Sur les Formes Quadratiques de Hauteur 3 et de Degré au Plus 2

Ahmed Laghribi[1]

Received: December 9, 1998
Revised: May 12, 1999

Communicated by Ulf Rehmann

Abstract. Let F be a commutative field of characteristic not 2. In this paper, we give some results on the classification of F-quadratic forms of height 3 and degree ≤ 2.

Résumé. Soit F un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Dans ce papier, on donne certains résultats sur la classification des F-formes quadratiques de hauteur 3 et de degré ≤ 2.

1991 Mathematics Subject Classification: 11E04, 11E81
Keywords and Phrases: Quadratic form, Generic splitting of a quadratic form, height and degree of a quadratic form

1. Introduction

A une F-forme quadratique φ de dimension ≥ 3, on associe la quadrique projective X_φ d'équation $\varphi = 0$. On désigne par $F(\varphi)$ le corps des fonctions de X_φ. Lorsque φ est anisotrope de dimension 2 (resp. φ est isotrope de dimension 2 ou $\dim \varphi \leq 1$), on pose $F(\varphi) = F(\sqrt{-\det(\varphi)})$ (resp. $F(\varphi) = F$).

D'après [19], on associe à une forme quadratique $\varphi \not\sim 0$ une suite de formes quadratiques et d'extensions de F, appelée *la tour de déploiement générique* de φ, de la manière suivante: $\varphi_0 = \varphi_{an}$ (la partie anisotrope de φ), $F_0 = F$ et pour $n \geq 1$, on définit par récurrence $F_n = F_{n-1}(\varphi_{n-1})$ et $\varphi_n = ((\varphi_{n-1})_{F_n})_{an}$. *La hauteur* de φ, noté $h = \mathrm{h}(\varphi)$, est le plus petit entier tel que $\dim \varphi_h \leq 1$. Pour $j \in \{0, \cdots, h\}$, on note $i_j(\varphi)$ l'indice de Witt de φ_{F_j}. Clairement, on a $0 \leq i_0(\varphi) < \cdots < i_h(\varphi)$. La suite $\{i_0(\varphi), \cdots, i_h(\varphi)\}$ s'appelle *la suite des indices de déploiement* de φ (splitting pattern [14]). Si $\dim \varphi$ est impaire, alors $\dim \varphi_h = 1$ et φ est dite de degré 0; sinon $\dim \varphi_h = 0$ et donc φ_{h-1} devient hyperbolique sur $F_{h-1}(\varphi_{h-1})$, ce qui implique par un résultat de Knebusch

[1]Soutenu par les fonds FDS de l'Université Catholique de Louvain, Belgique.

[19, Theorem 5.8] et Wadsworth [32], que φ_{h-1} est semblable à une forme de Pfister $\rho \in P_dF_{h-1}$, qu'on appelle *la forme dominante* (leading form) de φ. L'entier d s'appelle *le degré* de φ qu'on note $\deg(\varphi)$. La forme φ est dite *bonne* si sa forme dominante $\rho \in P_dF_{h-1}$ est définie sur F, i.e. s'il existe une F-forme quadratique τ telle que $\rho \cong \tau_{F_{h-1}}$ (dans ce cas τ est unique à isométrie près [20, Proposition 9.2]). Lorsque φ est bonne de forme dominante τ, on dit que φ est *fortement bonne* (resp. *faiblement bonne*) si $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope (resp. $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope).

Ce procédé de déploiement générique d'une forme quadratique motive le problème suivant, dit *"problème de classification des formes quadratiques par hauteur et degré"*.

Problème: *Etant donné deux entiers positifs h et d, quelles sont les F-formes quadratiques φ telles que* $\mathrm{h}(\varphi) = h$ *et* $\deg(\varphi) = d$*?*

Jusqu'à présent, on a certaines réponses à ce problème. En effet, la caractérisation d'une forme quadratique anisotrope de hauteur 1 a été faite par Knebusch [19, Theorem 5.8] et de manière indépendante par Wadsworth [32]. Une telle forme quadratique est une voisine de codimension 0 ou 1. Dans [20, Lemma 10.1], Knebusch a caractérisé une forme quadratique anisotrope et excellente de hauteur 2 et de degré d en démontrant qu'une telle forme quadratique est de la forme $a\rho \otimes \pi'$ pour $a \in F^*$, $\rho \in P_dF$ et $\pi = \langle 1 \rangle \perp \pi' \in P_nF$ avec $n \geq 2$, et il a démontré qu'une forme quadratique anisotrope de hauteur 2 et de degré 1 qui n'est pas excellente est nécessairement de dimension 4 et de discriminant $\neq 1$ [20, Theorem 10.3]. Fitzgerald [8, 1.6] et Knebusch [20, Lemma10.1, Proposition 10.8] ont obtenu certains résultats sur les formes quadratiques anisotropes et bonnes de hauteur et de degré 2. Dans [17], Kahn a caractérisé de manière complète une forme quadratique de hauteur et de degré 2 en démontrant qu'une telle forme quadratique φ est excellente, ou une forme d'Albert (i.e. $\dim \varphi = 6$ et $d_{\pm}\varphi = 1$), ou $\varphi \in I^2F$ de dimension 8 telle que $\operatorname{ind} c(\varphi) = 2$. Pour les formes quadratiques anisotropes de hauteur 2 et de degré ≥ 3, Hurrelbrink et Rehmann [15, 3.4] ont montré qu'une forme quadratique anisotrope de hauteur 2, de degré 3 qui est bonne mais non excellente est de dimension 16. Ce résultat a été généralisé par Hoffmann [11] qui a montré qu'une forme quadratique anisotrope de hauteur 2, de degré d qui est bonne mais non excellente est de dimension 2^{d+1}. Pour le moment, on n'a pas une caractérisation complète des formes quadratiques de hauteur 2 et de degré ≥ 3. Dans ce sens, Kahn a posé la conjecture suivante.

Conjecture 1. *(Kahn* [17, Conjecture 7]*)*
(1) Une forme quadratique φ anisotrope qui est bonne mais non excellente, est de hauteur 2 *et de degré $d \geq 1$ si et seulement si $\varphi \cong \rho \otimes \psi$ pour $\rho \in P_{d-1}F$ et* $\dim \psi = 4$.
(2) Une forme quadratique φ anisotrope qui n'est pas bonne, est de hauteur 2

et de degré $d \geq 2$ si et seulement si $\varphi \cong \rho \otimes \gamma$ pour γ une forme d'Albert et $\rho \in P_{d-2}F$.

Théorème 1. *(*[17, Théorème 2.12]*)*
La conjecture 1(1) est vraie en degré $d = 3$.

Dans [18], Kahn a obtenu certains résultats sur la caractérisation des formes quadratiques de hauteur 3 et de degré 1.

Théorème 2. *(Kahn* [18, Corollary 1]*)*
Soit φ une forme quadratique anisotrope de hauteur 3 et de degré 1. Alors:
(1) La forme φ est de l'un des quatres types (s'excluant mutuellement):
(i) φ est excellente;
(ii) φ n'est pas excellente mais voisine de forme complémentaire une forme de dimension 4 et de discriminant $\neq 1$;
(iii) φ n'est ni voisine ni une forme d'Albert et $\dim \varphi = 6$;
(iv) φ n'est pas voisine et $\dim \varphi > 6$. Dans ce cas, $(\varphi_{F(\varphi)})_{an}$ est excellente.
(2) Si φ n'est pas voisine telle que $\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{an} = 6$, alors $\dim \varphi \leq 16$.

1.1. Les formes quadratiques de hauteur 3, de degré 1 et de dimension > 6 (resp. de hauteur 3, de degré 2 et de dimension > 16). Les formes quadratiques anisotropes de hauteur 3 et de degré 1 qui ont la plus petite dimension sont celles de type (iii) comme dans le théorème 2, i.e. de dimension 6. Dans cette section, on va s'intéresser à la caractérisation des formes quadratiques de hauteur 3, de degré 1 et de dimension > 6 (resp. de hauteur 3, de degré 2 et de dimension > 16). Les formes quadratiques de hauteur 3, de degré 2 et de dimension ≤ 16 seront traitées dans la section 1.2.

Les formes quadratiques φ anisotropes de hauteur 3 et de degré 1 telles que $\dim \varphi > 6$ (resp. de hauteur 3 et de degré 2 telles que $\dim \varphi > 16$), se partagent en quatre types qui s'excluent mutuellement:

Type I: Les formes quadratiques excellentes. Ces formes quadratiques sont décrites dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit φ une forme quadratique anisotrope. Alors, on a équivalence entre:*
(1) φ est excellente de hauteur 3 et de degré $d \geq 1$;
(2) Il existe $a \in F^*$, des formes de Pfister $\tau \in P_dF$, $\lambda_1 = \langle 1 \rangle \perp \lambda_1'$, λ_2 telles que $\deg(\lambda_1) \geq 1$, $\deg(\lambda_2) \geq 2$ et $\varphi \cong a\tau \otimes (\lambda_1' \otimes \lambda_2 \perp \langle 1 \rangle)$.

Type II: Les formes quadratiques voisines mais non excellentes. Ces formes quadratiques sont décrites dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit φ une forme quadratique anisotrope qui n'est pas excellente, de degré 1 ou 2. Alors, on a équivalence entre:*
(1) φ est voisine de hauteur 3;
(2) • Si $\deg(\varphi) = 1$: φ est voisine de forme complémentaire une forme quadratique de dimension 4 et de discriminant $\neq 1$. En particulier, $\dim \varphi = 2^n - 4$

pour un certain entier $n \geq 4$.
• *Si* $\deg(\varphi) = 2$: φ *est voisine de forme complémentaire une forme quadratique* ψ *telle que* ψ *est d'Albert ou bien* $\psi \in I^2F$ *de dimension* 8 *avec* $\operatorname{ind} c(\psi) = 2$. *En particulier, il existe un entier* $m \geq 5$ *qui vérifie* $\dim \varphi = 2^m - 6$ *ou* $2^m - 8$.

TYPE III: Les formes quadratiques φ anisotropes mais non voisines, de dimension différente de $2^{\deg(\varphi)}k$ pour tout entier k impair. Ces formes quadratiques sont décrites dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Soit* φ *une forme quadratique anisotrope qui n'est pas voisine, de degré* $d = 1$ *ou* 2 *telle que* $\dim \varphi \neq 2^d k$ *pour tout entier* k *impair. On suppose que* $\dim \varphi > 6$ *lorsque* $d = 1$, *et que* $\dim \varphi > 16$ *lorsque* $d = 2$. *Alors, on a équivalence entre:*
(1) φ *est de hauteur* 3*;*
(2) $\varphi \in GP'_{n,d}F$ *pour un certain entier* $n \geq d + 2$ *(voir définition 3).*

TYPE IV: Les formes quadratiques φ anisotropes mais non voisines, de dimension $2^{\deg(\varphi)}k$ pour un certain entier k impair. Pour le moment, on n'a pas une caractérisation complète de ces formes quadratiques. D'après la proposition 3, on obtient que ces formes quadratiques sont celles qui sont faiblement bonnes, et par conséquent les formes quadratiques décrites dans le théorème 3 sont celles qui sont fortement bonnes.

PROPOSITION 3. *Soit* φ *une forme quadratique anisotrope qui n'est pas voisine, de degré* 1 *ou* 2 *telle que* $\dim \varphi > 6$ *lorsque* $\deg(\varphi) = 1$, *et que* $\dim \varphi > 16$ *lorsque* $\deg(\varphi) = 2$. *Supposons que* φ *soit de hauteur* 3. *Alors,* φ *est bonne. De plus, on a équivalence entre:*
(1) φ *est faiblement bonne (resp. fortement bonne);*
(2) Il existe un entier k *impair tel que* $\dim \varphi = 2^{\deg(\varphi)}k$ *(resp.* $\dim \varphi \neq 2^{\deg(\varphi)}k$ *pour tout entier* k *impair);*
(3) $\varphi_{F(\tau)} \sim 0$ *(resp.* $\varphi_{F(\tau)}$ *est semblable à une forme de Pfister anisotrope) où* τ *est la forme dominante de* φ.

Le théorème suivant donne une caractérisation d'une forme quadratique φ anisotrope et faiblement bonne, de hauteur 3 et de degré 1 telle que $\dim \varphi \leq 16$. En particulier, on raffine le théorème 2(2) lorsqu'il s'agit d'une forme quadratique faiblement bonne.

THÉORÈME 4. *Soit* φ *une forme quadratique anisotrope de discriminant à signe* $d \neq 1$. *Supposons que* φ *ne soit pas voisine et* $\dim \varphi > 6$. *Alors, on a équivalence entre:*
(1) φ *est faiblement bonne de hauteur* 3 *et de dimension* ≤ 16*;*
(2) φ *est faiblement bonne de hauteur* 3 *et* $\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{an} = 6$*;*
(3) $\varphi \cong \langle 1, -d\rangle \otimes \xi$ *pour* ξ *une forme quadratique de dimension* 5.

1.2. LES FORMES QUADRATIQUES DE HAUTEUR 3, DE DEGRÉ 2 ET DE DIMENSION AU PLUS 16.

• Cas des formes quadratiques de dimension 8.

La proposition suivante donne une caractérisation des formes quadratiques anisotropes de dimension 8, de hauteur 3 et de degré 2.

Proposition 4. *(*[13], [15]*)*
Une forme quadratique φ anisotrope de dimension 8 *est de hauteur* 3 *et de degré* 2 *si et seulement si $\varphi \in I^2F$ et* $\operatorname{ind} c(\varphi) \geq 4$.

• Cas des formes quadratiques de dimension 10.

Pour les formes quadratiques de dimension 10, de hauteur 3 et de degré 2, on a la caractérisation suivante.

Proposition 5. *(*[13]*) Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension* 10 *qui n'est pas voisine. On a équivalence entre:*
(1) φ est de hauteur 3 *et de degré* 2*;*
(2) Il existe $\pi = \langle 1 \rangle \perp \pi' \in P_3F$, $\tau = \langle 1 \rangle \perp \tau' \in P_2F$ telles que $\varphi \cong a(\pi' \perp -\tau')$ pour $a \in F^*$ convenable;
(3) $\varphi \in I^2F$ et $\operatorname{ind} c(\varphi) = 2$.

• Cas des formes quadratiques de dimension 12.

On n'a pas d'énoncé, même conjecturale, sur la caractérisation des formes quadratiques de dimension 12 fortement bonnes de hauteur 3 et de degré 2. Par contre pour celles qui sont faiblement bonnes, on pose la conjecture suivante.

Conjecture 2. *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension* 12 *qui n'est pas voisine. Alors, on a équivalence entre:*
(1) φ est faiblement bonne, de hauteur 3 *et de degré* 2*;*
(2) Il existe $\delta \in I^2F$ de dimension 8 *telle que* $\operatorname{ind} c(\delta) = 2$ *et $\varphi \perp \delta \in I^4F$.*

La conjecture 2 est liée à la conjecture 3 sur le problème d'isotropie d'une forme quadratique sur le corps des fonctions d'une quadrique (Théorème 5).

Conjecture 3. *Soient $\pi \in P_3F$, $\tau \in P_2F$. Supposons que $\delta := (\pi \perp -\tau)_{an}$ soit de dimension* 10*. Si ψ est une forme quadratique telle que $\delta_{F(\psi)}$ soit isotrope, alors* $\dim \psi \leq \dim \delta$.

Théorème 5. *La conjecture 3 implique la conjecture 2.*

• Cas des formes quadratiques de dimension 14 ou 16.

On commence par un résultat général.

Proposition 6. *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension* 14 *ou* 16*, de hauteur* 3 *et de degré* 2*. Alors, on a les assertions suivantes:*
(1) φ est fortement bonne.
(2) Soit $\tau \in P_2F$ la forme dominante de φ. On a:
(i) Si $\dim \varphi = 14$*, alors $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope de hauteur* 2 *et de degré* 3.
(ii) Si $\dim \varphi = 16$*, alors $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope de hauteur* 1 *ou de hauteur* 2 *et de degré* 3.

La proposition 6 permet de ramener la caractérisation des formes quadratiques de hauteur 3, de degré 2 et de dimension 14 ou 16 à celle des formes quadratiques de hauteur ≤ 2.

Jusqu'à présent, on ne connait pas un exemple d'une forme quadratique anisotrope de dimension 14, de hauteur 3 et de degré 2. Le théorème 6 précise de manière conjecturale qu'il n'existe pas une telle forme quadratique.

Théorème 6. *Supposons que toute forme quadratique anisotrope de hauteur* 2*, de degré* 3 *qui n'est pas bonne soit de dimension* 12*. Alors:*
(1) Il n'existe pas de forme quadratique anisotrope de hauteur 3*, de degré* 2 *et de dimension* 14*.*
(2) Une forme quadratique anisotrope φ *de dimension* 16 *qui n'est pas voisine est de hauteur* 3 *et de degré* 2 *si et seulement si* $\varphi \in GP_{4,2}F$*.*

Remarque. L'hypothèse qui a été faite dans le théorème 6 est motivée par la conjecture 1(2) en degré $d = 3$. ■

Remerciements. *Ce travail a été fait à l'institut de mathématiques de l'Université Catholique de Louvain, et a été révisé durant mon séjour à la Faculté Jean Perrin. Je remercie ces deux institutions pour l'aide et l'hospitalité que j'ai eues. Je tiens à remercier* B. Kahn *pour ses commentaires intéressants. Aussi, je remercie le referee pour les différentes suggestions concernant la rédaction.*

2. Définitions et rappels de résultats

Toutes les notations et définitions concernant les formes quadratiques se trouvent dans [23] et [29].

La somme orthogonale et le produit de deux formes quadratiques φ et ψ, sont notés respectivement $\varphi \perp \psi$ et $\varphi \otimes \psi$.

Si $a \in F^*$, on note $\langle a \rangle \otimes \varphi = a\varphi$. On dit que ψ est une sous-forme de φ et on note $\psi < \varphi$ s'il existe une forme quadratique ρ telle que $\varphi \cong \psi \perp \rho$ où $\cong$ désigne l'isométrie des formes quadratiques. On dit que φ et ψ sont semblables s'il existe $a \in F^*$ tel que $\varphi \cong a\psi$. Une forme quadratique φ est dite isotrope (resp. hyperbolique) si $\mathbb{H} := \langle 1, -1 \rangle < \varphi$ (resp. $\varphi \cong \mathbb{H} \perp \cdots \perp \mathbb{H}$). L'indice de Witt $i_W(\varphi)$ de φ est le plus grand entier n tel que $n \times \mathbb{H} := \underbrace{\mathbb{H} \perp \cdots \perp \mathbb{H}}_{\text{n fois}} < \varphi$.
Deux formes quadratiques φ et ψ sont dites équivalentes et on note $\varphi \sim \psi$, si $\varphi \perp -\psi$ est hyperbolique. La partie anisotrope de φ est l'unique forme quadratique anisotrope, notée φ_{an}, telle que $\varphi \sim \varphi_{an}$.

Une n-forme de Pfister est une forme de type $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$, qu'on note $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle$. On note P_nF (resp. GP_nF) l'ensemble des n-formes de Pfister à isométrie près (resp. l'ensemble des formes quadratiques qui sont semblables à des n-formes de Pfister). Une forme quadratique φ est dite voisine s'il existe une n-forme de Pfister π tel que $\dim \varphi > 2^{n-1}$ et $a\pi \cong \varphi \perp \psi$ pour un certain $a \in F^*$ et une certaine forme quadratique ψ qu'on appelle la forme complémentaire de φ; $\dim \psi$ est dite la codimension de φ. Les formes quadratiques π et ψ sont uniques à isométrie près.

On note $I^nF = (IF)^n$ où IF est l'idéal fondamental de $W(F)$ formé des formes quadratiques de dimension paire. On utilisera fréquemment le résultat, dit le Hauptsatz d'Arason-Pfister, qui affirme que si $\varphi \in I^nF$ anisotrope, alors $\dim \varphi \geq 2^n$ [29, Chapter 4, 5.6].

L'ensemble $J_n(F) = \{\varphi \in W(F) \mid \deg(\varphi) \geq n\}$ est un idéal de $W(F)$ qui vérifie $I^nF \subset J_n(F)$ pour tout $n \geq 0$ [19, Theorem 6.4, Corollary 6.6].

L'invariant de Clifford $c(\varphi)$ de φ est la classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F, de $C(\varphi)$ (algèbre de Clifford de φ) ou $C_0(\varphi)$ (algèbre de Clifford paire de φ) suivant que $\dim \varphi$ est paire ou non. On désigne par $\operatorname{ind} c(\varphi)$ l'indice de Schur de $C(\varphi)$ ou $C_0(\varphi)$ suivant que $\dim \varphi$ est paire ou non.

Théorème 7. *(1) (Théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister* [29, Chapter 4, 5.4(ii)]*) Soient $\psi = \langle 1 \rangle \perp \psi'$, φ deux formes quadratiques telles que φ soit anisotrope et que $\varphi_{F(\psi)} \sim 0$. Alors pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)$, on a $\alpha\psi < \varphi$. En particulier,* $\dim \varphi \geq \dim \psi$.
(2) Soit τ une forme de Pfister. Alors:
(2.1) (Pfister [29, Chapter 4, 1.5]*) On a que τ est isotrope si et seulement si $\tau \sim 0$. De plus, τ est multiplicative, i.e. $D_F(\tau) = G_F(\tau)$.*
(2.2) ([29, Chapter 4, 5.4(iv)]*)* $\mathrm{Ker}(W(F) \longrightarrow W(F(\tau))) = \tau W(F)$.

Définition 1. [20, Definition 7.7] *Toute forme quadratique de dimension ≤ 1 est dite excellente. Une forme quadratique de dimension ≥ 2 est dite excellente si elle est voisine et sa forme complémentaire est excellente.*

Définition 2. *Soit K/F une extension de corps.*
(1) On dit qu'une K-forme quadratique φ est définie sur F s'il existe une F-forme quadratique ψ telle que $\varphi \cong \psi_K$.
(2) ([20]*) On dit que K/F est excellente si pour toute F-forme quadratique φ, la K-forme quadratique $(\varphi_K)_{an}$ est définie sur F.*
(3) ([17]*) Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que K/F satisfait à la descente pour les n-formes de Pfister si pour toute K-forme quadratique $\varphi \in P_nK - \{0\}$ qui est définie sur F, il existe $\psi \in P_nF$ telle que $\psi_K \cong \varphi$.*

Proposition 7. *(1) (*[29, Chapter 2, 5.1] *pour $d = 1$;* [2] *pour $d = 2$) Soit $\pi \in GP_dF$ avec $d \leq 2$. Alors, l'extension $F(\pi)/F$ est excellente.*
(2) ([6, 2.10]*) Si K/F est une extension excellente, alors elle satisfait à la descente pour les n-formes de Pfister quel que soit $n \geq 1$.*

Définition 3. *Soient $n > m \geq 1$ deux entiers, φ une forme quadratique anisotrope de dimension 2^n. On dit que φ appartient à $GP'_{n,m}F$ (resp.*

$GP_{n,m}F$) s'il existe $\tau \in GP_mF$ telle que $\varphi \perp \tau \in J_n(F)$ (resp. $(\varphi \perp \tau)_{an} \in GP_nF$).

L'ensemble $GP_{n,m}F$ a été introduit par Hoffmann [10]. Il est clair que $GP_{n,m}F \subset GP'_{n,m}F$. Dans [10, Conjecture 3.9], Hoffmann a conjecturé que $GP_{n,m}F = GP'_{n,m}F$ (la notation $GP'_{n,m}F$ n'a pas été introduite dans [10]).

PROPOSITION 8. *(*[10, Proposition 3.6]*) Soient $n > m \geq 1$ deux entiers. Alors:*
(1) Toute forme quadratique de $GP'_{n,m}F$ est fortement bonne.
(2) Si de plus $n \geq m+2$, alors toute forme quadratique de $GP'_{n,m}F$ est de hauteur 3 et de degré m.

Pour tout $n \geq 0$ entier, H^nF est le groupe de cohomologie galoisienne $H^n(G_s, \mathbf{Z}/2)$ où G_s est le groupe de Galois d'une clôture séparable de F. Par la théorie de Kummer, on a $H^0F \simeq \mathbf{Z}/2$, $H^1F \simeq F^*/F^{*2}$ et H^2F est isomorphe à la 2-torsion de $\mathrm{Br}(F)$.

D'après Arason [1, Satz 1.6], il existe une application $\tilde{e}^n$ de P_nF vers H^nF, définie par $\tilde{e}^n(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle) = (a_1)\cdot \ldots \cdot (a_n) \in H^nF$ où $\cdot$ est le cup produit de l'algèbre de cohomologie H^*F.

Pour $n = 0,1,2$, l'application $\tilde{e}^n$ se prolonge en un homomorphisme e^n de $I^nF/I^{n+1}F$ vers H^nF. Les homomorphismes e^0, e^1, e^2 correspondent à $e^0(\varphi) = \dim\varphi \pmod 2$, $e^1(\varphi) = d_\pm\varphi \pmod{F^{*2}}$ et $e^2(\varphi) = c(\varphi)$.

On a que e^0 et e^1 sont des isomorphismes. L'homomorphisme e^2 est un isomorphisme d'après Merkur'ev [24]; $\tilde{e}^3$ se prolonge en un homomorphisme e^3 de I^3F/I^4F vers H^3F d'après Arason [1], et e^3 est un isomorphisme d'après Merkur'ev-Suslin [26] et Rost [28]; $\tilde{e}^4$ se prolonge en un homomorphisme e^4 de I^4F/I^5F vers H^4F d'après Jacob-Rost [16] et Szyjewski [30], et e^4 est un isomorphisme d'après Rost (non publié). Récemment, Orlov, Vishik et Voevodsky ont montré que $\tilde{e}^n$ se prolonge en un isomorphisme e^n de $I^nF/I^{n+1}F$ vers H^nF pour tout n [27].

3. DÉMONSTRATIONS

Le long de cette section et pour une F-forme quadratique φ, on note $\varphi_1 = (\varphi_{F(\varphi)})_{an}$.

Le lemme suivant est bien connu. On en aura besoin pour la suite.

LEMME 1. *Soient φ une forme quadratique bonne, de degré $d \geq 1$ et de forme dominante τ. Si ρ est une forme quadratique telle que $\varphi \sim \rho \otimes \tau$, alors la dimension de ρ est impaire.*

DÉMONSTRATION. Si la dimension de ρ était paire, on aurait $\rho \in IF$. Puisque $\tau \in I^dF$, on aurait $\varphi \in I^{d+1}F$ et donc φ serait de degré $\geq d+1$, ceci est absurde. ■

3.1. Démonstration de la proposition 1. La démonstration de la proposition 1 se déduit de [18, Proposition 7.17] et [8, Proposition 1.2].

3.2. Démonstration de la proposition 2. La démonstration de la proposition 2 est une conséquence du lemme 2 et de la caractérisation des formes quadratiques de hauteur 2 et de degré ≤ 2.

Lemme 2. *Soient φ une forme quadratique voisine anisotrope et φ' sa forme complémentaire. Alors,* $\deg(\varphi) = \deg(\varphi')$ *et* $\mathrm{h}(\varphi) = \mathrm{h}(\varphi') + 1$.

Démonstration. D'après [15], les formes quadratiques φ' et $\varphi'_{F(\varphi)}$ ont la même suite des indices de déploiement. En particulier, $\mathrm{h}(\varphi') = \mathrm{h}(\varphi'_{F(\varphi)})$ et $\deg(\varphi') = \deg(\varphi'_{F(\varphi)})$. On a $\varphi_{F(\varphi)} \sim -\varphi'_{F(\varphi)}$. D'après [9, Theorem 1], on obtient que $\varphi'_{F(\varphi)}$ est anisotrope. Par conséquent, $\varphi_1 = ((\varphi)_{F(\varphi)})_{an} = -\varphi'_{F(\varphi)}$. Ainsi, $\mathrm{h}(\varphi) = \mathrm{h}(\varphi_1) + 1 = \mathrm{h}(\varphi'_{F(\varphi)}) + 1 = \mathrm{h}(\varphi') + 1$ et $\deg(\varphi) = \deg(\varphi_1) = \deg(\varphi'_{F(\varphi)}) = \deg(\varphi')$. ■

3.3. Un résultat sur les formes quadratiques de hauteur 3 et de degré 2. On aura besoin de la proposition suivante dans les démonstrations de la proposition 3 et du théorème 3.

Proposition 9. *Soit φ une forme quadratique anisotrope qui n'est pas voisine. Supposons que φ soit de hauteur* 3*, de degré* 2 *et de dimension* ≥ 10*. Soient $\varphi_1 = (\varphi_{F(\varphi)})_{an}$ et τ la forme dominante de φ. Alors:*
(1) La forme φ est bonne, i.e. on peut supposer que $\tau \in P_2F$. En particulier, $c(\varphi) = c(\tau)$ *et* $\operatorname{ind} c(\varphi) = 2$.
(2) La forme φ_1 satisfait l'une des deux conditions suivantes:
(2.1) φ_1 est voisine dont la forme complémentaire est semblable à $\tau_{F(\varphi)}$. En particulier, $\varphi_{F(\varphi)(\tau)} \sim 0$.
(2.2) $\dim \varphi_1 = 8$, $c(\varphi_1) = c(\tau_{F(\varphi)})$ *et* $\operatorname{ind} c(\varphi_1) = 2$.
(3) Si $\dim \varphi > 16$*, alors le cas (2.2) est impossible.*

Démonstration. (1) Cette assertion a été prouvée dans [18, Corollary 1(f)].

(2) D'après (1), la forme φ_1 est bonne de hauteur 2 et de forme dominante $\tau_{F(\varphi)} \in P_2F(\varphi)$. En utilisant la caractérisation des formes quadratiques de hauteur et de degré 2 [17], on déduit que l'une des assertions (2.1) et (2.2) est vérifiée.

(3) Supposons que $\dim \varphi > 16$ et que φ_1 vérifie la condition (2.2). On aura besoin du résultat suivant.

Théorème 8. *(*[22]*)*
Soient φ une forme quadratique de dimension > 16, $K = F(\varphi)$ et $\psi \in I^2K$ de dimension 8 *telle que* $\operatorname{ind} c(\psi) = 2$*. On suppose que $\psi \in \mathrm{Im}(W(F) \longrightarrow W(K))$. Alors ψ est définie sur F.*

Ce théorème permet de déduire que φ_1 est définie sur F. D'après [20, Theorem 7.13], la forme φ est voisine, ceci est absurde.

3.4. Démonstration de la proposition 3. On a que φ est bonne (évident pour $\deg(\varphi)=1$ et c'est la proposition 9 pour $\deg(\varphi)=2$). Soit τ la forme dominante de φ.
• Si $\deg(\varphi)=1$, alors on obtient par le théorème 2(iv) que φ_1 est excellente de hauteur 2. Ainsi, $\varphi_{F(\varphi)(\tau)}\sim 0$.
• Si $\deg(\varphi)=2$, alors on obtient par la proposition 9(3) que $\varphi_{F(\varphi)(\tau)}\sim 0$.

(i) D'après [19, Theorem 5.8] et si $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope, alors $\varphi_{F(\tau)}$ est semblable à une forme de Pfister anisotrope, en particulier φ est de dimension une puissance de 2.

(ii) Lorsque $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope, on déduit que $\varphi_{F(\tau)}\sim 0$, et donc $\dim\varphi = 2^{\deg(\varphi)}k$ pour un certain entier k impair (Lemme 1).

On déduit les équivalences de la proposition en combinant (i) et (ii).

3.5. Démonstration du théorème 3. (1) $\Longrightarrow$ (2) D'après la proposition 3, la forme φ est bonne et que $\varphi_{F(\tau)}$ est semblable à une forme de Pfister anisotrope où $\tau\in P_dF$ est la forme dominante de φ. Par la proposition 7, il existe une forme $\pi\in GP_nF$ telle que $\varphi_{F(\tau)}\cong\pi_{F(\tau)}$. Les hypothèses du théorème impliquent que $n\geq d+2$. Puisque $\varphi\perp -\pi\in \operatorname{Ker}(W(F)\longrightarrow W(F(\tau)))$, on obtient que $\varphi\perp -\pi\sim\tau\otimes\rho$ pour une forme ρ de dimension impaire (Lemme 1). Ainsi, $\varphi\equiv\tau\otimes\rho \pmod{J_n(F)}$. Par conséquent, $\varphi\in P^w_{n,d}F$ au sens de [10, Definition 3.4(ii)]. D'après [10, Corollary 3.7], on obtient que $i_W(\varphi_{F(\varphi)})=2^{d-1}$. Par conséquent, $\dim\varphi_1 = 2^n-2^d$. D'après le théorème 2(iv) et la proposition 9, on déduit que φ_1 est voisine et que sa forme complémentaire est semblable à la forme $\tau_{F(\varphi)}$ qui est de dimension 2^d. Par conséquent, il existe $a\in F(\varphi)^*$ tel que $\varphi_1\perp a(\tau_{F(\varphi)})\in GP_nF(\varphi)\subset I^nF(\varphi)\subset I^{d+2}F(\varphi)$. D'autre part, $\varphi\perp k\tau\sim\pi\perp\tau\otimes(\rho\perp\langle k\rangle)\in I^{d+2}F$, avec $k\in F^*$ qui vérifie $\rho\perp\langle k\rangle\in I^2F$. Par conséquent, $a(\tau_{F(\varphi)})\equiv k(\tau_{F(\varphi)}) \pmod{I^{d+2}F(\varphi)}$. Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, on obtient que $a(\tau_{F(\varphi)})\cong k(\tau_{F(\varphi)})$. Ainsi, $\varphi_1\perp k(\tau_{F(\varphi)})\in GP_nF(\varphi)$. Par conséquent, $\varphi_2=(\varphi_{F(\varphi)(\varphi_1)})_{an}=(-k\tau)_{F(\varphi)(\varphi_1)}$ est définie sur F. D'après [18, Proposition 3(iii)], on obtient que $\deg(\varphi\perp k\tau)=n$. Par conséquent, $\varphi\equiv -k\tau \pmod{J_n(F)}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) C'est une conséquence de la proposition 8(2).

3.6. Démonstration du théorème 4. On aura besoin du résultat suivant.

Proposition 10. *(Rost)*
Soient φ et $\tau=\langle\langle a,b\rangle\rangle$ deux formes quadratiques anisotropes. Alors, on a équivalence entre:
(1) $i_W(\varphi_{F(\tau)})\geq 2k$ et $\varphi_{F(\sqrt{a})}\sim 0$;
(2) Il existe deux formes quadratiques λ, γ telles que $\varphi\cong\langle\langle a,b\rangle\rangle\otimes\lambda\perp\langle\langle a\rangle\rangle\otimes\gamma$ avec $\dim\lambda=k$.

Démonstration. Le résultat a été prouvé par Rost [12, Lemma 2.6] lorsque $k = 1$. Le cas général se déduit par une simple récurrence sur k. ■

Démonstration du théorème 4. Soit $d = d_{\pm}\varphi$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Evident.

(2) $\Longrightarrow$ (3) D'après la proposition 3, on a $\varphi_{F(\sqrt{d})} \sim 0$. Ainsi, $\varphi \cong \langle\langle d\rangle\rangle \otimes \eta$ avec $\dim \eta \geq 4$. Par le théorème 2(2), on a $\dim \eta \leq 8$. Puisque la dimension de η est impaire (Lemme 1), on a $\dim \eta = 5$ ou 7. Si $\dim \eta = 5$, alors le théorème est démontré. Supposons que $\dim \eta = 7$. Soit $b \in F^*$ tel que $\langle\langle b\rangle\rangle$ soit semblable à une sous-forme de η. Alors, $\tau \cong \langle\langle d, b\rangle\rangle$ est semblable à une sous-forme de φ. Par conséquent, $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope et $i_W(\varphi_{F(\tau)}) \geq i_W(\varphi_{F(\varphi)}) = 4$. Par la proposition 10, $\varphi \cong \langle\langle d, b\rangle\rangle \otimes \lambda \perp \langle\langle d\rangle\rangle \otimes \gamma$ avec $\dim \lambda = 2$. On a bien que $\dim \gamma = 3$. Ecrivons $\gamma = \langle k\rangle \perp \mu$ avec $\dim \mu = 2$. Soit $\xi = \langle k\rangle \perp \langle\langle b\rangle\rangle \otimes \lambda$. On a $\varphi = \langle\langle d\rangle\rangle \otimes (\xi \perp \mu)$. Clairement, ξ est voisine de dimension 5. Ainsi, il existe une forme quadratique ξ' de dimension 3 telle que $\xi \perp \xi' \in GP_3F$. On peut supposer que $1 \in D_F(\xi')$, et donc $\xi \perp \xi' \in P_3F$. Par conséquent, $\pi := \langle\langle d\rangle\rangle \otimes (\xi \perp \xi') \in P_4F$. On a $\varphi \perp \nu \sim \pi$, où $\nu = \langle\langle d\rangle\rangle \otimes (-\mu \perp \xi')$. Clairement, $\dim \nu = 10$. Si ν est isotrope, alors $\dim(\pi_{F(\varphi)})_{an} = \dim((\varphi \perp \nu)_{F(\varphi)})_{an} \leq 6 + 8 < 16$. Ainsi, $\pi_{F(\varphi)} \sim 0$, et donc φ est voisine, ceci est absurde. Si ν est anisotrope, alors ν admet la propriété de déploiement maximal (maximal splitting property; voir [13, Theorem 5.1]). Puisque $\varphi \perp \nu \sim \pi \in P_4F$, on obtient que $\varphi_{F(\pi)} \sim -\nu_{F(\pi)}$. Puisque $\dim \nu < \dim \varphi$, la forme $\varphi_{F(\pi)}$ est isotrope. On a $\dim(\nu_{F(\pi)})_{an} = \dim(\varphi_{F(\pi)})_{an} \leq \dim(\varphi_{F(\varphi)})_{an} = 6$. Ainsi, $\nu_{F(\pi)}$ est isotrope. D'après [9, Corollary 3], ν est voisine de π. Puisque $1 \in D_F(\nu)$, on a $\nu \subset \pi$. Ainsi, $\dim(\pi \perp -\nu)_{an} = 16 - 10 = 6$. Puisque $\varphi \sim \pi \perp -\nu$, on obtient que $\dim \varphi_{an} = 6$, ceci est absurde.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Comme dans le début de la preuve de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (3), on obtient que $\varphi \cong \langle\langle d\rangle\rangle \otimes \eta$ pour η de dimension 5 ou 7. Par le théorème 2(iv), la forme quadratique φ_1 est excellente de hauteur 2 et de degré 1. Ainsi, $\dim \varphi_1 = 2^n - 2$ pour un certain entier $n \geq 3$. Puisque $\dim \varphi_1 \leq \dim \varphi - 2 \leq 2 \cdot 7 - 2 = 12$, on déduit que $n = 3$ et donc $\dim \varphi_1 = 6$.

3.7. Démonstration du théorème 5. On commence par un lemme.

Lemme 3. *Soient $\varphi \in I^2F$ anisotrope, $\tau \in P_2F - \{0\}$ telles que $\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{an} = 8$ et $c(\varphi) = c(\tau)$. Alors, on a les assertions suivantes:*
(1) Si $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope, alors il existe $\eta \in GP_3F$, $r \in F^*$ tels que $\varphi \perp \eta \perp r\tau \in I^4F$. Si de plus, $\dim \varphi \in \{14, 16\}$, alors $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope.
(2) Supposons que $\varphi_{F(\tau)}$ soit anisotrope de hauteur ≥ 2, $\dim \varphi = 16$ et qu'il existe $\delta \in GP_3F$, $s \in F^*$ tels que $\varphi \perp \delta \perp s\tau \in I^4F$. Alors, $\varphi_{F(\delta)}$ est anisotrope.

Démonstration. (1) Supposons que $\varphi_{F(\tau)}$ soit isotrope. On obtient que $i_W(\varphi_{F(\tau)}) \geq i_W(\varphi_{F(\varphi)})$. Puisque $F(\tau)/F$ est excellente et que $\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{an} = 8$, il existe η une forme de dimension 8 telle que $\varphi_{F(\tau)} \sim -\eta_{F(\tau)}$. Puisque $c(\eta)_{F(\tau)} = 0$, on peut supposer par la proposition 7 que $\eta \in GP_3F$. Puisque $\varphi \perp \eta \in \mathrm{Ker}(W(F) \longrightarrow W(F(\tau)))$, on déduit que $\varphi \perp \eta \sim \rho \otimes \tau$ pour ρ une forme de dimension impaire (Lemme 1). Soit $r \in F^*$ tel que $\rho \perp \langle r \rangle \in I^2F$. Ainsi,

$$\varphi \perp \eta \perp r\tau \in I^4F \tag{1}$$

Supposons, de plus, que $\dim \varphi \in \{14, 16\}$. On déduit par l'équation (1) et le Hauptsatz d'Arason-Pfister que $\varphi_{F(\tau)(\eta)} \sim 0$. Si la forme $\varphi_{F(\eta)}$ est anisotrope, on obtient que $\varphi_{F(\eta)} \cong \tau \otimes \gamma$ pour γ une forme de dimension 4. Ainsi, $\dim \varphi = 16$ et $c(\varphi)_{F(\eta)} = 0$. Par le théorème de réduction d'indice ([31], [25]), on déduit que $c(\varphi) = 0$, ceci est absurde. Ainsi, $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope.

(2) Supposons que $\varphi_{F(\tau)}$ soit anisotrope de hauteur ≥ 2, $\dim \varphi = 16$ et qu'il existe $\delta \in GP_3F$, $s \in F^*$ tels que $\varphi \perp \delta \perp s\tau \in I^4F$. Si $\varphi_{F(\delta)}$ est isotrope, alors $i_W(\varphi_{F(\delta)}) \geq i_W(\varphi_{F(\varphi)}) = 4$. Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister $\varphi_{F(\delta)(\tau)} \sim 0$. Puisque $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope, on déduit que $\varphi_{F(\tau)} \cong \delta \otimes \rho$ pour ρ une forme de dimension 2. Ainsi, $\varphi_{F(\tau)} \in GP_4F(\tau) - \{0\}$ et donc elle est de hauteur 1, ceci est absurde. ■

Démonstration du théorème 5. Supposons que la conjecture 3 soit vraie. Soit φ une forme quadratique de dimension 12 qui n'est pas voisine.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que φ soit faiblement bonne, de hauteur 3 et de degré 2. Soit $\tau \in P_2F$ la forme dominante de φ. On a $\varphi_{F(\tau)} \not\sim 0$ car sinon φ serait divisible par τ et donc serait une voisine. Par la proposition 9, on a $\dim \varphi_1 = 8$ et $c(\varphi) = c(\tau)$. Puisque $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope, on déduit par le lemme 3 l'existence de $\eta \in GP_3F$, $r \in F^*$ tels que

$$\varphi \perp \eta \perp r\tau \in I^4F \tag{2}$$

Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister et l'équation (2), on déduit que $(\varphi_1 \perp r\tau)_{F(\varphi)(\eta)} \sim 0$. Par conséquent $\varphi_1 \perp (r\tau)_{F(\varphi)} \sim \lambda\eta$ pour $\lambda \in F(\varphi)^*$ convenable. Puisque $\dim \varphi_1 = 8$, on obtient $i_W((-r\tau)_{F(\varphi)} \perp \lambda\eta) \geq 2$. Par la multiplicativité d'une forme de Pfister, il existe $\alpha \in F(\varphi)^*$ tel que $(-r\tau)_{F(\varphi)} \perp \lambda\eta \sim \alpha(\eta' \perp -\tau')_{F(\varphi)}$ ([5, Theorem 4.5], [10, Lemma 3.2]). Puisque $i_W((-r\tau)_{F(\varphi)} \perp \lambda\eta) \geq 2$, on déduit que $(\eta' \perp -\tau')_{F(\varphi)}$ est isotrope. Par la conjecture 3, $\eta' \perp -\tau'$ est isotrope. Soit $\delta := -r(\eta' \perp -\tau')_{an} \in I^2F$. On affirme que $\dim \delta = 8$, car sinon $\dim \delta = 6$ ou 4. Or si $\dim \delta = 6$, alors δ est une forme d'Albert anisotrope et donc $\mathrm{ind}\, c(\delta) = 4$, ceci contredit l'hypothèse $c(\delta) = c(\tau)$. Si $\dim \delta = 4$, alors en remplaçant dans l'équation (2) η par $-r\eta$, on obtient $\varphi \perp \delta \in GP_4F$, et donc φ est voisine, ceci est absurde.

(2) $\Longrightarrow$ (1) D'après [20, Example 9.12], il existe $a \in F^*$ tel que $\delta_{F(\sqrt{a})} \sim 0$. Puisque $\varphi \perp \delta \in I^4F$, on obtient par le Hauptsatz d'Arason-Pfister que

$\varphi_{F(\sqrt{a})} \sim 0$. Par conséquent, pour toute extension L/F, on obtient que $(\varphi_L)_{an} \cong \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \mu$ pour une certaine L-forme quadratique μ de dimension ≤ 6. Puisque $\varphi \in I^2F$, on déduit que la dimension de μ est paire. Ainsi, $\dim(\varphi_L)_{an} \in \{0, 4, 8, 12\}$. La classification des formes quadratiques de hauteur et de degré ≤ 2 implique que $\mathrm{h}(\varphi) \neq 1, 2$. Par conséquent, φ est de hauteur 3 et de degré 2. Soit $\tau \in P_2F$ telle que $c(\tau) = c(\delta)$. Par la proposition 9, φ est bonne de forme dominante τ. Puisque $\delta_{F(\tau)} \in GP_3F(\tau)$, on obtient que $\delta_{F(\tau)(\delta)} \sim 0$. Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister on déduit que $\varphi_{F(\tau)(\delta)} \sim 0$. Ainsi, $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope, i.e. φ est faiblement bonne. ■

3.8. Démonstration de la proposition 6. D'après la proposition 9, la forme φ est bonne et φ_1 est de dimension 8 ou est excellente de dimension 12, avec $c(\varphi) = c(\tau)$ où $\tau \in P_2F$ est la forme dominante de φ.

(1) Supposons que $\varphi_{F(\tau)}$ soit isotrope.

- Supposons que φ_1 soit excellente de dimension 12. Par la proposition 9, $\varphi_{F(\tau)(\varphi)} \sim 0$. Ainsi, $\varphi \in \mathrm{Ker}(W(F) \longrightarrow W(F(\tau)))$. Si $\dim\varphi = 14$, alors φ est isotrope, ceci est absurde. Si $\dim\varphi = 16$, on déduit que φ est divisible par τ et donc $c(\varphi) = 0$, ceci est absurde. Ainsi, φ_1 ne peut être une forme excellente de dimension 12.
- Supposons $\dim\varphi_1 = 8$: Par le lemme 3, il existe $r \in F^*$, $\eta \in GP_3F$ tels que $\varphi \perp \eta \perp r\tau \in I^4F$ et $\varphi_{F(\eta)}$ isotrope. Ainsi, $i_W(\varphi_{F(\eta)}) \geq i_W(\varphi_{F(\varphi)})$. Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, $(\varphi \perp r\tau)_{F(\eta)} \sim 0$. Ainsi, $\varphi \perp r\tau \sim \rho \otimes \eta$ pour ρ de dimension 2. En particulier, $\varphi \perp r\tau \in I^4F$. De nouveau par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, $\varphi_{F(\tau)} \sim 0$. Si $\dim\varphi = 14$ (resp. $\dim\varphi = 16$), on obtient que φ est isotrope (resp. φ est divisible par τ), ceci est absurde car φ est anisotrope (resp. car $c(\varphi) \neq 0$).

Ainsi, dans tous les cas φ est fortement bonne.

(2)

- Si $\dim\varphi_1 = 12$, alors $\varphi_{F(\varphi)(\tau)} \sim 0$. Puisque $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope, on déduit que $\varphi_{F(\tau)}$ est de hauteur 1. Dans ce cas, $\dim\varphi = 16$.
- Si $\dim\varphi_1 = 8$, alors d'après [21, Théorème 4], $(\varphi_1)_{F(\varphi)(\tau)} \in GP_3F(\varphi)(\tau) - \{0\}$. Par conséquent, $\varphi_{F(\tau)}$ est de hauteur 2 et de degré 3.

3.9. Démonstration du théorème 6. Soient φ une forme quadratique anisotrope qui n'est pas voisine, de hauteur 3 et de degré 2 et $\tau \in P_2F$ sa forme dominante. Supposons que l'hypothèse suivante, *appelée hypothèse* (H), soit vraie:

Hypothèse (H): *Toute forme quadratique anisotrope qui n'est pas bonne, de hauteur* 2 *et de degré* 3 *est de dimension* 12.

(1) Supposons que $\dim\varphi = 14$. Par la proposition 6, on a que $\varphi_{F(\tau)}$ est anisotrope de hauteur 2 et de degré 3. D'après l'hypothèse (H), $\varphi_{F(\tau)}$ est bonne. Ceci est absurde d'après un résultat de Hurrelbrink et Rehmann sur la dimension des formes quadratiques bonnes de hauteur 2 et de degré 3 [15, 3.4]. Par conséquent, il n'existe pas de forme quadratique anisotrope de hauteur 3, de degré 2 et de dimension 14.

(2) Supposons que $\dim\varphi = 16$. Par la proposition 9, on a que $\dim\varphi_1 = 8$ ou φ_1 est excellente de dimension 12.

- Supposons que $\dim\varphi_1 = 12$. D'après la démonstration de la proposition 6, on a $\varphi_{F(\tau)} \in GP_4F(\tau) - \{0\}$. D'après la proposition 7, il existe $\eta \in GP_4F$ telle que $\varphi_{F(\tau)} \cong \eta_{F(\tau)}$. Ainsi, $\varphi \perp -\eta \sim \rho \otimes \tau$ pour ρ une forme quadratique de dimension impaire (Lemme 1). Par conséquent, $\varphi \perp b\tau \in I^4F$ avec $b \in F^*$ qui vérifie $\rho \perp \langle b\rangle \in I^2F$. D'après [12] et puisque $\dim(\varphi \perp b\tau)_{an} \leq 20$, on obtient que $\varphi \in GP_{4,2}F$.

- Supposons que $\dim\varphi_1 = 8$. Toujours par la démonstration de la proposition 6, on a que $\varphi_{F(\tau)}$ est de hauteur 2 et de degré 3. Soit $\pi \in P_3F(\tau)(\varphi)$ la forme dominante de $\varphi_{F(\tau)}$. D'après l'hypothèse (H), π est définie sur $F(\tau)$. D'après [20, Theorem 9.6], on déduit que $\varphi_{F(\tau)} \equiv \pi \pmod{J_4(F(\tau))}$. D'après [18, Proposition 4], π est définie sur F par une forme de Pfister. Par conséquent, $e^3(\varphi \perp -\pi \perp \tau) \in \mathrm{Ker}(H^3F \longrightarrow H^3F(\tau))$. D'après [1, Satz 5.5], il existe $c \in F^*$ tel que $e^3(\varphi \perp -\pi \perp \tau) = e^3(\tau \perp -c\tau)$. Par la bijectivité de e^3, on a

$$\varphi \perp -\pi \perp c\tau \in I^4F \tag{3}$$

  Par le lemme 3, $\varphi_{F(\pi)}$ est anisotrope. Par l'équation (3), on a $\varphi_{F(\pi)} \equiv -c\tau_{F(\pi)} \pmod{I^4F(\pi)}$. D'après [10, Proposition 3.6], on obtient que $i_W(\varphi_{F(\pi)(\varphi)}) = 2$. Ceci contredit la condition $i_W(\varphi_{F(\varphi)}) = 4$.

Réciproquement si $\varphi \in GP_{4,2}F$, alors on déduit que φ est de hauteur 3 et de degré 2 (Proposition 8(2)).

4. Bibliographie

[1] *J. Kr. Arason*, Cohomologische Invarianten quadratischer Formen. J. Alg. 36 (1975), 448–491.
[2] *J. Kr. Arason*, Excellence of $F(\varphi)/F$ for 2-fold Pfister forms. Appendice de [6].
[3] *J. Kr. Arason,* A proof of Merkur'ev's theorem. Can. Math. Soc. Conf. Proc. 4 (1984), 121–130.
[4] *J. Kr. Arason, R. Elman et W. Jacob,* The graded Witt ring and Galois cohomology, II. Trans. Amer. Math. Soc. 314 (1989), 745–780.
[5] *R. Elman et T. Y. Lam,* Pfister forms and K-theory of fields. J. Alg. 23 (1972), 181–213.
[6] *R. Elman, T. Y. Lam et A. Wadsworth,* Amenable fields and Pfister extensions. Conf. Quadratic forms (1976) (G. Orzech, ed.). Queen's papers

on Pure and Appl. Math. Queen's Univ. Kingston, Ont., 46 (1977), 445–492.

[7] *R. W. Fitzgerald,* Functions fields of quadratic forms. Math. Z. 178 (1981), 63–73.

[8] *R. W. Fitzgerald,* Quadratic forms of height two. Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 339–351.

[9] *D. W. Hoffmann,* Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric. Math. Z. 220 (1995), 461–476.

[10] *D. W. Hoffmann,* Twisted Pfister forms. Doc. Math. J. DMV 1 (1996), 67–102.

[11] *D. W. Hoffmann,* Sur les dimensions des formes quadratiques de hauteur 2. C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 11–14.

[12] *D. W. Hoffmann,* On the dimensions of anisotropic forms in I^4. Invent. Math. 131 (1998), 184–198.

[13] *D. W. Hoffmann,* Splitting patterns and invariants of quadratic forms. Math. Nachr. 190 (1998), 149–168.

[14] *J. Hurrelbrink et U. Rehmann,* Splitting patterns of excellent quadratic forms. J. reine angew. Math. 444 (1993), 183–192.

[15] *J. Hurrelbrink et U. Rehmann,* Splitting patterns of quadratic forms. Math. Nachr. 176 (1995), 111–127.

[16] *W. Jacob et M. Rost,* Degree four cohomological invariants for quadratic forms. Invent. Math. 96 (1989), 551–570.

[17] *B. Kahn,* Formes quadratiques de hauteur et de degré 2. Indag. Math. 7.1 (1996), 47–66.

[18] *B. Kahn,* A descent problem for quadratic forms. Duke Math. J. 80 (1995), 139–159.

[19] *M. Knebusch,* Generic splitting of quadratic forms I. Proc. London. Math. Soc. 33 (1976), 65–93.

[20] *M. Knebusch,* Generic splitting of quadratic forms II. Proc. London. Math. Soc. 34 (1977), 1–31.

[21] *A. Laghribi,* Isotropie de certaines formes quadratiques de dimensions 7 et 8 sur le corps des fonctions d'une quadrique. Duke Math. J. 85.2 (1996), 397–410.

[22] *A. Laghribi,* Sur le problème de descente des formes quadratiques. A paraître aux Arch. Math.

[23] *T. Y. Lam,* The algebraic theory of quadratic forms. (2^e édition,) Benjamin, New York, 1980.

[24] *A. S. Merkurjev,* Le symbole de résidu normique de degré 2. En russe, Dokl. Akad. Nauk SSSR 261 (1981), 542–547. Traduction anglaise : Soviet Math. Doklady 24 (1981), 546–551.

[25] *A. S. Merkurjev,* Algèbres simples et formes quadratiques. En russe, Izv. Akad. Nauk SSSR 55 (1991), 218–224. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. 38 (1992), 215–221.

[26] *A. S. Merkurjev et A. A. Suslin,* L'homomorphisme de résidu normique de degré 3. En russe, Izv. Akad. Nauk SSSR 54 (1990), 339–356. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. 36 (1991), 349–367.

[27] *D. Orlov, A. Vishik et V. Voevodsky,* Motivic cohomology of Pfister quadrics and Milnor's conjecture on quadratic forms. Prépublication.

[28] *M. Rost,* Hilbert's theorem 90 for K_3^M for degree-two extensions. Prépublication, Regensburg, 1986.

[29] *W. Scharlau,* Quadratic and Hermitian forms. Springer, Berlin, 1985.

[30] *M. Szyjewski,* The fifth invariant of quadratic forms. En russe, Algebra i Analiz. 2 (1990), 213–234. Traduction anglaise: St. Petersburg Math. J. 2 (1991), 179–198.

[31] *J.-P. Tignol,* Réduction de l'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique. Bull. Soc. Math. Belgique 42 série A (1990), 735–745.

[32] *A. R. Wadsworth,* Noetherian pairs and function fields of quadratic forms. Thèse, Université de Chicago, 1972.

Ahmed Laghribi
Faculté Jean Perrin
Rue Jean Souvraz - SP 18
F-62307 Lens Cedex
France
laghribi@euler.univ-
artois.fr