Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern-Connes-Charakter

Joachim Cuntz

Received: April 28, 1997

Communicated by Peter Schneider

Abstract. We present a new construction of a bivariant K-functor. The functor can be defined on various categories of topological algebras. The corresponding bivariant theory has a Kasparov product and the other standard properties of KK-theory. We study such a theory in detail on a natural category of locally convex algebras and define a bivariant multiplicative character to bivariant periodic cyclic cohomology.

1991 Mathematics Subject Classification: 18G60, 19K35, 19L10, 46H20, 46L87

Keywords and phrases: bivariant, bivariant K-theory, bivariant Chern character, Chern-Connes-character, locally convex algebra, Frechet algebra, extension, K-theory for topological algebras, cyclic homology for topological algebras

Das Fundament der Nichtkommutativen Geometrie wird gebildet einerseits von Kasparovs KK-Theorie und andererseits von der zyklischen Homologie/Kohomologie von Connes und Tsygan. Diese Theorien verallgemeinern und erweitern zwei wichtige klassische Homologie/Kohomologie-Theorien - nämlich die Atiyah-Hirzebruch-K-Theorie und die de Rham Theorie - von Räumen oder Mannigfaltigkeiten (kommutative Algebren) auf geeignete Kategorien von nichtkommutativen Algebren. Das Wort "verallgemeinern" ist hier nicht völlig angebracht, da diese neuen Theorien angewandt auf den klassischen Fall eine ganz andere neuartige Beschreibung und eine erweiterte Form für die K-Theorie und die de Rham-Theorie geben.
Diese so erweiterten Homologie/Kohomologie-Theorien erlauben es im Prinzip, nichtkommutative Algebren (etwa Algebren von Pseudodifferentialoperatoren) genauso zu behandeln wie Räume, bzw. Algebren von Funktionen. Beide Theorien sind darüberhinaus in natürlicher Weise direkt als bivariante Theorien definiert. Dies stellt einen wichtigen Vorteil dar und ist für Berechnungen der Theorie sehr hilfreich.
Ein wunder Punkt der Theorie war allerdings die Tatsache, dass die K-Homologie sowie die KK-Theorie auf der einen Seite, und die zyklische Theorie auf der anderen, auf verschiedenen Kategorien von topologischen Algebren definiert sind, bzw. sinnvolle

Ergebnisse liefern. Der natürliche Definitionsbereich von Kasparovs KK-Theorie besteht aus C*-Algebren, d.h. aus relativ großen Algebren vom Typ "alle stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum". Die zyklische Theorie dagegen liefert vernünftige Ergebnisse nur für wesentlich kleinere Algebren, wie z.B. die Fréchetalgebra aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit [Cu4]. Schon wegen des verschiedenen Definitionsbereichs konnten beide Theorien daher nur in speziellen Fällen mit Hilfe etwas künstlicher Tricks miteinander verglichen werden und in diesen Situationen ein partieller bivarianter Chern-Connes-Charakter gefunden werden, siehe z.B. [Co1], [Ks], [Wa], [Ni1].

Andererseits ist bekannt, dass beide Theorien auf ihren verschiedenen Definitionsbereichen ganz analoge Eigenschaften haben. Der letzte wesentliche Schritt hierzu wurde durch den Beweis der Ausschneidungseigenschaft der periodischen zyklischen Theorie in [CuQu2] erzielt. Damit war klar, dass im Prinzip eine allgemeine Transformation von einer Version der KK-Theorie in die bivariante zyklische Theorie zu erwarten ist (bivarianter Chern-Connes-Charakter). Rein algebraisch wurde die Konstruktion eines solchen Charakters schon in [CuQu2] auf Grundlage des Ausschneidungsresultats erläutert.

In der vorliegenden Arbeit führen wir nun eine neue bivariante topologische K-Theorie ein, die auf derselben Kategorie von lokalkonvexen Algebren definiert ist, auf der auch die zyklische Homologie/Kohomologie Sinn macht. Wir bezeichnen diese Theorie mit kk. Wir zeigen, dass kk im wesentlichen dieselben abstrakten Eigenschaften wie die KK-Theorie hat und daher auch in derselben Weise zu berechnen ist. Die Eigenschaften sind Homotopieinvarianz, Stabilität und Ausschneidung, wobei allerdings in der Kategorie der m-Algebren jede dieser Eigenschaften in etwas modifizierter Form zu verstehen ist. Ebenso wie KK kann kk als der universelle Funktor mit diesen drei Eigenschaften charakterisiert werden. Angewendet auf die Algebra der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit gibt die Theorie natürlich die klassische K-Homologie/K-Theorie. Außerdem ergibt $kk(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ die übliche K-Theorie von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra ist (oder wenn $\mathfrak{A}$ eine Fréchetalgebra ist, unter Verwendung der in [Ph] eingeführten K-Theorie von Fréchetalgebren).

Die Existenz und Multiplikativität des bivarianten Chern-Connes-Charakters folgt im geraden Fall direkt aus der Charakterisierung von kk als universeller Funktor mit gewissen Eigenschaften, da die periodische zyklische Theorie HP^* dieselben Eigenschaften besitzt. Im ungeraden Fall ergibt sich die Existenz des Charakters aus der Ausschneidung für HP^*, und die Multiplikativität aus der Verträglichkeit der Randabbildungen in kk und in HP^*. Diese Verträglichkeit wird durch eine ähnliche Rechnung wie in [Ni2] bewiesen. Im wesentlichen muss das Produkt der Randabbildungen in der Toeplitzerweiterung und in der Einhängungserweiterung bestimmt werden.

Wir beschreiben jetzt kurz den Inhalt der Arbeit. Die ersten beiden Abschnitte enthalten einige allgemeine Grundlagen über die Klasse von lokalkonvexen Algebren, mit der wir arbeiten. Wir nennen diese Algebren m-Algebren. Weiter geben wir Beispiele von m-Algebren und Erweiterungen von m-Algebren, die wir später benutzen. Wir verweisen auf [Ph] für eine ausgezeichnete Zusammenstellung weiterer Konstruktionen in dieser Klasse von topologischen Algebren.

Der dritte Abschnitt enthält mit dem Hauptlemma 3.10 die wesentliche neue technische Idee, die zu einer einfachen und mehr (wenn auch nicht vollständig) algebraischen Konstruktion des Kasparovprodukts führt. Sie erlaubt es, das Produkt ohne die üblichen analytischen Hilfsmittel aus der Theorie der C*-Algebren zu definieren. Übrigens kann die hier eingeführte Strategie auch verwendet werden, um die gewöhnliche KK-Theorie für C*-Algebren oder entsprechende bivariante Theorien für σ-C*-Algebren (siehe [We]) oder Banachalgebren einzuführen. In der Tat gibt unsere Methode ein allgemeines Rezept, um die bivariante K-Theorie mit verschiedenen Homotopieinvarianz- und Stabilitätseigenschaften für verschiedene Kategorien von topologischen Algebren zu konstruieren, siehe Bemerkung 4.6. Sie basiert, ähnlich wie in [Ze] auf Erweiterungen von topologischen Algebren beliebiger Länge und ihren klassifizierenden Abbildungen. Dadurch, dass wir Erweiterungen höherer Länge zulassen, bekommen wir eine einfache Beschreibung des Produkts und vermeiden gleichzeitig eine bekannte Summierbarkeitsobstruktion für "glatte" Erweiterungen der Länge 1, [DoVo].

Abschnitt 4 enthält die Definition und eine Aufstellung der einfachsten Eigenschaften der bivarianten kk-Theorie. Wie in Abschnitt 8 bemerkt wird, ist diese Definition formal verblüffend analog zur Beschreibung der periodischen bivarianten zyklischen Kohomologie, die in [CuQu2, 3.2] enthalten ist. Ein Unterschied zu den üblichen Definitionen der K-Theorie ist, dass wir mit differenzierbaren statt mit stetigen Homotopien arbeiten. Dies ist für die Existenz des Chern-Connes-Chrakters und für die Ausschneidung in kk wichtig. In Abschnitt 5 wird gezeigt, dass jede Erweiterung von m-Algebren, die einen stetigen linearen Schnitt besitzt, lange exakte Folgen in beiden Variablen von kk induziert. Der Beweis benutzt die Methode von [CuSk].

In Abschnitt 6 beweisen wir die Charakterisierung von kk als universeller Funktor, konstruieren den Chern-Connes-Charakter und untersuchen seine Eigenschaften. Insbesondere wird eine Fortsetzung des Charakters auf "p-summierbare" Moduln angegeben, die für Anwendungen und zum Vergleich mit den von Connes und Nistor gegebenen Formeln wichtig ist. Als Nebenprodukt ergibt sich übrigens eine Bestimmung der (stetigen) periodischen zyklischen Homologie/Kohomologie der Schattenideale ℓ^p.

In Abschnitt 7 wird gezeigt, dass $kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ für eine Fréchetalgebra $\mathfrak{A}$ mit der von Phillips definierten K-Theorie $K_*(\mathfrak{A})$ übereinstimmt. Dies ist selbst für $\mathfrak{A}=\mathbb{C}$ a priori überhaupt nicht klar (die kk-Gruppen könnten trivial oder riesengroß sein). Der Beweis benutzt wieder das Hauptlemma 3.10. Wir zeigen auch unabhängig von Phillips' Methoden, dass für Banachalgebren und für gewisse dichte Unteralgebren von Banachalgebren ebenfalls $kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A}) = K_*(\mathfrak{A})$ gilt. Man erhält daher insbesondere eine neue Definition der K-Theorie für die sehr große Klasse der m-Algebren durch

$$K_*(\mathfrak{A}) \underset{def}{=} kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A})$$

Abschnitt 8 enthält einige abschließende Bemerkungen zu der natürlichen Filtrierung auf kk.

Wir erwähnen schließlich, dass das oben beschriebene Dilemma der verschiedenen Definitionsbereiche der KK-Theorie und der zyklischen Theorie prinzipiell auch auf andere Weise gelöst werden kann. Es lässt sich nämlich eine zyklische Theorie entwickeln, die auch für C*-Algebren Sinn macht. Dies wurde im wesentlichen von Puschnigg in [Pu] mit der "asymptotische" zyklischen Theorie auf der Basis eines Vorschlags von Connes-Moscivici [CoMo] erreicht. Die asymptotische Theorie ist aber ihrer Natur nach weniger algebraisch.

Anwendungen der im vorliegenden Artikel dargestellten Theorie bleiben weiteren Arbeiten vorbehalten.

1 m-ALGEBREN UND DIFFERENZIERBARE HOMOTOPIEN

Eine $m-$Algebra ist eine Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{C}$ mit einer vollständigen lokalkonvexen Topologie, die durch eine Familie $\{p_\alpha\}$ von *submultiplikativen* Halbnormen bestimmt ist. Für jedes α gilt also $p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y)$. Die Algebra $\mathfrak{A}$ ist dann eine topologische Algebra, d.h. die Multiplikation ist stetig. Es ist leicht zu sehen, dass m-Algebren gerade die lokalkonvexen Algebren sind, die als projektive Limiten von Banachalgebren darstellbar sind, vgl. [Mi, 5.1]. In [Cu4] wurde gezeigt, dass sich das Argument für die Ausschneidung aus [CuQu2] auf die topologische zyklische Theorie für m-Algebren überträgt.

Die direkte Summe $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ von zwei $m-$Algebren ist wieder eine $m-$Algebra mit der Topologie, die durch die Halbnormen der Form $p \oplus q$ mit $(p \oplus q)(x,y) = p(x) + q(y)$ definiert ist, wobei p eine stetige Halbnorm auf $\mathfrak{A}$ und q eine stetige Halbnorm auf $\mathfrak{B}$ ist.

Wir erinnern an die Definition des projektiven Tensorprodukts im Sinn von Grothendieck, [Gr], [T]. Für zwei lokalkonvexe Vektorräume V and W ist die projektive Topologie auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ bestimmt durch die Familie der Halbnormen der Form $p \otimes q$, wo p eine stetige Halbnorm auf V und q eine stetige Halbnorm auf W ist. Hierbei ist $p \otimes q$ definiert durch

$$p \otimes q\,(z) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{n} p(a_i)q(b_i)\,|\, z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i, a_i \in V, b_i \in W \Big\}$$

für $z \in V \otimes W$. Wir bezeichnen mit $V \hat{\otimes} W$ die Vervollständigung von $V \otimes W$ bezüglich dieser Familie von Halbnormen. Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ m-Algebren sind, so ist auch das projektive Tensorprodukt $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ wieder eine m-Algebra (wenn p und q submultiplikativ sind, so auch $p \otimes q$).

Wir geben jetzt einige Beispiele von m-Algebren, die wir später benutzen werden.

1.1 ALGEBREN VON DIFFERENZIERBAREN FUNKTIONEN

Sei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}[a,b]$ die Algebra der komplexwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen f auf $[a,b]$, deren Ableitungen in den Endpunkten a und b alle verschwinden (während die 0-te Ableitung, d.h. f selbst, in a und b beliebige Werte annehmen kann).

Eine wichtige Rolle werden auch die Unteralgebren $\mathbb{C}(a,b], \mathbb{C}[a,b)$ and $\mathbb{C}(a,b)$ von $\mathbb{C}[a,b]$ spielen, die nach Definition aus den Funktionen f bestehen, die außerdem noch in a, bzw. in b, bzw. in a und b verschwinden.

Die Topologie auf diesen Algebren ist die übliche Fréchettopologie, die durch die folgende Familie von submultiplikativen Normen p_n definiert ist:

$$p_n(f) = \|f\| + \|f'\| + \tfrac{1}{2}\|f''\| + \ldots + \tfrac{1}{n!}\|f^{(n)}\|$$

Hierbei ist natürlich $\|g\| = \sup\{|g(t)|\,\big|\, t \in [a,b]\}$.

Wir bemerken, dass $\mathbb{C}[a,b]$ nuklear im Sinn von Grothendieck [Gr] ist und dass für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum V der Raum $\mathbb{C}[a,b] \hat{\otimes} V$ isomorph zu dem

Raum der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $[a,b]$ mit Werten in V ist, deren Ableitungen in beiden Endpunkten verschwinden, [T,§ 51].

Wenn $\mathfrak{A}$ eine m-Algebra ist, schreiben wir $\mathfrak{A}[a,b], \mathfrak{A}[a,b)$ und $\mathfrak{A}(a,b)$ für die m-Algebren $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathbb{C}[a,b], \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathbb{C}[a,b)$ und $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathbb{C}(a,b)$.

Zwei stetige lineare Abbildungen $\alpha, \beta : V \to W$ zwischen zwei vollständigen lokalkonvexen Räumen heißen differenzierbar homotop, oder *diffeotop*, falls eine Familie $\varphi_t : V \to W, t \in [0,1]$ von stetigen linearen Abbildungen existiert, so dass $\varphi_0 = \alpha, \varphi_1 = \beta$ und so dass die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(x)$ unendlich oft differenzierbar ist für jedes $x \in V$. Eine andere Formulierung dieser Bedingung ist, dass eine stetige lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathcal{C}^\infty([0,1])\hat{\otimes}W$ existiert mit der Eigenschaft, dass $\varphi(x)(0) = \alpha(x), \varphi(x)(1) = \beta(x)$ für jedes $x \in V$.

Sei $h : [0,1] \to [0,1]$ eine monotone und bijektive $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, deren Einschränkung auf $(0,1)$ ein Diffeomorphismus $(0,1) \to (0,1)$ ist und deren Ableitungen in 0 und 1 alle verschwinden. Durch Ersetzung von φ_t durch $\psi_t = \varphi_{h(t)}$ sieht man, dass α and β diffeotop sind genau dann, wenn eine stetige lineare Abbildung $\psi : V \to \mathbb{C}[0,1]\hat{\otimes}W$ existiert, für die gilt $\psi(x)(0) = \alpha(x), \psi(x)(1) = \beta(x)$, $x \in V$. Dies zeigt insbesondere, dass Diffeotopie eine Äquivalenzrelation ist.

1.2 Die Tensoralgebra

Es sei V ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Wir definieren die Tensoralgebra TV als die Vervollständigung der algebraischen direkten Summe

$$T_{\mathrm{alg}}V = V \oplus V\otimes V \oplus V^{\otimes^3} \oplus \dots$$

im Bezug auf die Familie $\{\hat{p}\}$ von Halbnormen, die auf dieser direkten Summe durch

$$\hat{p} = p \oplus p\otimes p \oplus p^{\otimes^3} \oplus \dots$$

gegeben sind , wo p alle stetigen Halbnormen auf V durchläuft. Die Zusammensetzung von Tensoren definiert in der üblichen Weise eine Multiplikation auf $T_{\mathrm{alg}}V$, für die die Halbnormen $\hat{p}$ submultiplikativ sind. Die Vervollständigung TV ist daher eine m-Algebra.

Im einfachsten Fall, wo $V = \mathbb{C}$, ist $T\mathbb{C}$ in natürlicher Weise isomorph zu der Algebra der holomorphen Funktionen auf der komplexen Ebene, die im Punkt 0 verschwinden (unter dem Isomorphismus, der eine Folge (λ_n) in $T_{\mathrm{alg}}\mathbb{C}$ auf die Funktion f mit $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n z^n$ abbildet). Die Topologie ist gegeben durch die Topologie der uniformen Konvergenz auf kompakten Teilmengen

Wir bezeichnen mit $\sigma : V \to TV$ die Abbildung, die V auf den ersten Summanden in $T_{\mathrm{alg}}V$ abbildet. Diese Abbildung σ hat die folgende universelle Eigenschaft: Es sei $s : V \to \mathfrak{A}$ eine beliebige stetige lineare Abbildung von V in eine m-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\tau_s : TV \to \mathfrak{A}$ von m-Algebren mit der Eigenschaft, dass $\tau_s \circ \sigma = s$.

Die Tensoralgebra ist differenzierbar kontrahierbar, d.h. die identische Abbildung von TV ist diffeotop zu 0. Eine differenzierbare Familie $\varphi_t : TV \to TV$, für die $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \mathrm{id}$ gilt, ist gegeben durch $\varphi_t = \tau_{t\sigma}, t \in [0,1]$.

1.3 Das freie Produkt von zwei m-Algebren

Zwei m-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien gegeben. Das algebraische freie Produkt (in der nichtunitalen Kategorie) von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist dann die folgende Algebra

$$\mathfrak{A} *_{\mathrm{alg}} \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \oplus (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) \oplus (\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}) \oplus (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}) \oplus \ldots$$

Die direkte Summe erstreckt sich über alle Tensorprodukte, wo die Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeweils abwechselnd auftreten. Die Multiplikation ist, wie bei der Tensoralgebra, die Zusammensetzung von Tensoren, wobei aber anschließend die Multiplikation $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \hat{\otimes} \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ benutzt wird, um alle Terme zu vereinfachen, in denen zwei Elemente in $\mathfrak{A}$ oder zwei Elemente in $\mathfrak{B}$ zusammentreffen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{A} *_{\mathrm{alg}} \mathfrak{B}$ bezüglich aller Halbnormen der Form $p * q$ die in der folgenden Weise definiert sind:

$$p * q = p \oplus q \oplus (p \otimes q) \oplus (q \otimes p) \oplus (p \otimes q \otimes p) \oplus \ldots$$

Wir setzen hier alle stetigen Halbnormen p und q auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein. Wenn p und q submultiplikativ sind, so ist auch die Halbnorm $p * q$ submultiplikativ und $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ ist daher eine m-Algebra.

Die Algebra $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ ist das freie Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Kategorie der m-Algebren. Die kanonischen Inklusionen $\iota_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ und $\iota_2 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ haben die folgende universelle Eigenschaft: Seien $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ und $\beta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ zwei stetige Homomorphismen in eine m-Algebra $\mathfrak{C}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Homomorphismus $\alpha * \beta : \mathfrak{A} * \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, so dass $(\alpha * \beta) \circ \iota_1 = \alpha$ und $(\alpha * \beta) \circ \iota_2 = \beta$.

1.4 Die Algebra der glatten kompakten Operatoren

Die Algebra $\mathfrak{K}$ der glatten kompakten Operatoren besteht aus allen Matrizen (a_{ij}) mit schnell abfallenden Matrixelementen $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 0, 1, 2 \ldots$ (für eine andere Beschreibung dieser Algebra siehe [ENN]). Die Topologie auf $\mathfrak{K}$ ist gegeben durch die Familie von Normen p_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$, die durch

$$p_n\big((a_{ij})\big) = \sum_{i,j} |1 + i + j|^n \, |a_{ij}|$$

definiert sind. Man prüft leicht nach, dass die p_n submultiplikativ sind und dass $\mathfrak{K}$ vollständig ist. Damit ist $\mathfrak{K}$ eine m-Algebra. Als linearer lokalkonvexer Raum ist $\mathfrak{K}$ natürlich isomorph zum Folgenraum s und daher nuklear.

Die Abbildung, die $(a_{ij}) \otimes (b_{kl})$ auf die $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$-Matrix $(a_{ij} b_{kl})_{(i,k)(j,l) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2}$ abbildet, gibt offensichtlich einen Isomorphismus Θ zwischen $\mathfrak{K} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ (vgl. auch [Ph,2.7])

LEMMA 1.4.1 *Sei $\Theta : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$ die oben angegebene Abbildung und $\iota : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$ die Inklusionsabbildung, die x auf $e^{00} \otimes x$ abbildet (wo e^{00} die Matrix mit Elementen a_{ij} ist, für die $a_{ij} = 1$, falls $i = j = 0$, und $a_{ij} = 0$ sonst). Dann ist Θ diffeotop zu ι. Dasselbe gilt für die entsprechenden Abbildungen $\Theta' : \mathfrak{K} \to M_2(\mathfrak{K})$ und $\iota' : \mathfrak{K} \to M_2(\mathfrak{K})$.*

Beweis: Wir können $\mathfrak{K}$ darstellen als eine Algebra von Operatoren auf dem Raum s der schnell fallenden Folgen. Die gesuchte Homotopie kann durch direkte Summen von Rotationen in jeweils zweidimensionalen Teilräumen, die Vektoren der Form $\xi_i \otimes \xi_j$ in der Standardbasis von $s \hat{\otimes} s$ in Vektoren der Form $\xi_0 \otimes \xi_{ij}$ überführen, realisiert werden. Dabei bezeichnet ξ_{ij} eine Umnumerierung der Basis von s mit Indexmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; siehe auch [Ph,2.7]. *q.e.d.*

BEMERKUNG 1.4.2 *Sei V ein Banachraum. Dann besteht $\mathfrak{K} \hat{\otimes} V$ gerade aus den Matrizen, oder den durch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ indizierten Folgen $(v_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$, für die der Ausdruck*

$$\bar{p}_n((v_{ij})) \underset{def}{=} \sum_{i,j} (1+i+j)^n \|v_{ij}\|$$

endlich ist für jedes n. Die Topologie auf $\mathfrak{K} \hat{\otimes} V$ ist natürlich gerade durch die Normen $\bar{p}_n$ gegeben. Um dies zu sehen, betrachten wir das Tensorprodukt α_n der Norm p_n auf $\mathfrak{K}$ mit der auf V gegebenen Norm $\|\cdot\|$. Wenn dann x^{ij} die Matrix bezeichnet, die $x \in V$ als i,j-tes Element hat und sonst 0 ist, so gilt

$$\alpha_n(x^{ij}) = (1+i+j)\|x\|$$

nach [T, Prop. 43.1]. Dies zeigt sofort, dass

$$\alpha_n((v_{ij})) \leq \bar{p}_n((v_{ij}))$$

für alle Matrizen (v_{ij}) im algebraischen Tensorprodukt $\mathfrak{K} \otimes V$. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Definition der projektiven Tensornorm. Daher ist für jedes feste n die Vervollständigung $(\mathfrak{K} \otimes V)_{\bar{p}_n}$ isometrisch isomorph zu $(\mathfrak{K})_{p_n} \hat{\otimes} V$ und besteht gerade aus den Matrizen (v_{ij}), für die $\bar{p}_n((v_{ij}))$ endlich ist.

1.5 DIE GLATTE TOEPLITZALGEBRA

Die Elemente der Algebra $\mathcal{C}^\infty S^1$ können als Potenzreihen in dem Erzeuger z (definiert durch $z(t) = t$, $t \in S^1 \subset \mathbb{C}$) geschrieben werden. Die Koeffizienten sind schnell abfallend, d.h. genauer gilt

$$\mathcal{C}^\infty(S^1) = \Big\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \;\Big|\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|\,|k|^n < \infty \text{ für jedes feste } n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Submultiplikative Normen, die die Topologie beschreiben, sind gegeben durch

$$q_n\left(\sum a_k z^k\right) = \sum |1+k|^n\,|a_k|$$

Als topologischer Vektorraum ist die glatte Toeplitzalgebra $\mathfrak{T}$ dann definiert als die direkte Summe $\mathfrak{T} = \mathfrak{K} \oplus \mathcal{C}^\infty(S^1)$.

Um die Multiplikation in $\mathfrak{T}$ zu definieren, schreiben wir v_k für das Element $(0, z^k)$ von $\mathfrak{T}$ und einfach x für das Element $(x, 0)$ mit $x \in \mathfrak{K}$. Außerdem bezeichnet e^{ij} das Element von $\mathfrak{T}$, das durch die Matrix (a_{kl}) mit $a_{kl} = 1$, falls $k = i, l = j$, und $a_{kl} = 0$

sonst, bestimmt ist (mit der Vereinbarung, dass $e^{ij} = 0$, wenn $i < 0$ oder $j < 0$). Die Multiplikation in $\mathfrak{T}$ ist dann bestimmt durch die folgenden Regeln:

$$e^{ij}e^{kl} = \delta_{jk}e^{il}$$

$$v_k e^{ij} = e^{(i+k),j} \qquad e^{ij}v_k = e^{i,(j-k)}$$

$(i, j, k \in \mathbb{Z})$; und

$$v_k v_{-l} = \begin{cases} v_{k-l}(1 - E_{l-1}) & l > 0 \\ v_{k-l} & l \leq 0 \end{cases}$$

wo $E_l = e^{00} + e^{11} + \ldots + e^{ll}$. Wenn p_n die in 1.4 definierten Normen auf $\mathfrak{K}$ sind und q_n die oben definierten Normen auf $\mathcal{C}^\infty(S^1)$, so ist leicht zu sehen, dass jede Norm der Form $p_n \oplus q_m$ submultiplikativ auf $\mathfrak{T} = \mathfrak{K} \oplus \mathcal{C}^\infty(S^1)$ mit der so definierten Multiplikation ist. Es ist offensichtlich, dass $\mathfrak{K}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{T}$ ist, und dass der Quotient $\mathfrak{T}/\mathfrak{K}$ gerade $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ ist.

1.6 Abgeleitete Unteralgebren von Banachalgebren

Viele der wichtigsten m-Algebren sind von einem speziellen Typ - sie sind Algebren von "nichtkommutativen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen". Um diese Klasse von Fréchetalgebren zu charakterisieren, verwenden wir die Ideen aus [BlCu], wo der Fall von abgeleiteten Unteralgebren von C*-Algebren eingehend untersucht wurde.
Sei A eine Banachalgebra. Eine abgeleitete Unteralgebra von A ist eine Unteralgebra $\mathfrak{A}$, für die gilt

1) Auf $\mathfrak{A}$ ist eine Familie $p_0, p_1, \ldots$ von Halbnormen gegeben, wo p_0 ein Vielfaches der gegebenen Norm auf A ist. $\mathfrak{A}$ ist vollständig im Bezug auf diese Familie.

2) Für jedes k gilt

$$p_k(xy) \leq \sum_{i+j=k} p_i(x)p_j(y), \qquad x, y \in \mathfrak{A}$$

Falls 1) und 2) erfüllt sind, so ist für jedes k die Summe $p_0 + p_1 + \ldots + p_k$ eine submultiplikative Norm. $\mathfrak{A}$ ist daher gleichzeitig eine Fréchetalgebra und eine m-Algebra. Eines der wichtigsten Beispiele ist $\mathcal{C}^\infty[0,1]$ mit den Halbnormen $p_n(f) = \frac{1}{n!}\|f^{(n)}\|$ oder allgemeiner $\mathcal{C}^\infty M$ für eine differenzierbare kompakte Mannigfaltigkeit M.
Wir erinnern daran, dass eine Unteralgebra $\mathfrak{A}$ einer Banachalgebra A *abgeschlossen unter holomorphem Funktionalkalkül* ist, falls das Spektrum $Sp(x)$ jedes Elements x von $\mathfrak{A}$, in A und $\mathfrak{A}$ dasselbe ist und falls außerdem für jede in einer Umgebung von $Sp(x)$ holomorphe Funktion f, auch $f(x)$ wieder in $\mathfrak{A}$ liegt.

LEMMA 1.6.1 *Wenn $\mathfrak{A} \subset A$ die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, so ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen unter holomorphem Funktionalkalkül.*

Beweis: vgl. [BlCu, 3.12 oder 6.4]. Sei A_k die Vervollständigung von $\mathfrak{A}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_k = p_0 + p_1 + \ldots p_k$. Für alle $x, y \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\|xy\|_{k+1} \leq \|x\|_k\|y\|_{k+1} + \|x\|_{k+1}\|y\|_k$$

Dies impliziert, dass

$$\limsup \sqrt[n]{\|x^{2n}\|_{k+1}} \leq \limsup \sqrt[n]{\|x^n\|_k} \limsup \sqrt[n]{\|x^n\|_{k+1}}$$

für jedes $x \in \mathfrak{A}$ und damit für die Spektralradien

$$r_{A_{k+1}}(x)^2 = r_{A_{k+1}}(x^2) \leq r_{A_k}(x) r_{A_{k+1}}(x)$$

und somit, dass $r_{A_{k+1}}(x) = r_{A_k}(x)$.
Dasselbe Argument gilt für die Algebren $\widetilde{A_k}$, wo noch eine Eins adjungiert wurde.
Falls nun $x \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ invertierbar in $\widetilde{A}$ ist, so existiert $\varepsilon \geq 0$, so dass für jedes $y \in \mathfrak{A}$ mit $\|x^{-1} - y\| \leq \varepsilon$ gilt, dass $r_A(1 - xy) < 1$. Daher ist $r_{A_k}(1 - xy) < 1$ für alle k und somit xy und also auch x invertierbar in A_k (nach einem Diagonalfolgenargument ist $\mathfrak{A}$ der Durchschnitt aller Bilder von A_k in A).
Dies zeigt, dass $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} x = \mathrm{Sp}_A x$ für alle $x \in \mathfrak{A}$. Wenn jetzt f eine Funktion ist, die holomorph in einer Umgebung von $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} x = \mathrm{Sp}_A x$ ist, so liegt $f(x)$ in A_k für alle k und damit auch in $\mathfrak{A}$. *q.e.d.*

Bemerkung 1.6.2 *Falls $\mathfrak{A}$ eine abgeleitete Unteralgebra einer C^*-Algebra ist, so ist $\mathfrak{A}$ sogar invariant unter Funktionalkalkül mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen, siehe [BlCu, 6.4].*

Lemma 1.6.3 *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitete Unteralgebren von A bzw. B. Dann ist $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ eine abgeleitete Unteralgebra von $A\hat{\otimes}B$.*

Beweis: Falls $p_0, p_1, \ldots$ und $q_0, q_1, \ldots$ die Familien von Halbnormen mit der Eigenschaft 2) sind, die die Topologien auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmen, so ist $u_0, u_1, \ldots$ mit

$$u_k = \sum_{i+j=k} p_i \otimes q_j$$

eine Familie von Halbnormen auf $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$, für die $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ vollständig ist und für die 2) gilt. *q.e.d.*

Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}_1$ die Banachalgebra der komplexen Matrizen $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|(a_{ij})\|_1 = \sum |a_{ij}| < \infty$$

Lemma 1.6.4 *$\mathfrak{K}$ ist eine abgeleitete Unteralgebra von $\mathcal{K}_1$.*

Beweis: Die Topologie von $\mathfrak{K}$ ist bestimmt durch die Halbnormen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ mit

$$\alpha_n((a_{ij})) = \frac{1}{n!} \sum (i+j)^n \|a_{ij}\|$$

Nach Definition ist $\alpha_0 = \|\cdot\|_1$. Die Gleichung

$$\frac{1}{n!}(i+j)^n = \sum_{r+s=n} \frac{1}{r!} i^r \frac{1}{s!} j^s$$

zeigt, dass $\alpha_n(xy) \leq \sum_{r+s=n} \alpha_r(x)\alpha_s(y)$. *q.e.d.*

LEMMA 1.6.5 *Sei $\alpha : A \to B$ ein stetiger Homomorphismus zwischen Banachalgebren und $\mathfrak{B} \subset B$ eine abgeleitete Unteralgebra mit definierendem System von Halbnormen $q_0, q_1, \ldots$.*
Dann ist $\mathfrak{A} = \alpha^{-1}(\mathfrak{B})$ mit dem System $p_0, p_1, \ldots$ von Halbnormen, wo

$$p_0 = C\| \cdot \|_A \qquad C = \max(1, \|\alpha\|)$$
$$p_i(x) = q_i(\alpha(x)), \; i = 1, 2, \ldots$$

eine abgeleitete Unteralgebra von A.

Beweis: Klar. *q.e.d.*

2 EINIGE WICHTIGE ERWEITERUNGEN VON m-ALGEBREN

In der bivarianten K-Theorie für C*-Algebren spielen eine Reihe von Standarderweiterungen eine grundlegende Rolle. Wir beschreiben in diesem Abschnitt zunächst einmal die analogen Erweiterungen in der Kategorie der m-Algebren. Hierbei ist zu beachten, dass außerdem jeweils Algebren von stetigen Funktionen durch die entsprechenden Algebren von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen ersetzt werden, da wir statt mit stetigen Homotopien mit differenzierbaren Homotopien arbeiten werden. Darüberhinaus benötigen wir aber auch noch weitere Erweiterungen, die bisher in der K-Theorie noch nicht so stark in Erscheinung getreten sind. Insbesondere wird die universelle Erweiterung durch die Tensoralgebra in unserer Theorie eine tragende Rolle spielen.

Wir betrachten in erster Linie Erweiterungen, die stetige lineare Schnitte besitzen, d.h. als exakte Folgen von lokalkonvexen Vektorräumen einfach direkte Summen darstellen. Wir nennen solche Erweiterungen linear zerfallend. Das Tensorprodukt einer linear zerfallenden Erweiterung mit einer beliebigen lokalkonvexen Algebra ist wieder linear zerfallend.

Die meisten Erweiterungen in diesem Abschnitt sind außerdem von dem Typ, dass die Algebra in der Mitte kontrahierbar ist, so dass die Ideale verschiedene Formen der Einhängung (des Quotienten) beschreiben.

2.1 DIE EINHÄNGUNGSERWEITERUNG.

Dies ist das Analogon zu der fundamentalen Erweiterung der algebraischen Topologie. Sie hat die folgende Form

$$0 \to \mathbb{C}(0,1) \to \mathbb{C}[0,1) \to \mathbb{C} \to 0$$

oder allgemeiner

$$0 \to \mathfrak{A}(0,1) \to \mathfrak{A}[0,1) \to \mathfrak{A} \to 0$$

mit einer beliebigen m-Algebra $\mathfrak{A}$.

Wir erinnern daran, dass $\mathbb{C}(0,1)$ und $\mathbb{C}[0,1)$ Algebren von $\mathcal{C}^\infty$- Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, deren Ableitungen alle in 0 und 1 verschwinden, bezeichnen, und dass die Algebra $\mathbb{C}[0,1)$ differenzierbar kontrahierbar ist, vgl. 1.1.

2.2 Die universelle Erweiterung.

Auf dieser Erweiterung beruht unsere Definition der bivarianten K-Theorie für m-Algebren. Für eine m-Algebra $\mathfrak{A}$ ist die Tensoralgebra $T\mathfrak{A}$ über dem lokalkonvexen Raum $\mathfrak{A}$ wie in Abschnitt 1 definiert. Wenn wir die Tatsache verwenden, dass $\mathfrak{A}$ auch eine Algebra ist und die universelle Eigenschaft von $T\mathfrak{A}$ auf die Abbildung id:$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ anwenden, so erhalten wir einen Homomorphismus $\alpha = \tau_{\mathrm{id}} : T\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (ein Element $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ von $T\mathfrak{A}$ wird dabei auf $x_1 x_2 \ldots x_n$ in $\mathfrak{A}$) abgebildet. Wir definieren jetzt $J\mathfrak{A}$ als den Kern von α. Die Erweiterung

$$0 \to J\mathfrak{A} \to T\mathfrak{A} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{A} \to 0$$

besitzt dann einen stetigen linearen Schnitt. Die m-Algebra $T\mathfrak{A}$ ist glatt kontrahierbar. Die universelle Eigenschaft dieser Erweiterung wird im nächsten Abschnitt erläutert und benutzt werden.

2.3 Die glatte Toeplitzerweiterung.

Die glatte Toeplitzalgebra $\mathfrak{T}$ wurde in 1.5 eingeführt. Nach Konstruktion enthält $\mathfrak{T}$ die Algebra $\mathfrak{K}$ als Ideal und wir erhalten die folgende Erweiterung

$$0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}^\infty(S^1) \to 0$$

die natürlich nach Konstruktion auch einen stetigen linearen Schnitt erlaubt.

Sei nun $\kappa : \mathfrak{T} \to \mathbb{C}$ der kanonische Homomorphismus, der v_1 und v_{-1} auf 1 abbildet und $\mathfrak{T}_0 = \operatorname{Ker} \kappa$. Durch Restriktion der Toeplitzerweiterung erhalten wir die folgende Erweiterung

$$0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{T}_0 \to \mathcal{C}_0^\infty(S^1 \backslash 1) \to 0$$

Wir werden später sehen, dass $\mathfrak{T}_0$ "kk-kontrahierbar" ist.

2.4 Die universelle zweifach triviale Erweiterung.

Mit einer m-Algebra $\mathfrak{A}$ assoziieren wir wie in [Cu2] die Algebra $Q\mathfrak{A} = \mathfrak{A} * \mathfrak{A}$. Wir bezeichnen mit ι und $\bar{\iota}$ die beiden kanonischen Inklusionen von $\mathfrak{A}$ in $Q\mathfrak{A}$. Die Algebra $Q\mathfrak{A}$ ist in natürlicher Weise $\mathbb{Z}/2$-graduiert durch den involutiven Automorphismus τ, der $\iota(\mathfrak{A})$ und $\bar{\iota}(\mathfrak{A})$ vertauscht.

Das Ideal $q\mathfrak{A}$ in $Q\mathfrak{A}$ ist definiert als der Kern des kanonischen Homomorphismus $\pi = \mathrm{id} * \mathrm{id} : \mathfrak{A} * \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Die Erweiterung

$$0 \to q\mathfrak{A} \to Q\mathfrak{A} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A} \to 0 \tag{1}$$

besitzt dann zwei verschiedene Schnitte, die Algebrenhomomorphismen sind; nämlich ι und $\bar{\iota}$. Sie hat die folgende universelle Eigenschaft: Sei

$$0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}_1 \to \mathfrak{A} \to 0 \tag{2}$$

eine Erweiterung mit zwei verschiedenen Schnitten $\alpha, \bar{\alpha} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{E}_1$, die stetige Algebrahomomorphismen sind. Dann existiert ein Morphismus (d.h. ein kommutatives

Diagramm von Abbildungen) von der Erweiterung (1) in die Erweiterung (2) wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & q\mathfrak{A} & \to & Q\mathfrak{A} & \to & \mathfrak{A} & \to 0 \\ & \downarrow {\scriptstyle \alpha * \bar\alpha} & & \downarrow {\scriptstyle \alpha * \bar\alpha} & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}} & \\ 0 \to & \mathfrak{E}_0 & \to & \mathfrak{E}_1 & \to & \mathfrak{A} & \to 0 \end{array}$$

Dieser Morphismus führt nach Konstruktion die Schnitte ι und $\bar\iota$ in α und $\bar\alpha$ über.

2.5 DIE ERWEITERUNG, DIE DIE GERADE UND DIE UNGERADE K-THEORIE VERBINDET.

Wir konstruieren in diesem Artikel die bivariante K-Theorie aus Erweiterungen, d.h. wir benutzen das "ungerade" oder Ext-Bild. Die folgende Erweiterung erlaubt es, diesen Zugang mit dem "gerade" Bild von [Cu2] zu vergleichen. Sie wird in Abschnitt 7 eine wichtige Rolle spielen. Wie oben seien $\iota, \bar\iota : \mathfrak{A} \to Q\mathfrak{A}$ die kanonischen Inklusionen. Wir setzen

$$\mathfrak{E} := \{ f \in Q\mathfrak{A}[0,1] \mid \exists x \in \mathfrak{A}, f(0) = \iota(x), f(1) = \bar\iota(x),\ f(t) - f(0) \in q\mathfrak{A}, t \in [0,1] \}$$

Die Erweiterung

$$0 \to q\mathfrak{A}(0,1) \to \mathfrak{E} \to \mathfrak{A} \to 0$$

besitzt dann einen stetigen linearen Schnitt, der $x \in \mathfrak{A}$ auf $f \in \mathfrak{E}$ mit $f(t) = (1 - t)\iota(x) + t\bar\iota(x)$ abbildet.

3 MORPHISMEN VON DER UNIVERSELLEN ERWEITERUNG.

Als erstes analysieren wir die universelle Eigenschaft der Erweiterung $0 \to J\mathfrak{A} \to T\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to 0$ aus 2.2.

SATZ 3.1 *Es sei*

$$0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}_1 \underset{\curvearrowleft s}{\xrightarrow{\pi}} \mathfrak{A} \to 0$$

eine Erweiterung mit einem stetigen linearen Schnitt s (d.h. $\pi s = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$). Weiter sei $\varphi : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ ein Homomorphismus und $\tau_{s\varphi} : T\mathfrak{A}' \to \mathfrak{E}_1$ der Homomorphismus, der sich wie in 1.2 aus der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra $T\mathfrak{A}'$ ergibt. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\gamma_{s\varphi} : J\mathfrak{A}' \to \mathfrak{E}_0$ so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathfrak{E}_0 & \to & \mathfrak{E}_1 & \overset{s}{\underset{\pi}{\rightleftarrows}} & \mathfrak{A} \to 0 \\ & \uparrow \gamma_{s\varphi} & & \uparrow \tau_{s\varphi} & & \uparrow \varphi \\ 0 \to & J\mathfrak{A}' & \to & T\mathfrak{A}' & \to & \mathfrak{A}' \to 0 \end{array}$$

Beweis: Das Bild von $J\mathfrak{A}'$ unter $\tau_{s\varphi}$ ist in $\mathfrak{E}_0$ enthalten, weil die Abbildung $\pi \circ \tau_{s\varphi}$ das Ideal $J\mathfrak{A}'$ annulliert und weil andererseits $\mathfrak{E}_0 = \mathrm{Ker}\,\pi$. Wir setzen $\gamma_{s\varphi} = \tau_{s\varphi}|_{J\mathfrak{A}'}$ *q.e.d.*

Die Anwendung dieses Prinzips auf die in Abschnitt 2 eingeführten Erweiterungen ergibt Homomorphismen $J\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1)$, $J(\mathcal{C}^\infty(S^1)) \to \mathfrak{K}$ und $J\mathfrak{A} \to q\mathfrak{A}(0,1)$, die im folgenden immer wieder benutzt werden.
Wenn man das Resultat auf die Erweiterung $0 \to J\mathfrak{A} \to T\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to 0$ anwendet, sieht man insbesondere, dass $\mathfrak{A} \mapsto J\mathfrak{A}$ ein Funktor ist: Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ induziert einen Homomorphismus $J\mathfrak{A}' \to J\mathfrak{A}$, den wir mit $J(\varphi)$ bezeichnen.

LEMMA 3.2 *Sei* $0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}_1 \overset{s}{\underset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{A} \to 0$ *eine Erweiterung mit stetigem linearen Schnitt* s *und* $\varphi : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ *ein Homomorphismus wie in 3.1.*

(a) *Sei* s' *ein weiterer stetiger linearer Schnitt. Dann ist* $\gamma_{s'\varphi} : J\mathfrak{A} \to \mathfrak{E}_0$ *diffeotop zu* $\gamma_{s\varphi}$.

(b) *Wenn ein stetiger linearer Schnitt* s'' *existiert, der ein Algebrenhomomorphismus ist, so ist* $\gamma_{s\varphi}$ *diffeotop zu* 0.

(c) *Wenn ein Algebrenhomomorphismus* $\varphi' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{E}_1$ *existiert mit* $\pi \circ \varphi' = \varphi$, *so ist* $\gamma_{s\varphi}$ *diffeotop zu* 0.

Beweis: (a) Setze $s_t = ts' + (1-t)s$. Dann ist $\gamma_{s_t}, t \in [0,1]$ eine differenzierbare Homotopie, die γ_s und $\gamma_{s'}$ verbindet. (b) und (c) folgen aus (a) und aus der Tatsache, dass die Einschränkungen von $\tau_{s''\varphi}$ und $\tau_{\varphi'}$ auf $J\mathfrak{A}'$ verschwinden. *q.e.d.*

Für $\varphi = \mathrm{id}$ nennen wir γ_s die klassifizierende Abbildung zu der linear zerfallenden Erweiterung

$$0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}_1 \overset{s}{\underset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{A} \to 0$$

Das nächste einfache Lemma beschreibt das Verhalten der klassifizierenden Abbildung unter Morphismen (d.h. kommutativen Diagrammen) von Erweiterungen. Es wird in den folgenden Abschnitten implizit immer wieder benutzt.

LEMMA 3.3 *Betrachte das folgende kommutative Diagramm von Erweiterungen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathfrak{E}_0 & \to & \mathfrak{E}_1 & \to & \mathfrak{A} \to 0 \\ & \uparrow\psi_0 & & \uparrow\psi_1 & & \uparrow\varphi \\ 0 \to & \mathfrak{E}'_0 & \to & \mathfrak{E}'_1 & \to & \mathfrak{A}' \to 0 \end{array}$$

mit stetigen linearen Schnitten $s : \mathfrak{A} \to \mathfrak{E}_1$ *und* $s' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{E}'_1$.
Es gilt $\gamma_{s\varphi} = \gamma_s \circ J(\varphi)$ *und diese Abbildung ist diffeotop zu* $\psi_0 \circ \gamma_{s'}$ *(falls* $s\varphi = \psi_1 s'$, *so gilt sogar* $\gamma_s \circ J(\varphi) = \psi_0 \circ \gamma_{s'}$ *).*

DEFINITION-SATZ 3.4 *Gegeben seien zwei Erweiterungen von* $\mathfrak{A}$

$$0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}_1 \overset{s}{\underset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{A} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{E}_0 \to \mathfrak{E}'_1 \overset{s'}{\underset{\pi'}{\rightleftarrows}} \mathfrak{A} \to 0$$

mit stetigen linearen Schnitten. Die Summe dieser beiden Erweiterungen ist nach Definition die Erweiterung

$$0 \to M_2(\mathfrak{E}_0) \to \mathcal{D} \to \mathfrak{A} \to 0$$

wo $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x & a \\ b & x' \end{pmatrix} \mid x \in \mathfrak{E}_1, x' \in \mathfrak{E}'_1, \pi(x) = \pi'(x'); a, b \in \mathfrak{E}_0 \right\}$.

Sie erlaubt $s \oplus s' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix}$ *als stetigen linearen Schnitt. Der assoziierte Homomorphismus* $\gamma_{s\oplus s'} : J\mathfrak{A} \to M_2(\mathfrak{E}_0)$ *ist gegeben durch*

$$\gamma_{s\oplus s'} = \gamma_s \oplus \gamma_{s'} = \begin{pmatrix} \gamma_s & 0 \\ 0 & \gamma_{s'} \end{pmatrix}$$

Beweis: Klar. *q.e.d.*

Als Beispiel betrachten wir die glatte Toeplitzerweiterung

$$0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}^\infty(S^1) \to 0 \tag{3}$$

aus 2.3. Es sei u der Automorphismus von $\mathcal{C}^\infty(S^1)$, der die Orientierung von S^1 umkehrt. Dann ist die Summe von (3) mit der Erweiterung

$$0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{T} \xrightarrow{u\pi} \mathcal{C}^\infty(S^1) \to 0 \tag{4}$$

trivial (d.h. sie erlaubt einen stetigen linearen Schnitt, der ein Algebrenhomomorphismus ist). In der Tat ist die Abbildung, die die k-te Potenz z^k des Erzeugers z von $\mathcal{C}^\infty(S^1)$, $k \in \mathbb{Z}$ auf die k-te Potenz der Matrix $\begin{pmatrix} v_1 & e^{00} \\ 0 & v_{-1} \end{pmatrix}$ (mit den Bezeichnungen von 1.5) abbildet, ein stetiger Homomorphismus. Wenn daher s der stetige lineare Schnitt $\mathcal{C}^\infty(S^1) \to \mathfrak{T}$ ist, der z^k auf v_k abbildet und s' der Schnitt für (4) der z^k auf v_{-k} abbildet, so ist $\gamma_s \oplus \gamma_{s'}$ diffeotop zu 0.

DEFINITION-SATZ 3.5 *Gegeben seien m-Algebren* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$. *Wenn* $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *ein Homomorphismus zwischen m-Algebren ist, so bezeichnen wir mit* $\langle\varphi\rangle$ *die Äquivalenzklasse von* φ *im Bezug auf die Relation der Diffeotopie und wir setzen*

$$\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle = \{ \langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ ist ein stetiger Homomorphismus } \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \}$$

Für Homomorphismen $\alpha, \beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ *definieren wir wie in 3.4 die direkte Summe* $\alpha \oplus \beta$ *als*

$$\alpha \oplus \beta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \mathfrak{A} \longrightarrow M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$$

Mit der durch $\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle = \langle\alpha \oplus \beta\rangle$ *definierten Addition ist die Menge* $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B} \rangle$ *der Diffeotopieklassen von Homomorphismen von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ *eine abelsche Halbgruppe mit Nullelement* $\langle 0 \rangle$.

Beweis: Dies folgt aus Lemma 1.4.1. *q.e.d.*

Für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ ist $J\mathfrak{A}$ wieder eine m-Algebra. Wir können daher durch Iteration $J^2\mathfrak{A} = J(J\mathfrak{A}), \ldots, J^n\mathfrak{A} = J(J^{n-1}\mathfrak{A})$ bilden. Abbildungen von $J^n\mathfrak{A}$ in eine m-Algebra $\mathfrak{B}$ gehören dann zu Erweiterungen der Länge n.

DEFINITION-SATZ 3.6 *Eine exakte Folge*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{E}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathfrak{E}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \longrightarrow \mathfrak{E}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathfrak{A} \longrightarrow 0$$

wo $\mathfrak{E}_0, \ldots, \mathfrak{E}_n, \mathfrak{A}$ *m-Algebren und die* φ_i *stetige Homomorphismen sind, heiße linear zerfallende n-Schritt-Erweiterung, falls sie als exakte Folge von lokalkonvexen Vektorräumen zerfällt (d.h. falls* $\mathfrak{E}_i \cong \operatorname{Ker}\varphi_i \oplus \operatorname{Im}\varphi_{i-1}$*). Jede Wahl* $s_1, \ldots, s_n$ *von stetigen linearen Schnitten (d.h.* $\varphi_i s_i$ *ist für alle i eine stetige Projektion auf* $\operatorname{Im}\varphi_i$*) bestimmt in eindeutiger Weise einen Homomorphismus* $\gamma_{(s_1,\ldots,s_n)} : J^n\mathfrak{A} \to \mathfrak{E}_0$ *und Homomorphismen* $\gamma_{(s_{k+1},\ldots,s_n)} : J^{n-k}\mathfrak{A} \to \mathfrak{E}_k$ *so dass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathfrak{E}_0 \xrightarrow{\varphi_0} & \mathfrak{E}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \ldots & \mathfrak{E}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & \mathfrak{E}_n \xrightarrow{\varphi_n} & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow \gamma_{(s_1\ldots,s_n)} & \uparrow \tau_{s_1}\gamma_{(s_2\ldots,s_n)} & & & \uparrow \tau_{s_{n-1}}\gamma_{s_n} & \uparrow \tau_{s_n} & \| & \\
0 \longrightarrow & J^n\mathfrak{A} \longrightarrow & TJ^{n-1}\mathfrak{A} & \to & \ldots & TJ\mathfrak{A} \longrightarrow & T\mathfrak{A} \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Wenn $s_1', \ldots, s_n'$ *eine andere Familie von stetigen linearen Schnitten ist, so ist* $\gamma_{(s_1',\ldots,s_n')}$ *diffeotop zu* $\gamma_{(s_1,\ldots,s_n)}$.

In dem vorhergehenden Diagramm interessieren wir uns in erster Linie für die klassifizierende Abbildung $\gamma = \gamma_{(s_1,\ldots,s_n)}$. Diese hängt bis auf Diffeotopie nicht von $(s_1, \ldots, s_n)$ sondern nur von der gegebenen n-Schritt-Erweiterung ab.

Betrachten wir zwei Erweiterungen der Länge n und der Länge m

$$0 \longrightarrow \mathfrak{E}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathfrak{E}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \longrightarrow \mathfrak{E}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathfrak{A} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

und

$$0 \longrightarrow \mathfrak{E}_0' \xrightarrow{\varphi_0'} \mathfrak{E}_1' \xrightarrow{\varphi_1'} \ldots \longrightarrow \mathfrak{E}_m' \xrightarrow{\varphi_m'} \mathfrak{A}' \longrightarrow 0 \tag{6}$$

wo $\mathfrak{E}_0' = \mathfrak{A}$. Das wohlbekannte Yonedaprodukt besteht in der Zusammensetzung dieser zwei Erweiterungen zu einer Erweiterung der Länge $n+m$ von der Form

$$0 \longrightarrow \mathfrak{E}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathfrak{E}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \longrightarrow \mathfrak{E}_n \xrightarrow{\varphi_0'\varphi_n} \mathfrak{E}_1' \xrightarrow{\varphi_1'} \ldots \longrightarrow \mathfrak{E}_m' \xrightarrow{\varphi_m'} \mathfrak{A}' \longrightarrow 0 \tag{7}$$

LEMMA 3.7 *Es seien* $\gamma : J^n\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{E}_0$ *und* $\gamma' : J^m\mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{E}_0' = \mathfrak{A}$ *die Abbildungen, die mit (5) und (6) assoziiert sind. Die klassifizierende Abbildung* $J^{n+m}\mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{E}_0$ *zu der Erweiterung (7) ist gegeben durch* $\gamma \circ J^n(\gamma')$.

Beweis: Dies folgt aus 3.3. *q.e.d.*

DEFINITION 3.8 *Es sei* $\varphi : J\mathfrak{A} \to \mathcal{C}^\infty(S^1)\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ *die Komposition der klassifizierenden Abbildung* $J\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1)$ *zu der Erweiterung*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}(0,1) \longrightarrow \mathfrak{A}[0,1) \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow 0$$

mit der Inklusionsabbildung $\mathfrak{A}(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(S^1)\hat{\otimes}\mathfrak{A}$. *Wir bezeichnen mit* ε *die Abbildung*

$$\varepsilon : J^2\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$$

die unter Benutzung von φ *zu der Erweiterung*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{T}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \overset{s}{\longrightarrow} \mathcal{C}^\infty(S^1)\hat{\otimes}\mathfrak{A} \longrightarrow 0$$

gehört (d.h. $\varepsilon = \gamma_{s\varphi}$*).*

Man beachte, dass eine linear zerfallende Erweiterung in der Kategorie der lokalkonvexen Vektorräume einfach eine direkte Summe darstellt und daher natürlich auch nach Tensorieren mit beliebigen lokalkonvexen Räumen noch exakt bleibt.

Durch Hintereinanderschaltung der Abbildungen $J^4\mathfrak{A} \xrightarrow{J^2(\varepsilon)} J^2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$, sowie $J^2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^2(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{K}\hat{\otimes}J^2\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ bekommmen wir, unter leichtem Missbrauch der Bezeichnungen,

$$\varepsilon^2 : J^4\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \cong \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$$

und, nach Induktion

$$\varepsilon^n : J^{2n}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$$

Wir können bei der Konstruktion von ε statt der Toeplitzerweiterung auch die inverse Toeplitzerweiterung verwenden und erhalten dann eine Abbildung $\varepsilon_- : J^2\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$, die nach 3.4 die Eigenschaft hat, dass $\varepsilon \oplus \varepsilon_-$ diffeotop zu 0 ist.

LEMMA 3.9 *Für jedes Paar von m-Algebren* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *existieren kanonische Abbildungen* $J(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \rightarrow J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ *und* $J(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B}$, *die mit den folgenden linear zerfallenden Erweiterungen assoziiert sind*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \rightarrow & T\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \rightarrow & 0\,. \end{array}$$

Wir bemerken, dass insbesondere für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ ein kanonischer Homomorphismus $J(\mathfrak{A}) \rightarrow J(\mathbb{C})\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ existiert. Es ist klar, dass die in 3.8 definierte Abbildung $\varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{A}} : J^2\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ als Komposition der Abbildung $J^2\mathfrak{A} \rightarrow J^2\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ mit der Abbildung $\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$ geschrieben werden kann.

Das folgende Lemma bildet den Kernpunkt für unsere Konstruktion des Produkts der in Abschnitt 4 definierten bivarianten K-Theorie.

HAUPTLEMMA 3.10 $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *seien m-Algebren und* γ_+, γ_- *die zwei Abbildungen von* $J^2(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B})$ *nach* $J\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B}$, *die sich durch Anwendung von 3.9, wie folgt in den zwei möglichen Weisen ergeben:*

$$\begin{array}{ccccc} & & J(J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ J^2(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) & & \underset{\gamma_-}{\overset{\gamma_+}{\rightrightarrows}} & & J\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & J(\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B}) & & \end{array}$$

Dann ist die Abbildung $\gamma_+ \oplus \gamma_- = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ 0 & \gamma_- \end{pmatrix} : J^2(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \to M_2(J\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B})$ *diffeotop zu 0.*

Beweis: Betrachte die folgende Erweiterung

$$0 \longrightarrow J\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} \longrightarrow T\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} + J\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} \overset{\overset{s}{\curvearrowleft}}{\xrightarrow{\pi}} \mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} \oplus J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

Die Algebra in der Mitte wird hier als Unteralgebra von $T\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B}$ angesehen.
Die Abbildung $\gamma_+ \oplus \gamma_-$ ist durch Rotationen in 2×2-Matrizen diffeotop zu $\gamma_{s\alpha}$, wenn $\alpha : J(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} \oplus J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ die natürliche Abbildung bezeichnet. Zum Beweis der Behauptung genügt es daher nach Lemma 3.2 (c) zu zeigen, dass ein Homomorphismus $\alpha' : J(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \longrightarrow T\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} + J\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B}$ existiert, für den $\pi \circ \alpha' = \alpha$ gilt.

Nun kann aber α' als klassifizierende Abbildung $\gamma_{s'}$ in der linear zerfallenden Erweiterung

$$0 \longrightarrow J\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} + T\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} \longrightarrow T\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} \overset{\overset{s'}{\curvearrowleft}}{\longrightarrow} \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

gewählt werden. Die Tatsache, dass $\pi \circ \gamma_{s'} = \alpha$ folgt aus den zwei folgenden kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & J\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} + T\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} & \longrightarrow & T\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & J\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} + T\mathfrak{A}\hat{\otimes}J\mathfrak{B} & \longrightarrow & T\mathfrak{A}\hat{\otimes}T\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \longrightarrow & J\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow & T\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{B} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

sowie aus Lemma 3.3. *q.e.d.*

Als nächstes soll die Abbildung $\varepsilon : J^k\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^{k-2}\mathfrak{A}$, die in 3.8 eingeführt wurde, genauer untersucht werden. Zur besseren Übersichtlichkeit schreiben wir J_i für die i-te Anwendung des J-Funktors. D.h. also $J^k\mathfrak{A} = J_kJ_{k-1}\ldots J_1(\mathfrak{A})$.

Für jede Wahl von i, j mit $1 \leq j < i \leq k$, ergibt die Anwendung von 3.9 eine Abbildung $\eta_{ij} : J^k\mathfrak{A} \longrightarrow J^2\mathbb{C}\hat{\otimes}J^{k-2}\mathfrak{A}$, indem wir das j-te und das i-te J im Tensorprodukt $\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ auf $\mathbb{C}$ und alle anderen J auf den zweiten Faktor $\mathfrak{A}$ anwenden. Explizit sieht also η_{ij} folgendermaßen aus:

$$\eta_{ij} : J_k \ldots J_1(\mathfrak{A}) \longrightarrow J_iJ_j(\mathbb{C})\hat{\otimes}J_k \ldots \check{J}_i \ldots \check{J}_j \ldots J_1(\mathfrak{A})$$

wo $\vee$ Auslassung bedeutet.

Wenn wir dies mit der Abbildung $\varepsilon : J^2\mathbb{C} = J_iJ_j(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{K}$ kombinieren, erhalten wir eine Familie von Abbildungen $\varepsilon_{ij} : J^k\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^{k-2}\mathfrak{A}$, $1 \leq j < i \leq k$. (Mit dieser Bezeichnungsweise wäre die unter 3.8 betrachtete Abbildung ε_{21}).

KOROLLAR 3.11 *Es gelten die folgenden differenzierbaren Homotopien*

(a) $\varepsilon_{i-1,j} \oplus \varepsilon_{i,j} \sim 0, \quad 1 < j < i-1 \leq k-1$

$\varepsilon_{i,j-1} \oplus \varepsilon_{i,j} \sim 0, \quad 2 \leq j < i \leq k$

(b) *Für alle* $i, j,\ 1 \leq i, j \leq k-1$, *gilt* $\varepsilon_{i+1,i} \sim \varepsilon_{j+1,j}$

Hierbei bezeichnet $\sim$ *Diffeotopie.*

Beweis: (a) ergibt sich aus 3.10. (b) folgt aus (a) unter Benutzung der Tatsache, dass die Menge der Diffeotopieklassen von Homomorphismen $J^k\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{K}\hat{\otimes}J^{k-2}\mathfrak{A}$ nach 3.5 eine abelsche Halbgruppe mit 0-Element ist. In dieser Halbgruppe sind die Klassen von $\varepsilon_{i+1,i}$ und von $\varepsilon_{i,i-1}$ beide invers zu $\varepsilon_{i+1,i-1}$, und daher gleich. *q.e.d.*

4 DER BIVARIANTE K-FUNKTOR

Wir sind jetzt soweit, dass wir das eigentliche Untersuchungsobjekt dieser Arbeit einführen können. Wir betrachten die Menge der Diffeotopieklassen von Homomorphismen $H_k = \langle J^k\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$, wobei $H_0 = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$. Jedes H_k ist eine abelsche Halbgruppe mit der üblichen K-Theorie-Addition $\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle = \langle\alpha \oplus \beta\rangle$, siehe 3.6. Die Klasse $\langle 0\rangle$ ist das Nullelement.

Es existiert eine kanonische Abbildung $S : H_k \longrightarrow H_{k+2}$, die man in der folgenden Weise erhält: für $\langle\alpha\rangle \in H_k, \alpha : J^k\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$, sei $S\langle\alpha\rangle = \langle(\mathrm{id}_\mathfrak{K} \otimes \alpha) \circ \varepsilon\rangle$. Dabei ist $\varepsilon : J^{k+2}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K} \otimes J^k\mathfrak{A}$ die in 3.8 betrachtete Abbildung (genauer gesagt $\varepsilon = \varepsilon_{k+2,k+1}$ mit den Bezeichnungen von 3.9). Weiter sei $\varepsilon_- : J^{k+2}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K} \otimes J^k\mathfrak{A}$ die Abbildung, die sich in derselben Weise, aber unter Ersetzung der Toeplitzerweiterung durch die inverse Toeplitzerweiterung, ergibt. Die Diskussion nach 3.4 zeigt, dass die Summe $\varepsilon \oplus \varepsilon_-$ diffeotop zu 0 ist. Daher ist $S\langle\alpha\rangle + S_-\langle\alpha\rangle = 0$, wenn wir $S_-\langle\alpha\rangle = \langle(\mathrm{id}_\mathfrak{K} \otimes \alpha) \circ \varepsilon_-\rangle$ setzen.

DEFINITION 4.1 *Es seien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *m-Algebren und* $* = 0$ *oder* 1. *Wir setzen*

$$kk_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varinjlim_k H_{2k+*} = \varinjlim_k \langle J^{2k+*}\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$$

Die vorhergehende Diskussion zeigt, dass $kk_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nicht nur eine abelsche Halbgruppe, sondern sogar eine abelsche Gruppe ist (jedes Element besitzt ein Inverses).

Die wesentliche Eigenschaft von kk_* ist das Produkt, das mit Hilfe des Hauptlemmas 3.10 definiert werden kann. Wir benötigen für die Definition noch einige Bezeichnungen.

Wenn $\alpha : J^k\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ ein Homomorphismus ist, so bezeichne α_j den Homomorphismus $\alpha_j : J^{k+j}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^j\mathfrak{B}$, der durch Hintereinanderschaltung von $J^j(\alpha) : J^{k+j}\mathfrak{A} \to J^j(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B})$ mit der kanonischen Abbildung $J^j(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}) \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^j\mathfrak{B}$ entsteht; cf. 3.9.

LEMMA 4.2 *Mit den Bezeichnungen vom Ende des Abschnitt 3 sind die folgenden Abbildungen* $J^{k+j+2}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^j\mathfrak{B}$ *diffeotop* ($\sim$)

$$(a) \quad ((id_\mathfrak{K} \otimes \alpha) \circ \varepsilon_{k+2,k+1})_j \sim (id_\mathfrak{K} \otimes \alpha_j) \circ \varepsilon_{k+j+2,k+j+1}$$

$$(b) \quad (id_\mathfrak{K} \otimes \alpha_j) \circ \varepsilon_{k+j+2,k+j+1} \sim (id_\mathfrak{K} \otimes \varepsilon_{j+2,j+1}) \circ \alpha_{j+2}$$

Beweis: (a) ist eine Konsequenz von Korollar 3.11 und (b) folgt sofort aus Lemma 1.4.1. *q.e.d.*

THEOREM 4.3 *(a) Es existiert ein assoziatives und in beiden Variablen additives Produkt*

$$kk_i(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \times kk_j(\mathfrak{B},\mathfrak{C}) \longrightarrow kk_{i+j}(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$$

($i,j \in \mathbb{Z}/2$; $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ m-Algebren), das für $\alpha : J^n\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$, $\beta : J^m\mathfrak{B} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{C}$ in der folgenden Weise definiert ist:

$$\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle = \langle(id_{\mathfrak{K}} \otimes \beta) \circ \alpha_m\rangle$$

(b) Es existiert ein bilineares graduiert kommutatives äußeres Produkt

$$kk_i(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2) \times kk_j(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2) \longrightarrow kk_{i+j}(\mathfrak{A}_1\hat{\otimes}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1\hat{\otimes}\mathfrak{B}_2)$$

Beweis: (a) Die einzige Behauptung, die nicht offensichtlich ist, ist die, dass das Produkt wohldefiniert ist. Wir müssen zeigen, dass unsere Definition des Produkts verträglich ist mit den Identifikationen in dem induktiven Limes, der in der Definition von kk_* in 4.1 benutzt wird. Dafür müssen wir nachprüfen, dass

$$\beta \circ (\alpha \circ \varepsilon)_j \sim (\beta \circ \alpha_j) \circ \varepsilon$$
$$(\beta \circ \varepsilon) \circ \alpha_{j+2} \sim (\beta \circ \alpha_j) \circ \varepsilon$$

(Wir haben hier bei den Bezeichnungen die Indizes von ε, die nach 3.11 irrelevant sind, und das Tensorprodukt mit $\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}$ weggelassen.) Die Existenz dieser Diffeotopien ist genau die Aussage von Lemma 4.2.

(b) Dies folgt sofort aus der Existenz der natürlichen Abbildungen

$$J^{2n+2m+i+j}(\mathfrak{A}_1\hat{\otimes}\mathfrak{A}_2) \longrightarrow (J^{2n+i}\mathfrak{A}_1)\hat{\otimes}(J^{2m+j}\mathfrak{A}_2)$$

vgl. 3.9. *q.e.d.*

Lemma 3.7 zeigt, dass das (innere) Produkt in (a) gerade dem Yonedaprodukt von Erweiterungen entspricht.

SATZ 4.4 *kk_* hat die folgenden Eigenschaften*

(a) Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ definiert ein Element $kk(\varphi)$ in der Gruppe $kk_0(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Wenn $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, ein weiterer Homomorphismus ist, so gilt

$$kk(\psi \circ \varphi) = kk(\varphi) \cdot kk(\psi)$$

$kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ ist ein kontravarianter Funktor in $\mathfrak{A}$ und ein kovarianter Funktor in $\mathfrak{B}$. Wenn $\alpha : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ und $\beta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ Homomorphismen sind, so sind die in der ersten und zweiten Variablen von kk_* induzierten Abbildungen gegeben durch Linksmultiplikation mit $kk(\alpha)$ und Rechtsmultiplikation mit $kk(\beta)$.

(b) Für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ ist $kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ ein $\mathbb{Z}/2$-graduierter Ring mit Einselement $kk(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}})$.

(c) *Der Funktor kk_* ist invariant unter Diffeotopien in beiden Variablen.*

(d) *Die kanonische Inklusion $\iota : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ definiert ein invertierbares Element in $kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$. Insbesondere ist $kk_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cong kk_*(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $kk_*(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \cong kk_*(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$ für jede m-Algebra $\mathfrak{B}$.*

Beweis: (a) Die Diffeotopieklasse $\langle\alpha\rangle$ von α ist ein Element von H_0 und damit nach Definition auch von kk_0. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der Definition des Produkts.
(b) Dies folgt aus 4.3. Das Einselement ist $kk\,(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}) \in kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$.
(c) Die Abbildungen $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}[0,1]$ und $\mathfrak{A}[0,1] \to \mathfrak{A}$, die a auf $a \cdot 1$ und f auf $f(0)$ abbilden, definieren Elemente in $kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}[0,1])$ und $kk_0(\mathfrak{A}[0,1], \mathfrak{A})$, die invers zueinander sind.
(d) folgt aus Lemma 1.4.1. *q.e.d.*

Nach Definition bestimmt ε ein Element in $kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ und zwar dasselbe wie $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$, d.h. also das Einselement. Andererseits kann die Abbildung $\varepsilon : J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ auch als Element von $kk_0(J^2\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ oder als Element von $kk_1(J\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ gedeutet werden.

SATZ 4.5 *Die Abbildung $\varepsilon : J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ definiert invertierbare Elemente e_0 in $kk_0(J^2\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ und e_1 in $kk_1(J\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$.*

Beweis: Die Inversen zu e_0 und e_1 sind gegeben durch $\mathrm{id}_{J^2\mathfrak{A}}$ und $\mathrm{id}_{J\mathfrak{A}}$. *q.e.d.*

Insbesondere ist also

$$kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cong kk_0(J\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cong kk_0(\mathfrak{A}, J\mathfrak{B})$$

BEMERKUNG 4.6 *Die hier entwickelte Konstruktion der bivarianten K-Theorie ist sehr allgemein und kann ohne weiteres verwendet werden, um bivariante Theorien mit verschiedenen Stabilitäts- und Homotopieinvarianzeigenschaften auch für ganz andere Kategorien von topologischen Algebren einzuführen. Benötigt werden hierzu für jede Algebra $\mathcal{A}$ in einer solchen Kategorie die folgenden Erweiterungen:*

(a) *die universelle Erweiterung* $0 \to J\mathcal{A} \to T\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0$

(b) *die Einhängungserweiterung* $0 \to \mathcal{A}(0,1) \to \mathcal{A}(0,1] \to \mathcal{A} \to 0$

(c) *die Toeplitzerweiterung* $0 \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}(S^1) \to 0$

Hierbei ist $\otimes$ ein geeignetes Tensorprodukt in der Kategorie, $\mathcal{K}$ eine Vervollständigung der Algebra M_∞ der endlichen Matrizen beliebiger Grösse, sowie $\mathcal{A}(0,1)$, $\mathcal{A}(0,1]$, $\mathcal{A}(S^1)$ geeignete Algebren von Funktionen auf $(0,1)$, $(0,1]$, S^1 mit Werten in $\mathcal{A}$. Die universelle Erweiterung muß universell für eine gewisse Klasse von Erweiterungen sein (bei m-Algebren für linear zerfallende Erweiterungen). Außerdem müssen die Einhängungserweiterung und die Toeplitzerweiterung zusammensetzbar sein, d.h. es muß eine Abbildung $\mathcal{A}(0,1) \to \mathcal{A}(S^1)$ existieren.
Diese Bedingungen sind zum Beispiel erfüllt in der Kategorie der C^*-Algebren mit der üblichen Toeplitzerweiterung und mit der universellen C^*-Algebra- Vervollständigung von $T\mathcal{A}$, für die die kanonische lineare Inklusion $\mathcal{A} \to T\mathcal{A}$ involutionserhaltend und

von Norm ≤ 1 ist. Damit ist die entsprechende Erweiterung universell für Erweiterungen, die einen stetigen Schnitt mit Norm 1 erlauben. Dieselben Wahlen funktionieren in der Kategorie der σ-C^*-Algebren.
In der Kategorie der Banachalgebren kann für $\mathcal{K}$ die Algebra $\mathcal{K}_1$ aus 1.6.4 und für die Funktionenalgebren die einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathcal{A}$ verwendet werden. Eine geeignete Wahl für das Tensorprodukt ist hier auch das projektive.
Die Stabilitäts- und Homotopieinvarianzeigenschaften der Theorie sind dann bestimmt durch die Wahl der Algebra $\mathcal{K}$ und der Funktionenalgebren (stetige oder differenzierbare Funktionen mit Werten in $\mathcal{A}$). Die Größe von $\mathcal{K}$ korrespondiert aufgrund der Toeplitzerweiterung zur Größe der Funktionenalgebren. Die hier dargestellte Theorie ist gewissermaßen minimal (für die Größe von $\mathcal{K}$ und der Funktionenalgebren) mit der Eigenschaft, dass die oben erwähnte Abbildung $\mathcal{A}(0,1) \to \mathcal{A}(S^1)$ noch existiert.
Wenn wir nur Erweiterungen der Länge 1, d.h. Abbildungen $J\mathcal{A} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ zulassen würden, so müsste nach der Summierbarkeitsobstruktion von Douglas-Voiculescu [DoVo], die Algebra $\mathcal{K}$ alle Schattenideale ℓ^p für $p \geq 1$ enthalten. Dadurch, dass wir Abbildungen $J^n\mathcal{A} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ für beliebige n verwenden, erhalten wir das Produkt und umgehen gleichzeitig diese Obstruktion.

5 Ausschneidung und die langen exakten Folgen in beiden Variablen

In diesem Abschnitt halten wir uns eng an das in [CuSk] gegebene Argument für die Ausschneidung. Ein Unterschied hier ist, dass wir nur differenzierbare Homotopien, d.h. Diffeotopien benutzen. Der Beweisgang zeigt übrigens interessanterweise auch, dass dies wirklich wesentlich ist. Wenn wir kk mit Hilfe von stetigen Homotopien definiert hätten, würde die Ausschneidung nicht gelten; siehe Bemerkung 5.6. Weiter wird ein Teil des Arguments im Vergleich zu [CuSk] dadurch vereinfacht, dass die inverse Bottabbildung $\varepsilon : J^2\mathbb{C} \to \mathfrak{K}$ in unsere Theorie schon eingebaut ist und nach Definition das Einselement von $kk_0(\mathbb{C},\mathbb{C})$ repräsentiert.

Wenn $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus zwischen m-Algebren ist, werden wir im folgenden mit $\mathfrak{K}(\alpha), \alpha(0,1), \alpha[0,1), J(\alpha)\ldots$ die induzierten Abbildungen $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}(0,1) \to \mathfrak{B}(0,1)$, $\mathfrak{A}[0,1) \to \mathfrak{B}[0,1)$, $J\mathfrak{A} \to J\mathfrak{B}\ldots$ bezeichnen.

Wie üblich definieren wir auch den (differenzierbaren) Abbildungskegel C_α durch

$$C_\alpha = \{(x,f) \in \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}[0,1) \mid \alpha(x) = f(0)\}$$

Lemma 5.1 *Sei $\mathfrak{D}$ eine m-Algebra und $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus*

(a) Die Folge

$$kk_*(\mathfrak{D}, C_\alpha) \xrightarrow{\cdot kk(\pi)} kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{A}) \xrightarrow{\cdot kk(\alpha)} kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{B})$$

ist exakt. Hierbei bezeichnet $\pi : C_\alpha \to \mathfrak{A}$ die Projektion auf den ersten Summanden und $\cdot kk(\pi)$ Rechtsmultiplikation mit $kk(\pi)$.

(b) Die Folge in (a) kann fortgesetzt werden zu einer exakten Folge

$$\xrightarrow{\cdot kk(\pi(0,1))} kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{A}(0,1)) \xrightarrow{\cdot kk(\alpha(0,1))} kk_{*+1}(\mathfrak{D},\mathfrak{B}(0,1)) \to$$
$$kk_*(\mathfrak{D}, C_\alpha) \xrightarrow{\cdot kk(\pi)} kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{A}) \xrightarrow{\cdot kk(\alpha)} kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{B})$$

Beweis: (a) Das Element $z \in kk_*(\mathfrak{D},\mathfrak{A})$ sei durch den Homomorphismus $\varphi : J^{2n+*}\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ repräsentiert. Die Gleichung $\langle\varphi\rangle \cdot kk(\alpha) = 0$ bedeutet, dass für ein geeignetes $m \geq n$ die durch $\mathfrak{K}(\alpha)\circ\varphi$ induzierte Abbildung $J^{2m+*}\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ über einen Homomorphismus $\gamma : J^{2m+*}\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}[0,1)$ faktorisiert. Wir können annehmen,dass $m = n$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} J^{2n+*}\mathfrak{D} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \\ \downarrow\gamma & & \downarrow\mathfrak{K}(\alpha) \\ \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}[0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B} \end{array}$$

definiert einen Homomorphismus $\gamma' : J^{2n+*}\mathfrak{D} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}C_\alpha$ so dass $\mathfrak{K}(\pi)\cdot\gamma' = \varphi$.
(b) Dies folgt wie üblich durch Iteration der Konstruktion in (a). Hierzu benutzt man die Tatsache, dass der Abbildungskegel C_π für die Projektion $\pi : C_\alpha \to \mathfrak{A}$ diffeotop zu $\mathfrak{B}(0,1)$ ist, und das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_\pi & \xrightarrow{\pi'} & C_\alpha \\ \uparrow & & \| \\ \mathfrak{B}(0,1) & \xrightarrow{\iota} & C_\alpha \end{array}$$

In diesem Diagramm ist ι die Inklusion von $\mathfrak{B}(0,1)$ in die zweite Komponente von C_α und der erste senkrechte Pfeil ist die erwähnte Diffeotopieäquivalenz (sie bildet $f \in \mathfrak{B}(0,1)$ auf $(\iota f, 0) \in C_\pi \subset C_\alpha \oplus \mathfrak{A}[0,1))$ ab.

Gleicherweise ist der Abbildungskegel C_ι für $\iota : \mathfrak{B}(0,1) \to C_\alpha$ enthalten in $\mathfrak{A}(0,1) \oplus \mathfrak{B}([0,1)\times[0,1))$. Die Projektion $C_\iota \to \mathfrak{A}(0,1)$ ist ebenfalls eine Diffeotopieäquivalenz und macht das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} C_\iota & \longrightarrow & \mathfrak{B}(0,1) \\ \downarrow & & \| \\ \mathfrak{A}(0,1) & \xrightarrow{\alpha(0,1)} & \mathfrak{B}(0,1) \end{array}$$

q.e.d.

LEMMA 5.2 *$\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ seien wie in 5.1*

(a) Die Folge

$$kk_*(C_\alpha,\mathfrak{D}) \xleftarrow{kk(\pi)\cdot} kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{D}) \xleftarrow{kk(\alpha)\cdot} kk_*(\mathfrak{B},\mathfrak{D})$$

ist exakt.

(b) Die Folge in (a) kann zu einer langen exakten Folge der Form

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{kk(\pi(0,1))\cdot} & kk_*(\mathfrak{A}(0,1),\mathfrak{D}) & \xleftarrow{kk(\alpha(0,1))\cdot} & kk_{*+1}(\mathfrak{B}(0,1),\mathfrak{D}) & \leftarrow & & \\ & kk_*(C_\alpha,\mathfrak{D}) & \xleftarrow{kk(\pi)\cdot} & kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{D}) & \xleftarrow{kk(\alpha)\cdot} & kk_*(\mathfrak{B},\mathfrak{D}) & \end{array}$$

fortgesetzt werden.

Beweis: (a) Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $* = 0$. Sei dann $\varphi : J^{2n}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}$ ein Homomorphismus mit der Eigenschaft, dass $kk(\pi)\cdot\langle\varphi\rangle = \langle 0\rangle$. Dies bedeutet, dass ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} J^{2n}C_\alpha & \xrightarrow{J^{2n}(\pi)} & J^{2n}\mathfrak{A} \\ \downarrow\gamma & & \downarrow\varphi \\ \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}[0,1) & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D} \end{array}$$

existiert. Hierbei ist ev die Auswertungsabbildung in 0. Man beachte, dass $\varphi\circ J^{2n}(\pi)\circ\varepsilon = \varphi\circ\varepsilon\circ J^{2n+2}(\pi)$, so dass wir annehmen können, dass die Diffeotopie schon auf Niveau n realisiert ist. Da γ in diesem Diagramm den Kern von $J^{2n}(\pi)$ in den Kern von ev abbildet, d.h. also in $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1)$, ergibt die Einschränkung von γ eine Abbildung $\gamma' : J^{2n}(\mathfrak{B}(0,1)) \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1)$.

Wir verwenden jetzt die natürlichen Abbildungen $J\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}(0,1)$ und $J(\mathfrak{D}(0,1)) \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}$, siehe 3.8, um durch die Komposition

$$J^{2n+2}\mathfrak{B} \longrightarrow J^{2n+1}(\mathfrak{B}\,(0,1)) \xrightarrow{J(\gamma')} J(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1)) \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}$$

eine Abbildung $\psi : J^{2n+2}\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}$ zu konstruieren. Wir müssen zeigen, dass $\psi\circ J^{2n+2}(\alpha) \sim \varphi\circ\varepsilon$. Dies folgt aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}[0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D} & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow\gamma' & & \uparrow\gamma & & \uparrow\varphi & \\ 0\longrightarrow & J^{2n}(\mathfrak{B}(0,1) & \longrightarrow & J^{2n}C_\alpha & \longrightarrow & J^{2n}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow J^{2n}\alpha(0,1) & & \uparrow J^{2n}\alpha' & & \| & \\ 0\longrightarrow & J^{2n}(\mathfrak{A}\,(0,1)) & \longrightarrow & J^{2n}(\mathfrak{A}\,[0,1)) & \longrightarrow & J^{2n}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Hierbei ist $\alpha(0,1)$ die Einhängung von α und α' ist die Abbildung, die $f\in\mathfrak{A}[0,1)$ auf $(f(0),\alpha[0,1)(f))\in C_\alpha$ abbildet.

Das Diagramm zeigt unter Verwendung von Lemma 3.3, dass die durch φ induzierte Abbildung $J^{2n+1}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1)$ diffeotop zur Komposition der folgenden Abbildungen ist

$$J^{2n+1}\mathfrak{A} \longrightarrow J^{2n}(\mathfrak{A}\,(0,1)) \xrightarrow{J^{2n}(\alpha(0,1))} J^{2n}(\mathfrak{B}\,(0,1)) \xrightarrow{\gamma'} \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{D}(0,1)$$

(b) folgt aus (a) genau wie in Lemma 5.1. *q.e.d.*

SATZ 5.3 *Es sei* $0\to\mathfrak{I}\to\mathfrak{A}\xrightarrow{q}\mathfrak{B}\to 0$ *eine linear zerfallende Erweiterung und* $e:\mathfrak{I}\to C_q$ *die Inklusionsabbildung, die durch* $e: x\mapsto (x,0)\in C_q\subset\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}\,[0,1)$ *definiert ist. Dann ist* $kk(e)$ *ein invertierbares Element in* $kk_0(\mathfrak{I},C_q)$.

Beweis: Wir zeigen, dass das Inverse zu $kk(e)$ in $kk_0(C_q,\mathfrak{I})$ durch die Diffeotopieklasse $\langle u\rangle$ des Homomorphismus $u: J^2C_q \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{I}$ gegeben ist, der folgendermaßen konstruiert wird: Sei $u_0 : JC_q \longrightarrow \mathfrak{I}(0,1)$ die Abbildung, die zu der Erweiterung

$$0\longrightarrow\mathfrak{I}(0,1)\longrightarrow\mathfrak{A}\,[0,1)\longrightarrow C_q\longrightarrow 0$$

gehört. Dann sei u die Komposition von $J(u_0)$ mit der kanonischen Abbildung $J(\mathfrak{I}(0,1)) \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{I}$. Wir bezeichnen das durch u definierte Element auch mit $kk(u)$.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A}[0,1) & \longrightarrow & C_q & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow e & \\ 0 \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{I}[0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{I} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

zeigt, dass $u_0 \circ J(e)$ gerade die kanonische Abbildung $J\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{I}(0,1)$ ist, so dass also das Element $kk(e) \cdot kk(u)$ durch die Abbildung $\varepsilon : J^2\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{I}$ dargestellt wird. Nach Definition entspricht aber ε dem Einselement in $kk_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$.

Um das umgekehrte Produkt $kk(u) \cdot kk(e)$ zu bestimmen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & C_q(0,1) & \longrightarrow & C_q[0,1) & \longrightarrow & C_q & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow e(0,1) & & \uparrow e' & & \| & \\ 0 \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A}[0,1) & \longrightarrow & C_q & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8}$$

wo

$$e'(f)(z) = \begin{cases} q(f(s)) & \text{wenn} \quad z = se^{i\theta} \quad \theta > 0 \,\text{und}\, s > 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad |z| \geq 1 \\ f(s) & \text{wenn} \quad z = s \end{cases}$$

Hierbei werden Elemente von $C_q[0,1)$ aufgefasst als "Funktionen" g von zwei Variablen $(x,y) \in [0,1]^2$ oder von einer komplexen Variablen $z = x + iy$ mit

$$g(x+iy) \in \begin{cases} \mathfrak{A} & y = 0 \\ \mathfrak{B} & y > 0 \end{cases}$$

Außerdem muss eine Funktion g in $C_q[0,1)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$g(x+iy) = 0$, wenn $x = 1$ oder $y = 1$

für $y > 0$ ist $g(x+iy)$ eine stetige Funktion von x, y

$q(g(x)) = \lim_{y \to 0} g(x+iy)$

Das kommutative Diagramm (8) zeigt, dass $e(0,1) \circ u_0$ diffeotop zu der kanonischen Abbildung $JC_q \to C_q(0,1)$ ist und damit, dass $kk(u) \cdot kk(e) = 1$. *q.e.d.*

Betrachte nun die nach links unendlichen exakten Folgen aus 5.1(b) und 5.2(b) für den Fall, wo α die Quotientenabbildung q in einer Erweiterung wie in 5.3 ist. Theorem 5.3 erlaubt es, in den exakten Folgen jeweils C_q durch $\mathfrak{I}$ zu ersetzen. Überdies erhalten wir aus 5.3 auch sofort die Bottperiodizität.

SATZ 5.4 *Die durch die Einhängungserweiterung induzierten Abbildungen* $J\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1)$ *und* $J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1)^2$ *repräsentieren in* $kk_0(J\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(0,1))$, *in* $kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(0,1))$ *und in* $kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(0,1)^2)$ *invertierbare Elemente.*

Beweis: Dies ergibt sich aus den langen exakten Folgen aus 5.1(b) und 5.2(b) angewandt auf das folgende kommutative Diagramm von Erweiterungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathfrak{A}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A}[0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & J\mathfrak{A} & \longrightarrow & T\mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Z.B. zeigt das 5-Lemma und die exakte Folge aus 5.2(b) für $kk_0(\,\cdot\,, J\mathfrak{A})$, dass Linksmultiplikation mit $g = kk(J\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1))$ einen Isomorphismus von $kk_0(\mathfrak{A}(0,1), J\mathfrak{A})$ mit $kk_0(J\mathfrak{A}, J\mathfrak{A})$ induziert. Man schließt daraus, dass g von rechts invertierbar ist. *q.e.d.*

THEOREM 5.5 *Es sei $\mathfrak{D}$ eine beliebige m-Algebra. Jede linear zerfallende Erweiterung*

$$E\,:\, 0 \to \mathfrak{J} \xrightarrow{i} \mathfrak{A} \xrightarrow{q} \mathfrak{B} \to 0$$

induziert exakte Folgen in $kk(\mathfrak{D}, \cdot\,)$ und $kk(\,\cdot\,, \mathfrak{D})$ der folgenden Form:

$$\begin{array}{ccccc} kk_0(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}) & \overset{\cdot kk(i)}{\longrightarrow} & kk_0(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}) & \overset{\cdot kk(q)}{\longrightarrow} & kk_0(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ kk_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}) & \overset{\cdot kk(q)}{\longleftarrow} & kk_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}) & \overset{\cdot kk(i)}{\longleftarrow} & kk_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{J}) \end{array} \tag{9}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} kk_0(\mathfrak{J}, \mathfrak{D}) & \overset{kk(q)\cdot}{\longleftarrow} & kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) & \overset{kk(i)\cdot}{\longleftarrow} & kk_0(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ kk_1(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) & \overset{kk(i)\cdot}{\longrightarrow} & kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) & \overset{kk(q)\cdot}{\longrightarrow} & kk_1(\mathfrak{J}, \mathfrak{D}) \end{array} \tag{10}$$

Die gegebene Erweiterung E definiert eine klassifizierende Abbildung $J\mathfrak{B} \to \mathfrak{J}$ und damit ein Element von $kk_1(\mathfrak{J}, \mathfrak{B})$, das wir mit $kk(E)$ bezeichnen. Die senkrechten Pfeile in (9) und (10) sind bis auf ein Vorzeichen gegeben durch Rechts-, bzw. durch Linksmultiplikation mit dieser Klasse $kk(E)$. Das Vorzeichen hängt von den Identifizierungen bei der Bottperiodizität nach Satz 5.4 ab.

Beweis: Satz 5.3 erlaubt es, in den exakten Folgen aus 5.1(b) und 5.2(b) jeweils C_q durch $\mathfrak{J}$ zu ersetzen. Dies ergibt unter Verwendung von 5.4 die exakten Folgen (9) und (10). Die Verbindungsabbildungen für die einfachen Einhängungen in 5.1(b) und 5.2(b) sind induziert durch die Inklusion $j : B(0,1) \to C_q$, d.h. sie sind gegeben durch Produkt mit der Klasse $kk(j)$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathfrak{J}(0,1) & \to & \mathfrak{A}[0,1) & \to & C_q & \to 0 \\ & \| & & \uparrow & & \uparrow j & \\ 0 \to & \mathfrak{J}(0,1) & \to & \mathfrak{A}(0,1) & \to & B(0,1) & \to 0 \end{array}$$

zeigt andererseits, dass mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 5.3 die Identität $kk(j) \cdot kk(u) = kk(E)$ gilt. Die Identifikation von C_q mit $\mathfrak{J}$ geschieht aber gerade mit Hilfe des Isomorphismus, der nach Satz 5.3 durch Multiplikation mit $kk(e)^{-1} = kk(u) \in kk(C_q, \mathfrak{J})$ definiert ist. *q.e.d.*

BEMERKUNG 5.6 *Der Beweis für die Ausschneidung macht deutlich, dass in der Definition von kk die Beschränkung auf Diffeotopie, d.h. differenzierbare Homotopie als Äquivalenzrelation von grundlegender Bedeutung ist. Der Beweis von 5.2 und vor allem aber auch der zu 5.3 beruht auf der Existenz der Abbildung* $J(\mathfrak{A}(0,1)) \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$. *Wenn der Abbildungskegel* C_q *mit stetigen oder nur k-fach differenzierbaren Funktionen definiert worden wäre, würde das Inverse* $kk(u)$ *zu* $kk(e)$ *nicht existieren.*
Dies liegt an den Eigenschaften der Toeplitzerweiterung, bei der die Grösse des Ideals der des Quotienten entspricht. Man könnte verschiedene Versionen von kk definieren, indem man Diffeotopie durch stetige oder k-fach differenzierbare Homotopie ersetzt und dann aber auch statt der glatten Toeplizerweiterung entsprechend die stetige oder die k-fach differenzierbare Toeplitzerweiterung verwendet. Dies bedeutet, dass man in der Definition von kk das Ideal $\mathfrak{K}$ *durch die* C^**-Algebra* $\mathcal{K}$ *der kompakten Operatoren bzw. durch die Algebra* $\mathcal{K}_n$ *der Matrizen* (λ_{ij}) *mit*

$$\sum_{ij} |\lambda_{ij}|\,|1+i+j|^n \quad \leq \infty$$

ersetzen muss.

BEMERKUNG 5.7 *In Analogie zu [Sk] könnte man für zwei m-Algebren* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *eine Theorie* $kk_*^{nuk}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *definieren, indem man statt beliebiger Homomorphismen nur nukleare Homomorphismen* $J^{2n+*}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ *betrachtet. Aufgrund der Hochhebungs- und Fortsetzungseigenschaften nuklearer Abbildungen würde diese Theorie Ausschneidung in beiden Variablen für Erweiterungen von Fréchetalgebren erfüllen, auch wenn diese nicht notwendigerweise zerfallen.*

6 DER CHERN-CONNES-CHARAKTER

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass Funktoren E auf der Kategorie der m-Algebren, die gewisse abstrakte Eigenschaften besitzen, automatisch auch funktoriell unter kk-Elementen sind. Da die Definition von kk wesentlich auf der Periodizitätsabbildung ε beruht, besteht der erste Schritt darin, zu zeigen, dass für solche Funktoren $E(\varepsilon)$ ein Isomorphismus sein muss. Weil aber ε mit Hilfe der Toeplitzerweiterung definiert ist, benötigen wir zuerst eine genauere Analyse der universellen Eigenschaften der Toeplitzalgebra $\mathfrak{T}$. Hierzu sei $U(v,w)$ die universelle Algebra über $\mathbb{C}$ mit zwei Erzeugern v und w, die die Relation $wv = 1$ erfüllen. Dies ist Kurzschreibweise für die Bedingung, dass wv ein Einselement für alle Polynome in v und w ist. Wir setzen $e = 1 - vw$. Dann ist e ein idempotentes Element in $U(v,w)$, und die Elemente $e^{ij} = v^i e w^j$ erfüllen

$$e^{ij}e^{kl} = \delta_{jk}e^{il}$$

Man sieht daraus sofort, dass man $U(v,w)$ treu auf dem Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ mit der kanonischen Orthonormalbasis $(\xi_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ durch

$$v\xi_n = \xi_{n+1} \qquad w\xi_n = \xi_{n-1},\ w\xi_0 = 0$$

darstellen kann. Dabei werden dann also die e^{ij} auf die Matrixeinheiten mit $e^{ij}\xi_n = \delta_{jn}\xi_i$ abgebildet. Die Linearkombinationen der $e^{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ bilden eine Matrixalgebra isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$

SATZ 6.1 *Die Toeplitzalgebra $\mathfrak{T}$ ist die universelle m-Algebra, die von zwei Elementen v und w mit $wv = 1$, erzeugt wird (d.h. also die eine Vervollständigung von $U(v,w)$ ist) und deren Topologie durch eine Familie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von submultiplikativen Halbnormen bestimmt ist, die die folgende Wachstumsbedingung erfüllen*

$$p_n(v^k) \leq C_n(1+k^n), \qquad k = 1,2,\ldots$$
$$p_n(w^k) \leq C_n(1+k^n), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Hierbei sind die C_n positive Konstanten.
Dies bedeutet, dass für jede m-Algebra $\mathfrak{B}$, deren Topologie durch einen Familie von Halbnormen $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist und die von zwei Elementen v' und w' erzeugt wird, die dieselben Relationen und Wachstumsbedingungen erfüllen, ein stetiger Homomorphismus $\mathfrak{T} \to \mathfrak{B}$ existiert, der v auf v' und w auf w' abbildet.

Beweis: Nach Definition ist $\mathfrak{T}$ als lokalkonvexer Vektorraum isomorph zu

$$\mathfrak{K} \oplus \mathcal{C}^\infty(S^1)$$

Wenn z den Erzeuger von $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ bezeichnet, so entspricht unter diesem linearen Isomorphismus v^n dem Element z^n und w^n dem Element z^{-n}. Die in 1.5 angegeben Halbnormen erfüllen also offensichtlich die Wachstumsbedingung.

Sei $\mathfrak{B}$ wie in der Behauptung und φ der Homomorphismus $U(v,w) \to \mathfrak{B}$, der v auf v' und w auf w' abbildet. Es genügt zu zeigen, dass φ auf $U(v,w) \cap \mathfrak{K}$ und auf $U(v,w) \cap \mathcal{C}^\infty(S^1)$ stetig ist. Da

$$\begin{aligned} p'_n(\varphi(e^{ij})) &= p'_n(v'^i w'^j - v'^{i+1}w'^{j+1}) \\ &\leq 2C'_n(1+(i+1)^n)C'_n(1+(j+1)^n) \leq C(1+i+j)^n \end{aligned}$$

mit einer neuen Konstante C, ist φ auf dem ersten Summanden stetig und die Stetigkeit auf dem zweiten ist klar. *q.e.d.*

LEMMA 6.2 *(vgl. [Cu1, 4.2]) Es existieren eindeutig bestimmte stetige Homomorphismen $\varphi, \varphi' : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$, so dass*

$$\varphi(v) = v(1-e)\otimes 1 + e\otimes v \qquad \varphi(w) = (1-e)w\otimes 1 + e\otimes w$$
$$\varphi'(v) = v(1-e)\otimes 1 + e\otimes 1 \qquad \varphi'(w) = (1-e)w\otimes 1 + e\otimes 1$$

Diese beiden Homomorphismen sind diffeotop und zwar durch eine Diffeotopie ψ_t : $\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$, $t \in [0,\pi/2]$, für die $\psi_t(x) - \varphi(x) \in \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$ für alle $t \in [0,\pi/2], x \in \mathfrak{T}$ gilt.

Beweis: Wir zeigen, dass φ und φ' beide diffeotop zu ψ sind, wo

$$\psi(v) = v\otimes 1 \qquad \psi(w) = w\otimes 1$$

Wir schreiben im folgenden Linearkombinationen von $e^{ij}\otimes x$, $0 \leq i,j \leq n-1, x \in \mathfrak{T}$ als $n\times n$-Matrizen mit Matrixelementen in $\mathfrak{T}$. Weiter schreiben wir E_n für $1 - v^n w^n = e^{00} + e^{11} + \ldots + e^{n-1,n-1}$. Mit diesen Bezeichnungen setzen wir für $t \in [0,\pi/2]$

$$u_t = (1-E_2) + \begin{pmatrix} e + \cos t\,(1-e) & \sin t\, v \\ -\sin t\, w & \cos t\, 1 \end{pmatrix}$$

$$u'_t = (1-E_2) + \begin{pmatrix} \cos t\, 1 & \sin t\, 1 \\ -\sin t\, 1 & \cos t\, 1 \end{pmatrix}$$

Sowohl u_t als auch u'_t sind offensichtlich invertierbar in $\mathfrak{T}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$. Wir zeigen nun, dass für jedes t stetige Homomorphismen $\varphi_t, \varphi'_t : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} \varphi_t(v) &= u_t\,(v\otimes 1) \qquad & \varphi_t(w) &= (w\otimes 1)\,u_t^{-1} \\ \varphi'_t(v) &= u'_t\,(v\otimes 1) \qquad & \varphi'_t(w) &= (w\otimes 1)\,u_t'^{-1} \end{aligned}$$

Seien $p_n \oplus q_n$ die Halbnormen aus 1.5, die die Topologie auf $\mathfrak{T}$ bestimmen. Wir müssen nachweisen, dass die Halbnormen $(p_n \oplus q_n) \otimes (p_n \oplus q_n)$ die Wachstumsbedingung auf den Potenzen von $u_t\,(v\otimes 1), (w\otimes 1)\,u_t^{-1}, u'_t\,(v\otimes 1)$ und $(w\otimes 1)\,u_t'^{-1}$ erfüllen.

Es ist nun aber

$$\big(u_t\,(v\otimes 1)\big)^k = u_t^{(k)}\,(v^k \otimes 1)$$

mit $u_t^{(k)} = (1-E_k)+L$, wo L eine invertierbare $k\times k$-Matrix mit Werten in $\mathfrak{T}$ ist. Man sieht sofort, dass L Summe von k^2 Elementen der Form $e^{ij}\otimes(\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2)$, $0 \le i,j \le k$ ist, mit $|\lambda_i| \le 1$, W_i Wörter in v, w der Länge $\le k+1$. Daher gilt

$$\begin{aligned} p_n \otimes (p_n \oplus q_n)(L) &\le 2k^2 C_n (1+2k^n)(k+1)^n \le C(1+k^{2n+2}) \\ (p_n \oplus q_n)\otimes(p_n\oplus q_n)\big(u_t^{(k)}\,(v^k\otimes 1)\big) &\le C(1+k^{3n+2}) \end{aligned}$$

mit einer neuen Konstante C. Die Wachstumsbedingungen für $(p_n \oplus q_n)\otimes(p_n\oplus q_n)$ auf den Potenzen von $(w\otimes 1)\,u_t^{-1}, u'_t\,(v\otimes 1)$ und $(w\otimes 1)\,u_t'^{-1}$ ergeben sich im ersten Fall genauso und in den zwei letzteren sogar einfacher.

Die Familie φ_t ergibt nun eine Diffeotopie zwischen φ und ψ und die Familie φ'_t ergibt eine Diffeotopie zwischen φ' und ψ. Wir erhalten ψ_t durch Zusammensetzen dieser beiden Diffeotopien. Die geforderte Zusatzbedingung $\psi_t(x) - \varphi(x) \in \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{T}$ ist offensichtlich erfüllt. *q.e.d.*

Wir betrachten im folgenden Funktoren E von der Kategorie der m-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen, die die folgenden (wohlbekannten) Bedingungen erfüllen:

(E1) E ist diffeotopieinvariant, d.h. die Auswertungsabbildung in einem beliebigen Punkt $t \in [0,1]$ induziert einen Isomorphismus $E(ev_t) : E(\mathfrak{A}[0,1]) \to E(\mathfrak{A})$

(E2) E ist stabil, d.h. die kanonische Inklusion $\iota : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ induziert einen Isomorphismus $E(\iota)$.

(E3) E ist halbexakt, d.h. jede linear zerfallende Erweiterung $0 \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to 0$ induziert eine kurze exakte Folge $E(\mathfrak{I}) \to E(\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{B})$

Wir erinnern daran, dass nach einer Standardkonstruktion aus der algebraischen Topologie die kurze exakte Folge in (E3) mit Hilfe von Abbildungskegeln und unter Benutzung der Eigenschaft (E1) zu einer nach links unendlichen langen exakten Folge der Form

$$\begin{aligned} \ldots \to E(\mathfrak{B}(0,1)^2) \to E(\mathfrak{I}(0,1)) \to E(\mathfrak{A}(0,1)) \\ \to E(\mathfrak{B}(0,1)) \to E(\mathfrak{I}) \to E(\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{B}) \end{aligned} \tag{11}$$

fortgesetzt werden kann, vgl. etwa [Ka] oder [Cu3].

Für eine m-Algebra $\mathfrak{A}$ seien $Q\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ und $\iota, \bar\iota : \mathfrak{A} \to Q\mathfrak{A}$ wie in 2.4 definiert. Wir bezeichnen mit $\delta : q\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ die Restriktion der Abbildung $Q\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, die $\iota(x)$ auf x und $\bar\iota(x)$ auf 0 abbildet. Das folgende Lemma ist wohlbekannt in der Kategorie der C*-Algebren, vgl. [Cu2, 3.1].

LEMMA 6.3 *Es sei E ein Funktor mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3).*

(a) Die kanonische Abbildung $id{*}0 \oplus 0{*}id{:}Q\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$, die $\iota(x)$ auf $(x,0)$ und $\bar\iota(x)$ auf $(0,x)$ abbildet, induziert einen Isomorphismus $E(Q\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{A}) \oplus E(\mathfrak{A})$.

(b) Die Abbildung $\delta : q\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ induziert einen Isomorphismus $E(\delta)$.

Beweis: (a) Man zeigt genau wie im Fall von C*-Algebren ([Cu2, 3.1]) unter Verwendung der universellen Eigenschaft des freien Produkts, dass die Komposition der angegebenen Abbildung mit der Abbildung

$$\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix} \subset M_2(Q\mathfrak{A})$$

in beide Richtungen diffeotop zu den kanonischen Einbettungen von $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$ und $Q\mathfrak{A}$ in die $2{\times}2$-Matrizen über diesen Algebren ist.
(b) Dies folgt aus folgendem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & q\mathfrak{A} & \longrightarrow & Q\mathfrak{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \delta & & \downarrow \varphi & & \downarrow \mathrm{id} & \\ 0 \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

(wo $\varphi = \mathrm{id} * 0 \oplus \pi$) in Kombination mit (a). *q.e.d.*

SATZ 6.4 *Sei $\mathfrak{T}_0$ der Kern der kanonischen stetigen Abbildung $\kappa : \mathfrak{T} \to \mathbb{C}$, die v und w auf 1 abbildet. Für jeden Funktor E mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3) und für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ gilt*

$$E(\mathfrak{T}_0 \hat\otimes \mathfrak{A}) = 0$$

Beweis: Wir betrachten erst den Fall $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ und benutzen hierzu die Homomorphismen $\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat\otimes\mathfrak{T}$ aus Lemma 6.2 und außerdem den Homomorphismus $\omega : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat\otimes\mathfrak{T}$, der v auf $v(1-e) \otimes 1$ und w auf $(1-e)w \otimes 1$ abbildet. Die Homomorphismen $\psi_t * \omega : Q\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}\hat\otimes\mathfrak{T}$ bilden $q\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{K}\hat\otimes\mathfrak{T}$ ab und ergeben durch Restriktion eine Diffeotopie

$$\omega_t : q\mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{K}\hat\otimes\mathfrak{T}$$

Nach Konstruktion von φ und φ' gilt

$$\omega_0 = \iota \circ \delta \qquad\qquad \omega_1 = \iota \circ j \circ \kappa \circ \delta$$

wobei κ wie oben, $j : \mathbb{C} \to \mathfrak{T}$ die kanonische Inklusion und $\delta : q\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ die kanonische "Auswertung"abbildung ist. siehe 6.3. Nach 6.3 ist $E(\delta) : E(q\mathfrak{T}) \to E(\mathfrak{T})$ ein Isomorphismus. Da nach (E2) außerdem auch $E(\iota)$ ein Isomorphismus ist, folgt aus

$$E(\iota \circ \delta) = E(\iota \circ j \circ \kappa \circ \delta)$$

dass $E(j) \circ E(\kappa) = E(\mathrm{id}_{\mathfrak{T}})$. Da offensichtlich $\kappa \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, sind also $E(j)$ und $E(\kappa)$ zueinander inverse Isomorphismen. Da die Erweiterung $0 \to \mathfrak{T}_0 \to \mathfrak{T} \to \mathbb{C} \to 0$ zerfällt, ergibt sich aus der langen exakten Folge (11) eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow E(\mathfrak{T}_0) \longrightarrow E(\mathfrak{T}) \xrightarrow{E(\kappa)} E(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

wobei $E(\kappa)$ ein Isomorphismus ist. Dies zeigt, dass $E(\mathfrak{T}_0) = 0$. Der allgemeine Fall $E(\mathfrak{T}_0 \hat{\otimes} \mathfrak{A})$ ergibt sich durch Tensorieren aller Homomorphismen in dem eben gegebenen Beweis mit $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$ oder durch Ersetzen von E durch $E(\,\cdot\,\hat{\otimes}\mathfrak{A})$. *q.e.d.*

Die Toeplitzerweiterung mit Ideal $\mathcal{K}_1$ und Quotienten $\mathcal{C}^1(S^1)$ wurde auch von Lafforgue untersucht. Für sie wurden in [La] Analoga zu Lemma 6.2 und Satz 6.4 bewiesen und daraus wie in [Cu1] gefolgert, dass jeder Funktor E' auf der Kategorie der Banachalgebren, der Eigenschaften analog zu (E1), E(2), E(3) hat, Bottperiodizität erfüllt. Das folgende Korollar ist ebenfalls eine Form der Bottperiodizität.

KOROLLAR 6.5 *Für jeden Funktor E auf der Kategorie der m-Algebren mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3) und für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ sind die Abbildungen $E(\varepsilon) : E(J^2\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$ und $E(\varepsilon^n) : E(J^{2n}\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$ Isomorphismen.*

Beweis: Betrachte die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & J^{2k+2}\mathfrak{A} & \longrightarrow & TJ^{2k+1}\mathfrak{A} & \longrightarrow & J^{2k+1}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{T}_0\hat{\otimes}\mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(S^1\setminus\{1\})\hat{\otimes}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & J^{2k+1}\mathfrak{A} & \longrightarrow & TJ^{2k}\mathfrak{A} & \longrightarrow & J^{2k}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon^k & \\
0 \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}[0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

und die nach (11) mit diesen Erweiterungen assoziierten langen exakten Folgen. Die Gruppen $E(T\mathfrak{A})$, $E(\mathfrak{T}_0\hat{\otimes}\mathfrak{A})$ und $E(\mathfrak{A}[0,1))$ sind trivial für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$, siehe 6.4. Außerdem ist die Inklusion $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}(0,1) \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(S^1\setminus\{1\})$ eine Diffeotopieäquivalenz (vgl. 1.1) und die Abbildung $E(\mathfrak{A}(0,1)) \to E(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(S^1\setminus\{1\}))$ ein Isomorphismus. Anwendung des 5-Lemmas zeigt dann, dass die senkrechten Pfeile auf der linken Seite unter E jeweils einen Isomorphismus induzieren, wenn dies für die Pfeile rechts der Fall ist. Die Behauptung ergibt sich dann durch Induktion nach k (mit $J^0\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ und $\varepsilon^0 = \iota$). *q.e.d.*

THEOREM 6.6 *Sei E ein kovarianter Funktor mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3). Dann kann mit jedem $h \in kk_0(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ in eindeutiger Weise ein Morphismus $E(h) : E(\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{B})$ assoziert werden, so dass $E(h_1 \cdot h_2) = E(h_2) \circ E(h_1)$ und $E(kk(\alpha)) = E(\alpha)$ für jeden Homomorphismus $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ zwischen m-Algebren.*
Die analoge Aussage gilt auch für kontravariante Funktoren.

Beweis: Sei h durch $\eta : J^{2n}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ repräsentiert. Wir setzen

$$E(h) = E(\iota)^{-1}E(\eta)E(\varepsilon^n)^{-1}$$

Zunächst einmal ist klar, dass $E(h)$ wohldefiniert ist und dass $E(kk(\alpha)) = E(\alpha)$. Die Verträglichkeit mit dem Produkt ergibt sich aus derselben Rechnung wie die im Beweis von Theorem 4.3 und ist eine Konsequenz von Lemma 4.2.
Die Eindeutigkeit schließlich ist offensichtlich. *q.e.d.*

Das vorhergehende Resultat erlaubt, wie im Fall der KK-Theorie für C*-Algebren, [Hi], [Bl] ein andere Interpretation. Hierzu bemerken wir, dass kk_0 als Kategorie aufgefasst werden kann, deren Objekte gerade die m-Algebren sind, und deren Morphismen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch $kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gegeben sind. Diese Kategorie ist additiv in dem Sinn, dass die Morphismen zwischen zwei Objekten jeweils eine abelsche Gruppe bilden und dass das Produkt von Morphismen bilinear ist.
Wir bezeichnen den natürlichen Funktor von der Kategorie der m-Algebren in die Kategorie kk_0, der auf den Objekten die Identität ist, auch mit kk_0.

KOROLLAR 6.7 *Es sei F ein Funktor von der Kategorie der m-Algebren in eine additive Kategorie, deren Objekte ebenfalls die m-Algebren sind, mit $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \cdot F(\beta)$. Wir bezeichnen diese Kategorie ebenfalls mit F und ihre Morphismen mit $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*
Wir nehmen an, dass $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in der ersten Variablen als kontravarianter Funktor und in der zweiten Variablen als kovarianter Funktor jeweils die Eigenschaften (E1), (E2), (E3) erfüllt. Dann existiert ein eindeutig bestimmter kovarianter Funktor F' von der Kategorie kk_0 in die Kategorie F, so dass $F = F' \circ kk_0$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $\varepsilon^n : J^{2n}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ für jede m-Algebra $\mathfrak{A}$ einen invertierbaren Morphismus $F(\varepsilon^n)$ induziert.
Da Links- und Rechtsmultiplikation mit $F(\cdot)$ für festgehaltene zweite oder erste Variable Funktoren in die Kategorie der abelschen Gruppen mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3) sind, existieren nach 4.5 und 6.6 Elemente x und y in $F(\mathfrak{A}, J^{2n}\mathfrak{A})$, so dass $x \cdot F(\varepsilon^n) = F(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}})$ und $F(\varepsilon^n) \cdot y = F(\mathrm{id}_{J^{2n}\mathfrak{A}})$. Da dann x und y Links- und Rechtsinverse für $F(\varepsilon^n)$ sind, sind sie gleich und invers zu $F(\varepsilon^n)$.

Ebenso sieht man, dass $\iota : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ für jede Wahl von $\mathfrak{A}$ einen invertierbaren Morphismus $E(\iota)$ induziert. Wenn jetzt $h \in kk_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ durch $\eta : J^{2n}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$ repräsentiert ist, können wir setzen

$$F'(h) = F(\iota)F(\varepsilon^n)^{-1}F(\eta)F(\iota)^{-1}$$

q.e.d.

Auf der Kategorie der m-Algebren ist also kk_0 der universelle Funktor in eine additive Kategorie mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3) in beiden Variablen. Hieraus ergibt sich als Spezialfall sofort die Existenz des bivarianten Chern-Connes-Charakters im geraden Fall. Wir fassen hierzu die bivariante periodische zyklische Theorie $HP^0(\cdot,\cdot)$ ebenso wie kk_0 als additive Kategorie, deren Objekte die m-Algebren sind, auf. Ebenso wie bei kk schreiben wir das Produkt in HP^* in der umgekehrten Reihenfoge wie bei Homomorphismen. Für einen Homomorphismus α bezeichnen wir mit $ch(\alpha)$ das entsprechende Element der bivarianten zyklischen Theorie.

KOROLLAR 6.8 *Es existiert ein eindeutig bestimmter (kovarianter) Funktor* $ch : kk_0 \to HP^0$*, so dass* $ch(kk(\alpha)) = ch(\alpha) \in HP^0(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ *für jeden Homomorphismus* $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *zwischen m-Algebren.*

Beweis: Die Eigenschaften (E1) und (E2) sind für die beiden Variablen von HP^0 seit langem bekannt und im wesentlichen schon von Connes in [Co] bewiesen. Der Nachweis von Eigenschaft (E3) gelang in [CuQu2]. *q.e.d.*

Der Chern-Connes-Charakter ch ist also eine bilineare multiplikative Transformation von kk_0 nach HP^0. Offensichtlich respektiert er auch das äußere Produkt auf kk_0 aus 4.3 (b), bzw. auf HP^0, siehe [CuQu2, p.86]. Es bleibt noch die Aufgabe, ch zu einer multiplikativen Transformation von der $\mathbb{Z}/2$-graduierten Theorie kk_* nach HP^* auszudehnen und die Verträglichkeit von ch mit der Randabbildung in den langen exakten Folgen zu untersuchen.
Wenn $E: 0 \to \mathfrak{J} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to 0$ eine linear zerfallende Erweiterung ist, schreiben wir wie in [CuQu2] δ für die Randabbildung $HP^i(\mathfrak{J},\mathfrak{D}) \to HP^{i-1}(\mathfrak{B},\mathfrak{D})$ in der ersten Variable und δ' für die Randabbildung $HP^i(\mathfrak{D},\mathfrak{B}) \to HP^{i+1}(\mathfrak{D},\mathfrak{J})$ in der zweiten Variable. Weiter schreiben wir im folgenden $1_{\mathfrak{A}}$ für $ch(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}) \in HP^0(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$.

Man rechnet leicht nach, dass $\delta'(1_{\mathfrak{B}}) = -\delta(1_{\mathfrak{J}})$, siehe [CuQu2,5.4]. Wie in [CuQu2] bezeichnen wir dieses Element von $HP^1(\mathfrak{B},\mathfrak{J})$ mit $ch(E)$.

Ein Teil des folgenden Satzes wurde in etwas anderer Weise schon in [Ni1], [Ni2] bewiesen. Der Faktor $2\pi i$ beim Vergleich der Periodizitätsabbildungen in der K-Theorie und der zyklischen Homologie wurde an verschiedenen Stellen in der Literatur bemerkt, [Co1], [Pu], [Ni1].

SATZ 6.9 *Wir betrachten die Einhängungserweiterung*

$$E_\sigma : \qquad 0 \to \mathbb{C}(0,1) \to \mathbb{C}(0,1] \to \mathbb{C} \to 0$$

und die Toeplitzerweiterung

$$E_\tau : \qquad 0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{T} \to \mathcal{C}^\infty S^1 \to 0$$

sowie die Einbettungsabbildungen $j : \mathbb{C}(0,1) \to \mathcal{C}^\infty S^1$ *und* $\iota : \mathbb{C} \to \mathfrak{K}$*. Mit dem Produkt in* HP^* *gilt die folgende fundamentale Beziehung*

$$ch(E_\sigma) \cdot ch(j) \cdot ch(E_\tau) = \frac{1}{2\pi i} ch(\iota)$$

Beweis: Wir benutzen kanonische dichte Unteralgebren von $\mathbb{C}(0,1), \mathcal{C}^\infty S^1, \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}$ sowie ihre algebraische periodische zyklische Homologie HP_*^{alg}. Außerdem benutzen wir, wenn B eine dieser Algebren ist, die Homologie $HX_*(B)$ des X-Komplexes

$$X(B): \qquad B \quad \underset{b}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \quad \Omega^1(B)_\natural$$

Wir haben zwei große kommutative Diagramme, wo die horizontalen Abbildungen alle Isomorphismen sind und die Spalten exakte Folgen mit 6 Termen

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathfrak{K}) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}(M_\infty) & \xrightarrow{\cong} & HX_*(M_\infty) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathfrak{T}) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}(U(v,w)) & \xrightarrow{\cong} & HX_*(U(v,w)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathcal{C}^\infty(S^1)) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}(\mathbb{C}[z,z^{-1}]) & \xrightarrow{\cong} & HX_*(\mathbb{C}[z,z^{-1}]) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Die Folge in der rechten Spalte ist exakt, weil M_∞ H-unital und damit $HX_*(M_\infty)$ isomorph zu der Homologie $HX_*(M_\infty : U(v,w))$ des relativen X-Komplexes ist, vgl. [Wo]. Der Isomorphismus $HP_*^{alg}(M_\infty) \cong HX_*(M_\infty)$ gilt, weil M_∞ quasifrei ist, siehe [CuQu1,5.4]. Die Abbildungen in der mittleren Zeile sind Isomorphismen nach dem 5-Lemma. Das zweite Diagramm ist das folgende

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathcal{C}_0^\infty(0,1)) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}((t-t^2)\mathbb{C}[t]) & \xrightarrow{\cong} & HX_*((t-t^2)\mathbb{C}[t] : t\mathbb{C}[t]) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathcal{C}_0^\infty(0,1]) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}(t\mathbb{C}[t]) & \xrightarrow{\cong} & HX_*(t\mathbb{C}[t]) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HP_*(\mathbb{C}) & \xleftarrow{\cong} & HP_*^{alg}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & HX_*(\mathbb{C}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Hierbei bezeichnen $\mathcal{C}_0^\infty(0,1]$ und $\mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ die Algebren der glatten Funktionen auf $[0,1]$, die bei 0, bzw. bei 0 und 1 verschwinden (ohne Bedingung an die Ableitungen) und $HX_*((t-t^2)\mathbb{C}[t] : t\mathbb{C}[t])$ bezeichnet wieder die Homologie des relativen X-Komplexes. Die Isomorphismen in der ersten Zeile gelten nach dem 5-Lemma.
Um die Randabbildungen in der Toeplitz- und Einhängungserweiterung in der Spalte ganz links zu bestimmen, genügt es daher, die Randabbildungen in der Spalte ganz rechts zu berechnen. Dies ist aber sehr einfach. Nach Definition genügt es, jeweils Urbilder für die Repräsentanten einer Klasse in dem Komplex in der Mitte zu finden und dann den Randoperator des X-Komplexes darauf anzuwenden. Dies ergibt Elemente des relativen Komplexes, die das Bild unter der Randabbildung darstellen.
Fangen wir mit dem Erzeuger von $HX_0(\mathbb{C})$ an. Er wird durch $1 \in \mathbb{C}$ repräsentiert. Ein Urbild in $X_0(t\mathbb{C}[t])$ ist t. Unter dem Randoperator d geht dies auf $\natural(dt) \in \Omega^1((t-t^2)\mathbb{C}[t] : t\mathbb{C}[t])_\natural$.
Die Klasse von $\natural(dt)$ wiederum entspricht unter den Identifizierungen

$$\begin{aligned}
HX_1((t-t^2)\mathbb{C}[t] : t\mathbb{C}[t]) \leftarrow HP_1^{alg}((t-t^2)\mathbb{C}[t]) \rightarrow HP_1(\mathcal{C}_0^\infty(0,1)^\sim) \\
\leftarrow HP_1(\mathcal{C}^\infty(S^1)) \leftarrow HX_1(\mathbb{C}[z,z^{-1}])
\end{aligned}$$

der Klasse von $\natural(\frac{1}{2\pi i} z^{-1}dz)$. In der Tat ist $z = e^{2\pi i t}$ und in den Differentialformen über S^1 ist $z^{-1}dz = 2\pi i\, dt$ (man beachte, dass $HP_1(\mathcal{C}^\infty(S^1))$ durch die de Rham

Kohomologie von S^1 gegeben ist). Ein Urbild für $\natural(z^{-1}dz)$ in $X_1(U(v,w))$ ist $\natural(wdv)$. Unter der Randabbildung des X-Komplexes wird $\natural(wdv)$ auf $b(wdv) = wv - vw = e$ abgebildet. *q.e.d.*

Für den speziellen Fall der universellen Erweiterung

$$E_u : \qquad 0 \to J\mathfrak{A} \to T\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to 0$$

setzen wir

$$x_{\mathfrak{A}} = ch(E_u) = \delta'(1_{\mathfrak{A}}) = -\delta(1_{J\mathfrak{A}}) \ \in HP^1(\mathfrak{A}, J\mathfrak{A})$$

Die Randabbildungen δ und δ' in der universellen Erweiterung sind durch Links- und Rechtsmultiplikation mit $x_{\mathfrak{A}}$ gegeben. Die Tatsache, dass δ und δ' für die universelle Erweiterung Isomorphismen sind, impliziert sofort, dass $x_{\mathfrak{A}}$ invertierbar ist (es existieren Elemente y und y' in $HP^1(J\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ so dass $\delta(y) = x_{\mathfrak{A}} \cdot y = 1_{\mathfrak{A}}$ und $\delta'(y') = y' \cdot x_{\mathfrak{A}} = 1_{J\mathfrak{A}}$). Falls δ und δ' wieder die Randabbildungen in den exakten Folgen zu einer beliebigen Erweiterung $E: \ 0 \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to 0$ sind und $\alpha : J\mathfrak{B} \to \mathfrak{I}$ die klassifizierende Abbildung, so gilt wegen der Natürlichkeit der Randabbildung, dass

$$\delta(1_{\mathfrak{I}}) = x_{\mathfrak{B}} \cdot ch(\alpha) \qquad\qquad \delta'(1_{\mathfrak{B}}) = ch(\alpha) \cdot x_{\mathfrak{B}} \tag{12}$$

d.h. also $ch(E) = x_{\mathfrak{B}} \cdot ch(\alpha)$, siehe auch [CuQu2, 5.5]. Weiter gilt für jeden Homomorphismus $\alpha : J\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

$$ch(\alpha) \cdot x_{\mathfrak{B}} \ = \ x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(J(\alpha)) \tag{13}$$

SATZ 6.10 *Sei $\varepsilon : J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ die kanonische Abbildung. Dann gilt*

$$x_{\mathfrak{A}} \cdot x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(\varepsilon) \cdot ch(\iota)^{-1} \ = \ \frac{1}{2\pi i}\, 1_{\mathfrak{A}}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$. Die Abbildung ε kann geschrieben werden als $\varepsilon = \varepsilon_2 \circ J(j) \circ J(\varepsilon_1)$, wo $\varepsilon_1 : J(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}(0,1)$ und $\varepsilon_2 : J(\mathcal{C}^\infty S^1) \to \mathfrak{K}$ die klassifizierenden Abbildungen für die Einhängungs- und für die Toeplitzerweiterung sind und $j : \mathbb{C}(0,1) \to \mathcal{C}^\infty S^1$ die Einbettungsabbildung bezeichnet. Daher

$$x_{\mathfrak{A}} \cdot x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(\varepsilon) = x_{\mathfrak{A}} \cdot ch(\varepsilon_1) \cdot ch(j) \cdot x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(\varepsilon_2) = ch(E_\sigma) \cdot ch(j) \cdot ch(E_\tau)$$

Die erste Gleichung gilt nach (13) und die zweite folgt aus (12). Die Behauptung für $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ reduziert sich daher auf Satz 6.9.

Für allgemeines $\mathfrak{A}$ gilt unter Verwendung des äußeren Produkts in HP^* (siehe [CuQu2, p.86])

$$\begin{aligned} &x_{\mathfrak{A}} \cdot x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \cdot ch(\iota_{\mathfrak{A}})^{-1} = (x_{\mathbb{C}} \otimes 1_{\mathfrak{A}}) \cdot (x_{J\mathbb{C}} \otimes 1_{\mathfrak{A}}) \cdot (ch(\varepsilon_{\mathbb{C}}) \otimes 1_{\mathfrak{A}}) \\ &= (x_{\mathbb{C}} \cdot x_{J\mathbb{C}} \cdot ch(\varepsilon_{\mathbb{C}}) \cdot ch(\iota_{\mathbb{C}})^{-1}) \otimes 1_{\mathfrak{A}} = \tfrac{1}{2\pi i}\, 1_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

q.e.d.

Sei jetzt u ein Element in $kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nach Definition ist $kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = kk_0(J\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Sei u_0 das Element in $kk_0(J\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, das u entspricht. Wir setzen

$$ch(u) = \sqrt{2\pi i}\, x_{\mathfrak{A}} \cdot ch(u_0) \qquad \in\ HP^1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

SATZ 6.11 *Der so definierte Chern-Connes-Charakter ist multiplikativ, d.h. für* $u \in kk_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *und* $v \in kk_j(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ *gilt*

$$ch(u \cdot v) = ch(u) \cdot ch(v)$$

Beweis: Der einzig wirklich neue Fall ist $i = j = 1$. Wir haben nach Lemma 6.9

$$ch(u) \cdot ch(v) = 2\pi i\, x_{\mathfrak{A}} \cdot ch(u_0) \cdot x_{\mathfrak{B}} \cdot ch(v_0) = 2\pi i\, x_{\mathfrak{A}} \cdot x_{J\mathfrak{A}} \cdot ch(J(u_0)) \cdot ch(v_0)$$

und andererseits nach Definition von ch im geraden Fall

$$ch(u \cdot v) = ch(\iota) \cdot ch(\varepsilon)^{-1} \cdot ch(J(u_0) \cdot v_0)$$

Die beiden Ausdrücke stimmen nach Satz 6.10 überein. *q.e.d.*

Insbesondere ist der Chern-Connes-Charakter auch mit den Randabbildungen in den langen exakten Folgen in kk_* und HP^*, die mit einer linear zerfallenden Erweiterung

$$(E) \qquad 0 \to \mathfrak{J} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to 0$$

von m-Algebren assoziiert sind, (bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi i}$ und möglicherweise ein Vorzeichen) verträglich: Die klassifizierende Abbildung $J\mathfrak{B} \to \mathfrak{J}$ ergibt Elemente $kk(E) \in kk_1(\mathfrak{B}, \mathfrak{J})$ und $ch(E) \in HP^1(\mathfrak{B}, \mathfrak{J})$. Nach Definition gilt $\sqrt{2\pi i} ch(E) = ch(kk(E))$. Die Randabbildungen in den langen exakten Folgen in kk und HP sind laut Theorem 5.5 und [CuQu, 5.5] bis auf ein Vorzeichen durch Multiplikation mit $kk_1(E)$ bzw. $ch(E)$ gegeben.

Wir diskutieren jetzt zum Schluss noch den Zusammenhang mit dem Chern-Connes-Charakter, der für p-summierbare Fredholm- und Kasparovmoduln von Connes, Nistor und anderen konstruiert wurde, [Co], [Ni1].

SATZ 6.12 *Gegeben seien m-Algebren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$. Wir nehmen an, dass stetige Abbildungen $\alpha : \mathfrak{J} \to \mathfrak{A}$ und $\mu : \mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{A} \to \mathfrak{J}$ mit folgenden Eigenschaften existieren:*

(a) $\alpha \circ \mu$ ist die Multiplikation auf $\mathfrak{A}$

(b) $\mu \circ (\alpha \otimes \alpha)$ ist die Multiplikation auf $\mathfrak{J}$

(insbesondere ist also $\alpha(\mathfrak{J})$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^2 \subset \alpha(\mathfrak{J})$). Dann ist $kk(\alpha)$ ein invertierbares Element in $kk_0(\mathfrak{J}, \mathfrak{A})$.

Beweis: Das Inverse zu $kk(\alpha)$ ist durch die Zusammensetzung der Toeplitzerweiterung mit der folgenden Erweiterung bestimmt

$$0 \to \mathfrak{J}(0,1) \to \mathfrak{J}(0,1) + \mathfrak{A}t \to \mathfrak{A} \to 0 \tag{14}$$

Die m-Algebra $\mathfrak{J}(0,1)+\mathfrak{A}t$ ist folgendermaßen definiert. Als lokalkonvexer Vektorraum ist sie einfach die direkte Summe von $\mathfrak{J}(0,1)$ und $\mathfrak{A}$. Das Symbol t bezeichnet die identische Funktion auf $[0,1]$. Die Elemente von $\mathfrak{A}t$ werden als Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathfrak{A}$, die Vielfache dieser Funktion mit Elementen von $\mathfrak{A}$ sind, aufgefasst. Die Multiplikation auf dem ersten Summanden ist die von $\mathfrak{I}(0,1)$. Das Produkt einer Funktion f in $\mathfrak{I}(0,1)$ mit einem Element $xt \in \mathfrak{A}t$ ist $\mu(\alpha(f) \otimes xt)$ (wir setzen hier μ und α kanonisch auf Funktionen fort). Das Produkt von xt und yt in dem zweiten Faktor ist definiert als $\mu(x \otimes y)(t^2 - t) + \alpha\mu(x \otimes y)t$, wobei der erste Summand in $\mathfrak{I}(0,1)$ und der zweite in $\mathfrak{A}t$ liegt. Man prüft sofort nach, dass mit diesen Definitionen $\mathfrak{I}(0,1) + \mathfrak{A}t$ eine m-Algebra ist.

Die Erweiterung (14) ist dann offensichtlich linear zerfallend und definiert ein Element u in $kk_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{I}(0,1))$. Wir müssen nachweisen, dass das Produkt von u mit α in beide Richtungen die kanonischen Abbildungen $J\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(0,1)$ und $J\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}(0,1)$ ergibt. Betrachte hierzu das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1] & \longrightarrow & \mathfrak{I} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \mathrm{id} + \alpha & & \downarrow \alpha & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{I}(0,1) + \mathfrak{A}t & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{A}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A}(0,1] & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Man beachte, dass die in der offensichtlichen Weise definierte Abbildung $\mathrm{id} + \alpha$ nach Bedingung (b) ein Homomorphismus ist. Der obere Teil des Diagramms zeigt nach Lemma 3.3, dass das Produkt $kk(\alpha) \cdot u$ durch die Einhängungserweiterung von $\mathfrak{I}$ repräsentiert wird, während der untere Teil zeigt, dass $u \cdot kk(\alpha)$ die Einhängungserweiterung von $\mathfrak{A}$ ist. *q.e.d.*

Wir können dieses Resultat nun anwenden auf die Schattenideale $\ell^p = \ell^p(H)$. Betrachte allgemeiner den Fall, wo $\mathfrak{I} = \ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} = \ell^q \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ für eine beliebige m-Algebra $\mathfrak{B}$ und $p \leq q \leq 2p$. Die Abbildungen α und μ ergeben sich durch die Inklusion $\ell^p \to \ell^q$ und die Multiplikationsabbildung $\ell^q \hat{\otimes} \ell^q \to \ell^p$.

Satz 6.11 zeigt, dass $\ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ und $\ell^q \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ äquivalent in kk_0 und damit auch in HP^0 sind. Durch Iteration ist $\ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ äquivalent zu $\ell^1 \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ für jedes $p \geq 1$. Andererseits ist $\ell^1 \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ in HP_0 äquivalent zu $\mathfrak{B}$, siehe etwa [Ga]. Wir erhalten also

KOROLLAR 6.13 *Die m-Algebra $\ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ ist in HP_0 äquivalent zu $\mathfrak{B}$ für jedes $p \geq 1$. Der Chern-Connes-Charakter gibt eine Transformation $ch^{(p)} : kk_*(\mathfrak{A}, \ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}) \to HP^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mit der Eigenschaft, dass*

$$ch^{(p)}(x \cdot kk(\iota^{(p)})) = ch(x) \qquad \textit{für } x \in kk_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

wo $\iota^{(p)}$ die kanonische Inklusion $\mathfrak{B} \to \ell^p \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ bezeichnet.

Durch Vergleich der funktoriellen Eigenschaften [Ni1, Theorem 3.5] sieht man ohne weiteres, dass dieser Chern-Connes-Charakter mit dem von Connes und Nistor konstruierten Charakter übereinstimmen muß.

7 Vergleich mit der topologischen K-Theorie

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Spezialfall des Funktors kk, wo die erste Variable trivial ist, d.h. also $kk_*(\mathbb{C},\cdot)$. Wir zeigen, dass dieser Funktor mit der topologischen K-Theorie übereinstimmt - im wesentlichen, wann immer diese definiert ist. Dazu benutzen wir die von Phillips eingeführte Theorie [Ph], die die topologische K-Theorie für die bisher wohl größte Klasse von lokalkonvexen Algebren, nämlich für m-Algebren, die gleichzeitig Fréchetalgebren sind, definiert. Dies hat für uns den Vorteil, dass diese Theorie es erlaubt, den Funktor K_* direkt auch auf Algebren vom Typ $J^n\mathbb{C}$ usw., die die Grundlage unserer Theorie bilden, anzuwenden. Dies vereinfacht den Beweis für Theorem 7.4 (selbst im Fall $\mathfrak{A}=\mathbb{C}$) bedeutend. Wir skizzieren am Ende des Abschnitts kurz, wie Theorem 7.4 ohne Verwendung der Theorie von Phillips für spezielle Fréchetalgebren, nämlich abgeleitete Unteralgebren von Banachalgebren bewiesen werden kann. Damit erhält man einen neuen Zugang zur K-Theorie von m-Algebren, indem man einfach $K_*(\mathfrak{A})=kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ setzt.

Wie Phillips verstehen wir in dieser Arbeit unter Fréchetalgebren immer Fréchetalgebren, die auch m-Algebren sind, d.h. also vollständige lokalkonvexe Algebren, deren Topologie durch eine abzählbare Familie von submultiplikativen Halbnormen bestimmt ist.

Mit einer Fréchetalgebra $\mathfrak{A}$ assoziiert Phillips in [Ph] die folgende abelsche Gruppe:

$$\begin{aligned} K_0(\mathfrak{A}) = \{\, [e] \,|\, & e \text{ ist ein idempotentes Element in} \\ & M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim) \text{ so dass } e - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})\} \end{aligned} \tag{15}$$

Hierbei bezeichnet, wie üblich $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim$ die Algebra, die man erhält, wenn man zu $\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ eine Eins adjungiert.

Phillips verwendet die Bezeichnung "RK_0" für diese Gruppe. Uns erscheint die Bezeichnung K_0 angemessener, da diese Theorie die übliche topologische K-Theorie von der Kategorie der Banachalgebren auf die der Fréchetalgebren verallgemeinert. Wir setzen auch $K_1(\mathfrak{A})=K_0(\mathfrak{A}(0,1))$

In (15) bezeichnet $[e]$ die Homotopieklasse von e. In [Ph] wird gezeigt, dass zwei idempotente Elemente e und e' in $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim)$, wie sie in (15) betrachtet werden, homotop sind, genau dann, wenn sie konjugiert und damit auch diffeotop sind. Wir können also in (15) die Homotopieklasse $[e]$ durch die Diffeotopieklasse $\langle e\rangle$ ersetzen. Weiter wird in [Ph] gezeigt, dass der Funktor K_*, $*=0,1$ auf der Kategorie der Fréchetalgebren die folgenden Eigenschaften hat:

(a) K_* ist diffeotopie- und homotopieinvariant

(b) K_* ist stabil in dem Sinn, dass für jede Fréchetalgebra $\mathfrak{A}$ die Inklusionsabbildung $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\hat{\otimes}\mathfrak{K}$ einen Isomorphismus in der K-Theorie induziert.

(c) Jede Erweiterung

$$0\to\mathfrak{I}\xrightarrow{i}\mathfrak{A}\xrightarrow{q}\mathfrak{B}\to 0$$

von Fréchetalgebren (d.h. die Folge ist exakt und q ist eine Quotientenabbildung) induziert exakte Folgen in K_* der folgenden Form:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathfrak{J}) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{K_0(q)} & K_0(\mathfrak{B}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathfrak{B}) & \xleftarrow{K_1(q)} & K_1(\mathfrak{A}) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(\mathfrak{J}) \end{array}$$

(d) Falls $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra ist, so stimmt $K_*(\mathfrak{A})$ mit der üblichen topologischen K-Theorie von $\mathfrak{A}$ überein.

Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf [Ph].

Wir betrachten jetzt die Algebra $Q\mathbb{C}$ und bezeichnen mit $e, \bar{e}$ die beiden Erzeuger $e = \iota(1), \bar{e} = \iota(1))$. Nach 6.3 gilt $\mathbb{Z} \cong K_0(q\mathbb{C}) \subset K_0(Q\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}^2$. Der Erzeuger von $K_0(q\mathbb{C})$ ist mit der oben angegebenen Definition von K_0 für Fréchetalgebren gegeben durch die Diffeotopieklasse des idempotenten Elements p in $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C}^{\sim})$:

$$p = W \begin{pmatrix} \bar{e}^{\perp} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} W \qquad \text{wo} \qquad W = \begin{pmatrix} \bar{e}^{\perp} & \bar{e} \\ \bar{e} & \bar{e}^{\perp} \end{pmatrix}$$

mit $\bar{e}^{\perp} = 1 - \bar{e}$. Wir setzen auch

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass $p - \bar{p} \in M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C}) \subset M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}Q\mathbb{C}^{\sim})$ und dass daher $[p] - [\bar{p}] \in K_0(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C}) \subset K_0(\mathfrak{K}\hat{\otimes}Q\mathbb{C})$.

LEMMA 7.1 *Es sei $\varphi : q\mathbb{C} \to M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C})$ die Einschränkung des Homomorphismus $Q\mathbb{C} \to M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}Q\mathbb{C}^{\sim})$, der e auf p und $\bar{e}$ auf $\bar{p}$ abbildet. Dann ist φ diffeotop zu der Inklusionsabbildung $\iota : q\mathbb{C} \to M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C})$.*

Beweis: Sei $\gamma_t : q\mathbb{C} \to M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C}), t \in [0, \pi/2]$ die Einschränkung des Homomorphismus $\gamma_t' : Q\mathbb{C} \to M_2((\mathfrak{K}\hat{\otimes}Q\mathbb{C})^{\sim})$ der durch

$$\gamma_t'(e) = W_t \begin{pmatrix} \bar{e}^{\perp} & o \\ 0 & e \end{pmatrix} W_{-t}$$

$$\gamma_t'(\bar{e}) = W_t \begin{pmatrix} \bar{e}^{\perp} & 0 \\ 0 & \bar{e} \end{pmatrix} W_{-t}$$

gegeben ist, wo

$$W_t = \begin{pmatrix} \bar{e}^{\perp} & 0 \\ 0 & \bar{e}^{\perp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{e}\cos t & \bar{e}\sin t \\ -\bar{e}\sin t & \bar{e}\cos t \end{pmatrix}$$

Für jedes t liegt die Differenz $\gamma_t'(e) - \gamma_t'(\bar{e})$ in dem Ideal $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathbb{C}))$. Daher definiert γ_t eine Diffeotopie, die φ mit ι verbindet. *q.e.d.*

SATZ 7.2 *Für jede Fréchetalgebra $\mathfrak{A}$ gilt*

$$K_0(\mathfrak{A}) \cong \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}\rangle$$

Beweis: Wir definieren die Abbildung $\theta : \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}\rangle \to K_0(\mathfrak{A})$ in der folgenden Weise: Sei $\eta : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ ein stetiger Homomorphismus. Wir bezeichnen mit z den Erzeuger von $K_0(q\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ und setzen $\theta(\langle\eta\rangle) = K_0(\eta)(z)$. Wir zeigen, dass θ surjektiv und injektiv ist.

Die Surjektivität ist offensichtlich, da jedes Element w von $K_0\mathfrak{A}$ nach Definition durch ein idempotentes Element r in $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim)$ gegeben ist und daher einen Homomorphismus $\hat{\eta} : Q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim$ bestimmt, der e auf r und $\bar{e}$ auf $\bar{p}$ ($\bar{p}$ wie oben) abbildet. Die durch $\hat{\eta}$ induzierte Abbildung bildet die durch e und $\bar{e}$ bestimmten Klassen u und $\bar{u}$ in $K_0(Q\mathbb{C})$ auf $[r]$ und $[\bar{p}]$ in $K_0(\mathfrak{A})$ ab. Wenn daher η die Einschränkung von $\hat{\eta}$ auf $q\mathbb{C}$ bezeichnet, so bildet $K_0(\eta)$ den Erzeuger $z = u - \bar{u}$ von $K_0(q\mathbb{C}) \subset K_0(Q\mathbb{C})$ auf $[r] - [\bar{p}] = [r] \in K_0(\mathfrak{A})$ ab.

Um die Injektivität zu beweisen, benutzen wir Lemma 7.1. Nehmen wir an, dass $\eta_1, \eta_2 : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ Homomorphismen sind, so dass $K_0(\eta_1)(z) = K_0(\eta_2)(z)$. Das bedeutet, dass die Bilder r_1 und r_2 des vor 7.1 definierten Idempotenten p unter $M_2(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\eta_1^\sim)$ und $M_2(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\eta_2^\sim)$ in $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}^\sim)$ konjugiert durch ein invertierbares Element w sind. Dieses Element w kann sogar durch eine differenzierbare Familie $w_t, t \in [0,1]$ mit 1 verbunden werden, so dass $1 - w_t \in M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})$ für alle t.

Es seien nun $\eta_1', \eta_2' : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ die Homomorphismen $q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$, die durch Einschränkung der Abbildungen von $Q\mathbb{C}$, die e auf r_1 bzw. r_2 und $\bar{e}$ auf $\bar{p}$ abbilden, entstehen. Nach Lemma 7.1 ist $\eta_1' = M_2(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\eta_1^\sim) \circ \varphi$ diffeotop zu $\eta_1 = M_2(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\eta_1^\sim) \circ \iota$ und η_2' diffeotop zu η_2. Andererseits definiert die Familie $\psi_t, t \in [0,1]$ von Homomorphismen $q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$, die durch Einschränkung der Abbildungen von $Q\mathbb{C}$, die e auf $w_t r_1 w_{-t}$ entstehen, eine Diffeotopie, die η_1' mit η_2' verbindet. *q.e.d.*

Für eine beliebige m-Algebra $\mathfrak{A}$ hatten wir in 2.5 die folgende linear zerfallende Erweiterung betrachtet:

$$0 \to q\mathfrak{A}(0,1) \to \mathfrak{E} \to \mathfrak{A} \to 0$$

Wenn wir die klassifizierende Abbildung $J\mathfrak{A} \to q\mathfrak{A}(0,1)$ mit der Toeplitzerweiterung

$$0 \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathfrak{A} \to \mathfrak{T}_0\hat{\otimes}q\mathfrak{A} \to q\mathfrak{A}(0,1) \to 0$$

kombinieren, so erhalten wir eine Abbildung $\varepsilon' : J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}q\mathfrak{A}$.

LEMMA 7.3 *Sei $\delta : q\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ die kanonische Auswertungsabbildung (mit den Bezeichnungen von 1.3 ist δ die Restriktion von $id * 0$). Dann ist die Komposition $(id_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\delta) \circ \varepsilon'$ diffeotop zu $\varepsilon : J^2\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$.*

Beweis: Dies ergibt sich mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & q\mathfrak{A}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \delta(0,1) & & \downarrow \psi & & \| & \\
0 \longrightarrow & \mathfrak{A}(0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{A}[0,1] & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

wo ψ die Restriktion von $(\mathrm{id} * 0)[0,1] : Q\mathfrak{A}[0,1] \to \mathfrak{A}[0,1]$ auf $\mathfrak{E} \subset Q\mathfrak{A}[0,1]$ ist. *q.e.d.*

THEOREM 7.4 *Für jede Fréchetalgebra $\mathfrak{A}$ sind die Gruppen $kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ und $K_*\mathfrak{A}$ natürlich isomorph.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $* = 0$. Der Fall $* = 1$ ergibt sich durch Ersetzung von $\mathfrak{A}$ durch die Einhängung $\mathfrak{A}(0,1)$.

Die Existenz der gewünschten Abbildung $kk_*(\mathbb{C},\mathfrak{A}) \to K_*\mathfrak{A}$ ergibt sich für $* = 0$ als Spezialfall aus 6.5. Um den Isomorphismus zu beweisen, müssen wir aber die Abbildung in systematischer Weise explizit konstruieren.
Nach Korollar 6.5 ist $K_0(\varepsilon) : K_0(J^{2n}\mathbb{C}) \to K_0(\mathbb{C})$ ein Isomorphismus. Aus Satz 7.2 erhalten wir also $\mathbb{Z} \cong K_0(\mathbb{C}) \cong K_0(J^{2n}\mathbb{C}) \cong \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^{2n}\mathbb{C}\rangle$, wobei der zweite Isomorphismus durch ε induziert ist. Sei dann

$$\beta_n : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^{2n}\mathbb{C}$$

der bis auf Diffeotopie eindeutig bestimmte Homomorphismus, der dem Erzeuger von $\mathbb{Z}$ unter diesem Isomorphismus entspricht, d.h. $\langle\beta_n\rangle = K_0(\varepsilon^n)^{-1}(1)$.

Andererseits sei $\alpha_n : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} q\mathbb{C}$ der Homomorphismus, der sich durch Komposition von $\varepsilon^{n-1} : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^2\mathbb{C}$ mit der Abbildung $\varepsilon' : \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^2\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} q\mathbb{C}$ aus Lemma 7.3 ergibt.

Lemma 7.3 zeigt dann, dass $(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\delta) \circ \alpha_n$ diffeotop zu ε^n ist.

Nach Lemma 6.3(b) ist $K_0(\delta) : K_0(q\mathbb{C}) \to K_0\mathbb{C}$ ein Isomorphismus. Da

$$K_0(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\hat{\otimes}\delta) \circ K_0(\alpha_n) \circ K_0(\beta_n)$$

nach Konstruktion der Isomorphismus $K_0(\delta) : K_0(q\mathbb{C}) \to K_0\mathbb{C}$ ist, folgt daher nach Satz 7.2, dass $\alpha_n \circ \beta_n$ diffeotop zur Inklusion $\iota : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} q\mathbb{C}$ ist und dass $\varepsilon^n \circ \beta_n$ diffeotop zu $\iota \circ \delta : q\mathbb{C} \to \mathfrak{K}$ ist.

Wir können jetzt die Isomorphismen zwischen $kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ und $K_0\mathfrak{A}$ in beide Richtungen explizit angeben. Die Abbildung $\alpha^T : K_0\mathfrak{A} \to kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ bildet $\langle\gamma\rangle \in \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}\rangle$ auf die Klasse von $(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}} \otimes \gamma) \circ \alpha_n : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} A$ in $kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ ab. Die umgekehrte Abbildung $\beta^T : kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A}) \to K_0\mathfrak{A}$ ist folgendermaßen definiert: Sei $\eta : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ ein Repräsentant für ein Element h in $kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A})$. Wir setzen dann $\beta^T(h) = \langle\eta\circ\beta_n\rangle \in \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}\rangle$. Nach Konstruktion von β_n hängt diese Diffeotopieklasse nicht von der Auswahl des Repräsentanten η ab, und $\beta^T(h)$ ist daher wohldefiniert. Aus der obigen Diskussion folgt sofort, dass $\beta^T \circ \alpha^T = \mathrm{id}$.

Um die Komposition $\alpha^T \circ \beta^T$ zu berechnen. benutzen wir wieder das Hauptlemma 3.10 und sein Korollar 3.11, d.h. im Grund das Produkt in kk. Sei h ein Element von $kk_0(\mathbb{C},\mathfrak{A})$, das durch einen Homomorphismus $\eta : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ repräsentiert ist. Nach Korollar 3.11 sind die folgenden beiden Kompositionen diffeotop

$$(\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\otimes\eta) \circ \varepsilon^n \circ J^{2n}((\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\otimes\beta_n) \circ \alpha_n) \sim (\mathrm{id}_{\mathfrak{K}}\otimes\eta)((\mathrm{id}_{\mathfrak{K}} \otimes \varepsilon^n) \circ \beta_n \circ \alpha_n)_{2n}$$

(unter Verwendung der Bezeichnungsweise $\psi_j : J^{j+k}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^j\mathfrak{B}$ für $\psi : J^k\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}$, die vor Lemma 4.2 eingeführt wurde). Da $\varepsilon^n \circ J^{2n}(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon^n$ für alle φ, repräsentiert die erste Komposition $\alpha^T \circ \beta^T(h)$. Da andererseits $\varepsilon^n : J^{2n}(J^{2n}\mathbb{C}) \to \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^{2n}\mathbb{C}$, wieder nach Korollar 3.11, diffeotop zu $(\varepsilon^n)_n$ ist und weil $\varepsilon^n \circ \beta_n \circ \alpha_n \sim \varepsilon^n$, repräsentiert die zweite Komposition gerade h. Damit ist gezeigt, dass $\alpha^T \circ \beta^T = \mathrm{id}$.
q.e.d.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann Theorem 7.4 für abgeleitete Unteralgebren von Banachalgebren (im Sinn von 1.6) ohne Verwendung der Theorie von Phillips direkt bewiesen werden. Wir skizzieren kurz, wie man vorzugehen hat.

Die Topologie auf $J^{2n}\mathbb{C}$ ist gegeben durch die Familie von submultiplikativen Normen, die auf $T^{2n}\mathbb{C}$ durch die Vielfachen der kanonischen Norm auf $\mathbb{C}$ induziert werden. Jeder stetige Homomorphismus φ von $J^{2n}\mathbb{C}$ in eine abgeleitete Unteralgebra einer Banachalgebra A ist stetig für eine dieser Normen und setzt sich daher auf die entsprechende Vervollständigung B von $J^{2n}\mathbb{C}$ fort. Nach Lemma 1.6.5 ist φ dann auf einer abgeleiteten Unteralgebra $\mathfrak{B}$ von B definiert. Die K-Theorie dieser abgeleiteten Unteralgebra ist wohldefiniert und stimmt mit der von B überein.

Insbesondere kann das auf den stetigen Homomorphismus $\varepsilon : J^{2n}\mathbb{C} \to \mathfrak{K}$ angewendet werden und wie in Korollar 6.5 sieht man sofort, dass ε einen Isomorphismus $K_0(\mathfrak{B}) \to K_0(\mathfrak{K})$ induziert.

Der Beweis von Satz 7.4 benutzt nur die Definition der K-Theorie durch Diffeotopieklassen von Idempotenten in $M_2(\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A})^\sim$, die für abgeleitete Unteralgebren in derselben Form gilt.

Schließlich können Homomorphismen von $q\mathbb{C}$ ebenso behandelt werden wie die von $J^{2n}\mathbb{C}$ und auf abgeleitete Unteralgebren von Banachalgebravervollständigungen fortgesetzt werden. Die Homomorphismen α_n und β_n im Beweis zu Theorem 7.4 können dann als Homomorphismen zwischen solchen Vervollständigungen (die aber von dem gegebenen Homomorphismus η abhängen) konstruiert werden.

8 Vergleich der Filtrierungen in kk und HP.

Für beliebige m-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt $kk_0(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = kk_0(\mathfrak{A}, J^2\mathfrak{B})$, vgl. 4.5, und $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle \cong \langle\mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$ (als Konsequenz aus 1.4.1). Hieraus ergibt sich die folgende alternative Definition von kk_0

$$kk_0(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ m}} \big(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} \langle \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^{2n}\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}J^{2m}\mathfrak{B}\rangle\big)$$

Damit erhalten wir eine sehr einfache Beschreibung des Produkts in kk_0, das nämlich genau wie das Produkt von Morphismen zwischen Pro-Objekten definiert ist. Die Wohldefiniertheit und Assoziativität des Produkts ist dann völlig offensichtlich.
Die obige Beschreibung von kk_0 ist nun aber auch formal fast genau analog zur Definition der bivarianten periodischen zyklischen Homologie. Wir erinnern daran, dass diese in der folgenden Weise definiert werden kann

$$HP^*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})) = H_*\Big(\lim_{\substack{\longleftarrow \\ m}} \big(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} Hom(X(J\mathfrak{A})^n, X(J\mathfrak{B})^m)\big)\Big)$$

siehe [CuQu2,3.2]. Der wichtigste Unterschied in den Formeln für kk_0 und HP^* ist die Tatsache, dass einmal die durch Iteration des J-Funktors erhaltenen Algebren $J^n\mathfrak{A}$ und $J^m\mathfrak{B}$ benutzt werden und das andere Mal die Potenzen $(J\mathfrak{A})^n$ und $(J\mathfrak{B})^m$.
Wenden wir uns jetzt wieder der Definition von $kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, wie sie in 4.1 gegeben wurde, zu. Diese führt unmittelbar zu einer natürlichen aufsteigenden Filtrierung

durch die Bilder von $\langle J^{2n+*}\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$ in

$$kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \varinjlim_n \langle J^{2n+*}\mathfrak{A}, \mathfrak{K}\hat{\otimes}\mathfrak{B}\rangle$$

Auf der anderen Seite besitzt die periodische zyklische Kohomologie $HP^*(\mathfrak{A})$ und das Bild der bivarianten Jones-Kassel Theorie in $HP^*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ eine natürliche Filtrierung durch die Bilder von HC^n. Da die Filtrierungen von kk_* und HP^* beide mit dem Produkt verträglich sind, und der Chern-Connes-Charakter multiplikativ ist, werden die Filtrierungen unter dem Charakter wenigstens teilweise erhalten. Man kann etwa eine Unterhalbgruppe $ext_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ von $kk_*(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ einführen, die aus allen Yonedaprodukten von Erweiterungen von dem Typ, wie sie in [Ni1] betrachtet werden, besteht. Diese Unterhalbgruppe trägt eine natürliche Filtrierung. Die Konstruktion aus [Ni1] zeigt, dass die Filtrierung unter dem Chern-Connes-Charakter erhalten wird.
Für beliebige Element von kk andererseits zeigt Satz 6.12 durch Iteration, dass eine natürliche Abbildung $J^{2p+1}\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}\hat{\otimes}(J\mathfrak{A})^{2^p}$ existiert. Dies legt nahe, dass im allgemeinen in gewissem Sinn die Ordnung der Filtrierung auf kk dem Logarithmus der Ordnung der Filtrierung auf HP^*, d.h. dem Logarithmus der Dimension entspricht. Eine genauere Untersuchung bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.
Als letztes bemerken wir, dass auch bei der Definition der K-Theorie noch interessante Variationen möglich sind. Wir können etwa setzen

$$k_n(\mathfrak{A}) = \varinjlim_k \langle J^{k-n}\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^k\mathfrak{A}\rangle$$

Ein Argument wie im Beweis zu Theorem 7.4 zeigt, dass für $n \geq 1$ jeweils

$$\langle J^{2k+2n}\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^{2k}\mathfrak{A}\rangle = \langle q\mathbb{C}, \mathfrak{K}\hat{\otimes} J^{2k}\mathfrak{A}\rangle = K_{2n}(\mathfrak{A})$$

Für negative n ist also k_n periodisch und stimmt mit der K-Theorie überein. Für positive n ergibt sich eine Art konnektiver K-Theorie, vgl. [Se], [Ro] mit einer Periodizitätsabbildung $k_n(\mathfrak{A}) \to k_{n-2}(\mathfrak{A})$, die durch ε induziert wird.

Literatur

[Bl] B.Blackadar: K-theory for Operator Algebras, Springer-Verlag, Heidelberg / Berlin / New York / Tokyo, 1986.

[BlCu] B. Blackadar und J. Cuntz: Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C^*-algebras, J. Operator Theory 26 (1991), 255-282.

[Bo] J.-B.Bost: Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non-commutatifs, Invent. Math. 101, 261 - 333 (1990).

[BDF] L.G.Brown, R.G.Douglas und P.Fillmore: Extensions of C*-algebras and K-homology, Ann. of Math. 105 (1977), 265-324.

[Co1] A. Connes: Non-commutative differential geometry. Publ. Math. I.H.E.S. 62 (1985), 257-360.

[Co2] A. Connes: Non-commutative Geometry, Academic Press, London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1994.

[CoHi] A. Connes und N.Higson: Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante, C.R.Acad.Sci. Paris Ser. I, Math, 311 (1990), 101-106.

[CoMo] A. Connes und H. Moscovici: Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, Topology, 29 (1990), 345-388.

[Cu1] J. Cuntz: K-theory and C*-algebras, in "Algebraic K-theory, Number theory, Geometry and Analysis", Springer Lecture Notes in Math. 1046, 55-79.

[Cu2] J. Cuntz: A new look at KK-theory, K-theory 1 (1987), 31-52.

[Cu3] J. Cuntz: A survey of some aspects of non-commutative geometry, Jber. d. Dt. Math.-Verein. 95 (1993) 60-84.

[Cu4] J. Cuntz: Excision in bivariant cyclic theory for topological algebras, Proc. Workshop on Cyclic Cohomology and Noncommutative Geometry, Fields Institute, wird erscheinen.

[CuQu1] J. Cuntz und D. Quillen: Cyclic homology and nonsingularity, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 373-442.

[CuQu2] J. Cuntz und D. Quillen: Excision in bivariant periodic cyclic cohomology, Invent. math. 127 (1997), 67-98.

[DoVo] R.G.Douglas und D.Voiculescu: On the smoothness of sphere extensions, J.Operator theory 6 (1981), 103-111.

[ENN] G.A.Elliott, T.Natsume und R.Nest: Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products, Acta Math. 160 (1988), 285-305.

[Ga] Gauvrit: Cyclic cohomology for Schatten ideals, preprint.

[Gr] A.Grothendieck: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[Hi] N.Higson: On Kasparov theory, M.A. thesis, Dalhousie University, 1983.

[JoKa] J.D.S.Jones und C.Kassel: Bivariant cyclic theory, K-theory 3 (1989), 339-366.

[Ka] G. G. Kasparov: The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 44 (1980), 571-636

[Ks] C.Kassel: Caractère de Chern bivariant, K-theory 3, 367 - 400 (1989)

[La] V.Lafforgue: private Mitteilung

[Lo] J.-L.Loday: Cyclic Homology, Grundlehren 301, Springer Verlag, 1992.

[Mi] E. A. Michael: Locally multiplicatively-convex topological algebras, Memoirs of the AMS, number 11, 1952.

[Ni1] V.Nistor: A bivariant Chern-Connes character, Ann. of Math. 138, 555 - 590 (1993).

[Ni2] V.Nistor: On the Cuntz-Quillen boundary map, preprint 1994 / Higher index theorems and the boundary map in cyclic cohomology, preprint 1997.

[Ph] C.Phillips: K-theory for Fréchet algebras, International Journal of Mathematics vol. 2 no. 1 (1991), 77 - 129.

[Ro] J.Rosenberg: The role of K-theory in noncommutative algebraic topology, Operator algebras and K-theory, Contemp. Math. 10, Amer. math. Soc. 1982, 155 - 182.

[Se] G.Segal: K-homology theory and algebraic K-theory, K-theory and Operator algebras, Lecture Notes in Math. 575, 113 - 127.

[Sk] G.Skandalis: Une notion de nucléarité en K-théorie, K-theory 1 (1988), 549-573.

[T] F.Treves: Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, London, 1967.

[Pu] M.Puschnigg: Asymptotic cyclic cohomology, Lecture Notes in Mathematics 1642, Springer 1996.

[Wa] L. Waelbroeck: Topological vector spaces and algebras, Lecture Notes in Math. 230, Springer-Verlag; 1971.

[Wa] X.Wang: A bivariant Chern character, Can. J. Math. 35, 1 - 36 (1992).

[We], J.Weidner: KK-groups for generalized operator algebras I, K-theory 3 (1989), 57-77.

[Wo] M.Wodzicki: Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory, Ann. of Math. 129 (1989), 591-639.

[Ze] R.Zekri: A new description of Kasparov's theory of C*-algebra extensions, J. Functional Analysis 84 (1989), 441 - 471.

Joachim Cuntz
Mathematisches Institut
der Universität
Im Neuenheimer Feld 288
69120 Heidelberg
Germany
cuntz@math.uni-heidelberg.de