g par $g_n = i \mapsto R_{i,n}(f)(u^{k-i}-1)$. Rappelons que $p^n\delta_r(g_n) \to 0$ pour $r \geq h$ et que $p^{nj}\delta_{h-1-j}(g_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour $0 \leq j \leq h-1$. On déduit alors du calcul précédent que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p^{nt}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}&P(k-i)R_{i,n}(f)(u^{k-i}-1)\\ &= \lim_{n\to\infty} p^{nt}\delta_{h-1}(Qg_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} p^{nt}\sum_{j=0}^{t-1}\delta_j(P)\delta_{h-1-j}(g) = 0\end{aligned}$$

Si $t \leq h$, on a encore

$$\delta_{h-1}(Pg) = \sum_{j=0}^{h-1}\delta_j(P)\delta_{h-1-j}(g)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} p^{nh}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}P(k-i)R_{i,n}(f)(u^{k-i}-1)$$
$$= \lim_{n\to\infty} p^{nh}\sum_{j=0}^{h-1}\delta_j(P)\delta_{h-1-j}(g)$$
$$= \lim_{n\to\infty} p^{n(h-j)}\sum_{j=0}^{h-1}\delta_j(P)p^{nj}\delta_{h-1-j}(g) = 0$$

□

PROPOSITION. *Si $f \in \mathcal{H}_{h^-}$, alors pour tout entier $k \geq h$, on a*

$$\frac{(-1)^h(h-1)!}{k(k-1)\dots(k-h+1)}\frac{f(u^k-1)}{\log u} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\frac{p^n}{1-u^{(k-i)p^n}}\binom{h-1}{i}R_{n,i}(f)(u^{k-i}-1)\ .$$

Nous avonc utilisé cette proposition pour des éléments de $f \in \mathcal{H}_{h^-}(G_\infty)$. Elle se traduit alors par la formule

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^h(h-1)!}{k(k-1)\dots(k-h+1)}\frac{\chi^k(f)}{\log\chi(\gamma)} =\\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\frac{p^n}{1-\chi(\gamma)^{(k-i)p^n}}\binom{h-1}{i}\chi^{k-i}(R_{n,i}(f))\end{aligned} \tag{B.0.3}$$

Démonstration. On écrit $\frac{1}{1-e^T}+\frac{1}{T} = \sum_{j=0}^\infty c_jT^j$ avec $p^{r_0}p^jc_j \in \mathbb{Z}_p$ pour r_0 indépendant de j. On a alors

$$\frac{p^n}{1-u^{(k-i)p^n}}+\frac{1}{(k-i)\log u} = \sum_{j=0}^\infty c_jp^{n(j+1)}(k-i)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{h-1}p^{n-j}p^jc_jp^{nj}(k-i)^j + \sum_{j=h}^{\infty}p^{n(j+1-h)-j}p^jc_jp^{nh}(k-i)^j\ .$$

Comme $n(j+1-h)-j \geq 1-h$ pour $j \geq h$, on en déduit du lemme précédent que si $F_n(i) = \frac{p^n}{1-u^{(k-i)p^n}}+\frac{1}{(k-i)\log u}$ que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}F_n(i)R_{i,n}(f)(u^{k-i}-1) = 0\ .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le premier lemme. □

Appendice C. Suite exacte de Coleman-Colmez

C.1. Rappelons la définition suivante :

Définition : Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'un automorphisme u. Si $\epsilon \in \{\pm\}$, on dit qu'un élément $F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ est u^ϵ-borné si la suite $||(1 \otimes u)^{-n} F||_{\rho_n}$ est bornée pour $\epsilon = +$ et tend vers 0 pour $\epsilon = -$.

On note $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{u^\epsilon}$ l'ensemble des éléments u^ϵ-bornés et on pose alors $||F||_\varphi = C_u(F) = \sup_n(||(1 \otimes u)^{-n} F||_{\rho_n})$.

C.2. Fixons un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de dimension finie muni d'un automorphisme φ. Colmez démontre le théorème suivant (nous avons déjà utilisé et démontré le A):

C.2.1. Théorème. (Colmez) A) *Soit F un élément de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ tel que*

$$(1 - \Phi)F \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-} \ .$$

Alors la suite $\Phi^{-n}(F([\epsilon] - 1)) = (1 \otimes \varphi)^{-n} F(\beta_n - 1)$ converge dans $B_{\mathrm{dR}} \otimes \mathcal{D}$ vers un élément α_F de $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$.
B) *Réciproquement, soit α un élément de $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$. Il existe une série $F_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ telle que $(1 - \Phi)F_\alpha \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-}$ et telle que $\alpha = \alpha_{F_\alpha}$.*
C) *L'application $\alpha \mapsto F_\alpha$ est une bijection entre $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$ et les éléments de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ tels que $(1 - \Phi)F \in (\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-}$.*

On en déduit une application

$$\mathcal{C}_\mathcal{D} : ((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1} \to (\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-}$$

donnée par $\alpha \mapsto (1 - \Phi)F_\alpha$.

C.3. Corollaire. *On a la suite exacte de G_∞-modules*

$$0 \to \oplus_{k \geq 0} t^k \mathcal{D}^{\varphi = p^{-k}} \to ((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1} \to (\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-} \\ \to \oplus_{k \geq 0} \mathcal{D}/(1 - p^k \varphi)(k) \to 0$$

et on a $||\mathcal{C}_\mathcal{D}(\alpha)||_\varphi = ||\alpha||_{\max}$.

C.4. Remarques. 1. Un cas particulier est celui où $\mathcal{D} = \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$. On obtient alors la suite exacte de Coleman :

$$0 \to \mathbb{Z}_p t \to ((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}})^{\varphi = p} \to \Lambda \otimes \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathbb{Z}_p(1) \to 0$$

2. L'idée fondamentale de Colmez est de montrer la convergence des éléments du type $(1 \otimes \varphi)^{-n} F(\beta_n - 1)$ vers un élément de $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$ et de construire l'application réciproque de $F \mapsto \alpha_F$, c'est-à-dire de construire une série tempérée à partir d'un élément de $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$. Pour cela, il a besoin d'opérateurs de trace sur $(B^+_{\max})^{G_{K_\infty}}$ que nous allons introduire dans le paragraphe C.6. Ces opérateurs nous permettront aussi de compléter le théorème en reliant α avec les valeurs de F_α.

C.5. Quelques propriétés de $(B_{\max}^+)^{G_{K_\infty}}$. Enonçons sans le démontrer la proposition cruxiale suivant [1, lemme VIII.3.3] :

C.5.1. Proposition. (Colmez) *Si $n \geq 1$, tout élément α de $B_{\max}^+ \cap K_n[[t]]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha = F(\beta_n - 1)$ où $F \in K[[T]]$ a un rayon de convergence $\geq \rho_n$. On a de plus $||F||_{\rho_n} \leq ||F(\beta_n - 1)||_{\max} \leq p||F||_{\rho_n}$.*

Ainsi, si $F = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$, la suite $v_p(a_k) + \frac{k}{(p-1)p^{n-1}}$ en k tend vers $+\infty$. On définit un opérateur $\tilde{\delta}_k$ sur $K_\infty[[t]]$ par

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_k(\alpha) t^k$$

et on pose $\delta_k = \tilde{\delta}_k t^k$. L'opérateur δ_k n'est pas continu pour la topologie de B_{dR} et ne se prolonge pas à $(B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$.

C.5.2. Lemme. *Les opérateurs $\tilde{\delta}_k$ et D sont reliés par*

$$\tilde{\delta}_k(F(\beta_n - 1)) = \frac{D^k(F)(\zeta_n - 1)}{p^{nk} k!}$$

Démonstration. Comme $\beta_n = \zeta_n \exp(t/p^n)$, et que $\tilde{\delta}$ laisse fixe K_n, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_k(F(\beta_n - 1)) =& \frac{1}{k!} \frac{d}{d^k T} (F(\zeta_n \exp(T/p^n) - 1))_{T=0} \\
=& \frac{1}{p^{nk} k!} \frac{d}{d^k T} (F(\zeta_n \exp(T) - 1))_{T=0} \\
=& \frac{D^k(F(\zeta_n(1+T) - 1))_{T=0}}{p^{nk} k!} \\
=& \frac{D^k(F)(\zeta_n - 1)}{p^{nk} k!}
\end{aligned}$$

□

C.6. Le projecteur T_n de $(B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$ sur $K_n[[t]]$. L'inclusion de $K_n[[t]]$ dans $(B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$ admet une section naturelle définie par Colmez et dont les propriétés sont résumées dans la proposition suivante. On note Tr_{K_m/K_n} l'application de $K_m[[t]]$ induite par la trace sur K_m et par l'identité sur t.

C.6.1. Proposition. *Pour $n \geq 1$, il existe une unique application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue T_n de $(B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$ dans $K_n[[t]]$ vérifiant*

$$T_n(x) = \frac{1}{p^m} Tr_{K_m/K_n}(x)$$

pour $x \in K_m[[t]]$ et $m \geq n$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $$T_n(\beta_m) = \begin{cases} 0 & \textit{pour } m > n \\ \frac{1}{p^n}\beta_m & \textit{pour } m \leq n \end{cases}$$

2. $\lim_{n\to\infty} p^n T_n(\alpha) = \alpha$ *pour* $\alpha \in (B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$;
3. $||p^n T_n(\alpha)||_{\max} \leq ||\alpha||_{\max}$ *pour* $\alpha \in B_{\max}^*)^{G_{K_\infty}}$;
4. *Si* $\alpha \in (B_{\mathrm{cont}}^+)^{G_{K_\infty}}$ *avec* $B_{\mathrm{cont}}^+ = \cap \varphi^n(B_{\max}^+)$, $\varphi^n p^n T_n \varphi^{-n}(\alpha)$ *est indépendant de* $n \geq 1$.

Ainsi, on a $T_{n-1} \circ \varphi = p\varphi \circ T_n$, $p^n T_n$ est l'identité sur $K_n[[t]]$ et fournit une section de $K_n[[t]] \to (B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}}$. Si $\alpha \in \varphi((B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_{K_\infty}})$, par exemple si $\alpha \in (B_{\mathrm{cont}}^+)^{G_{K_\infty}}$, on pose

$$\tilde{T}_0(\alpha) = \varphi(pT_1(\varphi^{-1}(\alpha)))$$

C.6.2. Lemme. *Soit* α *un élément de* $((B_{\max}^+)^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$. *Il existe une unique série* $F_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$ *telle que*

$$\tilde{T}_0(\alpha) = F_\alpha([\epsilon] - 1) \ .$$

De plus, $(1 - \Phi)F_\alpha \in (\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})_{\varphi^-}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in ((B_{\max}^+)^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$. On vérifie facilement que $((B_{\max}^+)^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1} = ((B_{\mathrm{cont}}^+)^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$. Soit $\delta = pT_1((\varphi^{-1} \otimes 1)\alpha)$. C'est un élément de $((B_{\mathrm{cont}}^+)^{G_{K_\infty}} \cap K_1[[t]]) \otimes \mathcal{D})$. Grâce à la proposition C.5.1, il existe une unique série $F_\alpha \in \mathbb{Q}_p[[T]] \otimes \mathcal{D}$ de rayon de convergence $\geq p^{-\frac{1}{p-1}}$ tel que $\delta = F_\alpha(\beta_1 - 1)$. On a alors

$$\tilde{T}_0(\alpha) = (\varphi \otimes 1)\delta = (\varphi \otimes 1)F_\alpha(\beta_1 - 1) = F_\alpha([\epsilon] - 1) \ .$$

Montrons que $F_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$. Comme

$$p^n(\varphi^n \otimes 1)T_n((\varphi^{-n} \otimes 1)\alpha) = p(\varphi \otimes 1)T_1((\varphi^{-1} \otimes 1)\alpha) = \tilde{T}_0(\alpha) \ ,$$

on a

$$F_\alpha(\beta_n - 1) = p^n T_n((\varphi^{-n} \otimes 1)\alpha) \in (B_{\max}^{G_{K_\infty}} \cap K_n[[t]]) \otimes \mathbf{D}_p(V) \ .$$

En appliquant de nouveau la proposition C.5.1, on en déduit que le rayon de convergence de F_α est $\geq \rho_n$ pour tout n et donc que $F_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$. On vérifie que la limite de $F_\alpha(\beta_n - 1)$ est α. Utilisons maintenant l'invariance de α par Φ pour montrer que $\psi((1 - \Phi)F_\alpha) = 0$. Par définition, il est équivalent de montrer que

$$\sum_{\zeta \in \mu_p} F_\alpha(\zeta(1 + T) - 1) = p(1 \otimes \varphi)F_\alpha((1 + T)^p - 1)$$

ou encore de montrer l'égalité obtenue en remplaçant T par un quelconque $\beta_{n+1}-1$ pour $n\geq 1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta\in\mu_p} F_\alpha(\zeta\beta_{n+1}-1) =&Tr_{K_{n+1}[[t]]/K_n[[t]]}(F_\alpha(\beta_{n+1}-1)\\ =&Tr_{K_{n+1}[[t]]/K_n[[t]]}(p^{n+1}T_{n+1}((\varphi^{-n+1}\otimes 1)\alpha))\\ =&p^{n+1}T_n((\varphi^{-n+1}\otimes 1)\alpha)=p^{n+1}T_n((\varphi^{-n}\otimes\varphi)\alpha)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\varphi\otimes\varphi(\alpha)=\alpha$

$$=p(1\otimes\varphi)p^nT_n((\varphi^{-n}\otimes 1)\alpha)=p(1\otimes\varphi)F_\alpha(\beta_n-1)$$

Montrons enfin que $f=(1-\Phi)F_\alpha$ est φ^--borné. On montre facilement que

$$(1\otimes\varphi)^{-n}f(\beta_n-1)=p^nT_n(\Phi^{-n}\alpha)-p^{n-1}T_{n-1}(\Phi^{-(n-1)}\alpha)\ .$$

Comme $\Phi(\alpha)=\alpha$, cela vaut aussi

$$p^nT_n(\alpha)-p^{n-1}T_{n-1}(\alpha)\ ,$$

ce qui tend vers 0 dans $B_{\max}\otimes\mathcal{D}$. En utilisant en fait que $||(1\otimes\varphi)^{-n}f(\beta_n-1)||_{\max}\sim||(1\otimes\varphi)^{-n}f||_{\rho_n}$, on en déduit que f est φ^--borné. □

C.6.3. Démontrons le théorème C.2.1. Soit $F\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{D}$ tel que $(1-\Phi)F\in(\mathcal{H}^{\psi=0}\otimes\mathcal{D})_{\varphi^-}$. Soit $\alpha_F=\lim_{m\to\infty}\Phi^{-m}(F([\epsilon]-1))$; calculons $T_n(\alpha_F)$. Par continuité de T_n, on a

$$T_n(\alpha_F)=\lim_{m\to\infty}T_n((1\otimes\varphi)^{-m}F(\beta_m-1))$$

En voyant $(1\otimes\varphi)^{-m}F(\beta_m-1)$ dans $K_m[[t]]$ grâce à la formule $\beta_m=\zeta_m\exp(t/p^m)$, on a pour $m\geq n\geq 1$,

$$\begin{aligned}p^nT_n((1\otimes\varphi)^{-m}F(\beta_m-1)) =&\frac{1}{p^{m-n}}Tr_{K_m[[t]]/K_n[[t]]}((1\otimes\varphi)^{-m}F(\beta_m-1))\\ =&\frac{1}{p^{m-n}}\sum_{\zeta\in\mu_{p^{m-n}}}((1\otimes\varphi)^{-m}F(\zeta\beta_m-1))\end{aligned}$$

Le fait que $\psi((1-\Phi)F)=0$ implique que $\psi(F)=(1\otimes\varphi)F$ et donc que $(1\otimes\varphi^{-n})F=\psi^{m-n}((1\otimes\varphi^{-m})F)$. On en déduit que

$$p^nT_n((1\otimes\varphi)^{-m}F(\beta_m-1))=(1\otimes\varphi^{-n})F(\beta_n-1)\ .$$

D'où

$$p^nT_n(\alpha_F)=(1\otimes\varphi)^{-n}F(\beta_n-1)\ .$$

La formule pour $\delta_k(T_n(\alpha_F))$ se déduit du lemme C.5.2.
Si $\alpha\in((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}}\otimes\mathcal{D})^{\Phi=1}$ et F_α construit comme dans le lemme C.6.2, on a vu dans la démonstration que

$$(1\otimes\varphi^{-n})F_\alpha(\beta_n-1)=p^nT_n(\Phi^{-n}\alpha)=p^nT_n(\alpha)\ .$$

On en déduit que $\alpha \mapsto F_\alpha \mapsto \alpha_{F_\alpha}$ est l'identité sur $((B^+_{\max})^{G_{K_\infty}} \otimes \mathcal{D})^{\Phi=1}$ et que $F \mapsto \alpha_F \mapsto F_{\alpha_F}$ est l'identité à condition de se restreindre aux F tels que $\psi((1-\Phi))F = 0$.

Références

[1] P. Colmez, *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham,* Annals of Math. 148 (1998), 485-571.

[2] P. Colmez, *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie,* prépublication LMENS 97-28, à paraître dans J. reine angew. Math.

[3] F. Destrempes, *Explicit reciprocity laws for Lubin-Tate modules,* J. reine angew. Math. 463 (1995), 27-47.

[4] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines,* Invent. Math. 115 (1994), 81-149.

[5] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque 229 (1995), SMF (Paris).

[6] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques,* dans Proc. Int. Congress Math., Zürich (1994), pp. 400–410, Birkhäuser Verlag (1995).

[7] B. Perrin-Riou, *Zéros triviaux des fonctions L p-adiques, un cas particulier,* Compos. Math. 114 (1998), 37-76.

[8] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zéta p-adiques,* dans Modular functions of one vaiable 111 (1972), Lecture Notes in Math. 350.

Bernadette Perrin-Riou
Mathématiques, Bât 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex
France
Bernadette.PERRIN-RIOU@math.u-psud.fr