Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 44 (2003), No. 2, 581-603.

# Contraction de $SU(2)$ vers le Groupe de Heisenberg et Calcul de Berezin

**Benjamin Cahen**
*Université de Metz, Département de mathématiques*
*Ile du Saulcy 57045 Metz cedex 01, France*
*e-mail: cahen@poncelet.sciences.univ-metz.fr*

**Résumé.** On montre que les représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ se contractent au sens de Mickelsson et Niederle [16] vers les représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg en utilisant le calcul de Berezin sur les orbites coadjointes associées à ces représentations. Une version infinitésimale de ce résultat est obtenu en étudiant le comportement par contraction de fonctions hamiltoniennes sur ces orbites coadjointes . En particulier, on retrouve de faç on très simple un résultat de F. Ricci [18].

**Abstract.** We show that the unitary irreducible representations of $SU(2)$ can be contracted in the sense of Mickelsson and Niederle [16] to the unitary irreducible representations of the Heisenberg group by use of Berezin calculus on the coadjoint orbits associated to these representations. An analogous result at Lie algebras level is obtained by considering hamiltonian functions on these coadjoint orbits. In particular we give an easy proof of a result of F. Ricci [18].

Mots clés/Keywords: Groupes de Lie, représentations, orbites coadjointes, contraction, calcul de Berezin
MSC 2000: 22E46, 53D50, 81R30, 81S10.

## 1. Introduction

Les contractions de groupes et d'algèbres de Lie ont été introduites par E. Inonu et E.P. Wigner [13]. Ces notions proviennent de la physique théorique : lorsqu'une théorie physique est un cas particulier d'une autre théorie physique (la mécanique classique par exemple s'obtient à partir de la mécanique relativiste en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini) on peut penser qu'il existe des procédés de passage à la limite permettant de relier les groupes d'invariance de ces deux théories (les groupes de Galilée et de Poincaré dans l'exemple précédent) ainsi que leurs représentations.

Les contractions d'algèbres de Lie ont été très étudiées dès les années 1960 (voir, par exemple, [21] et [14]). L'exploration systématique des contractions de groupes de Lie et de leurs représentations commence véritablement avec les travaux de J. Mickelsson et J. Niederle [16] et surtout de A.H. Dooley et J.W. Rice [9], [10], [11].

Il est montré dans [16] que les représentations de masse non nulle du groupe de déplacements $\mathbb{R}^{n+1} \times SO(n+1)$ ainsi que les représentations de masse carrée positive du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n,1)$ peuvent être obtenues par contraction (c'est- à-dire comme limites en un sens qui sera précisé plus loin) de représentations de la série principale de $SO_0(n+1\,,\,1)$. On trouve par ailleurs dans [16] l'une des premières définitions précises de la notion de contraction de représentations de groupes de Lie. Plus généralement, Dooley et Rice considèrent dans [11] le cas de la contraction d'un groupe de Lie connexe semi-simple mon compact $G$ vers son groupe de déplacements de Cartan, le produit semi-direct $V \times K$ ($K$ est un sous groupe connexe, compact maximal de $G$ et $V$ un supplémentaire de l'algèbre de Lie de $K$ dans l'algèbre de Lie de $G$ invariant sous l'action adjointe de $K$) et montrent que les représentations génériques de $V \times K$ s'obtiennent par contraction de représentations de la série principale de $G$. Un résultat analogue dans le cas où $G$ est compact est également établi dans [11] (le cas de la contraction des représentations unitaires irréductibles de $SO(n+1)$ vers les représentations génériques de $\mathbb{R}^n \times SO(n)$ avait été traité dans [10]).

D'autre part, en utilisant un type de contraction différent de ceux des exemples précédents, F. Ricci a montré que les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg de dimension 3 peuvent être obtenues comme limites de suites de représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ [18].

Outre leur intérêt propre, les contractions de représentations ont des applications diverses en Analyse Harmonique : obtention de formules de type Mehler-Heine pour les fonctions spéciales [11], [18], transport de résultats sur les multiplicateurs de Fourier d'un groupe de Lie à un autre [19].

Dans [9], Dooley suggère d'interpréter les contractions de représentations de groupes de Lie dans le cadre de la méthode des orbites. On peut remarquer en effet dans les exemples que, lors de la contraction d'une famille de représentations unitaires irréductibles vers une représentation unitaire irréductible, les orbites coadjointes associées aux représentations de cette famille se déforment vers l'orbite coadjointe associée à la représentation contractée. Dans cet ordre d'idées, C. Cishahayo et S. De Bièvre [7] puis J. Renaud [17] ont introduit et étudié une contraction assez remarquable des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ vers certaines représentations unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^2 \times SO_0(1,1)$.

Récemment, P. Cotton et A.H. Dooley ont proposé d'appliquer la notion de calcul symbolique adapté à l'étude des contractions de représentations [6]. Si $G$ est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe de $G$ supposée associée par la méthode des orbites à une représentation unitaire irréductible $\pi$ de $G$, un calcul symbolique sur $\mathcal{O}$ est une correspondance linéaire bijective $f \to W(f)$ entre une classe de fonctions sur $\mathcal{O}$ (appelées symboles) et une classe d'opérateurs sur l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation $\pi$. Pour $X$ dans $\mathfrak{g}$, notons $\widetilde{X}$ la fonction définie sur $\mathcal{O}$ par

$$\widetilde{X}(\xi) =< \xi, X > \quad (\xi \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*) .$$

L'orbite $\mathcal{O}$ étant munie de sa 2-forme de Kirillov, la fonction $\widetilde{X}$ est l'hamiltonien du champ de vecteurs invariant sur $\mathcal{O}$ défini par $X$. Un calcul symbolique $W$ sur $\mathcal{O}$ est dit adapté lorsqu'il existe un sous espace dense $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ tel que, pour tous $X$ dans $\mathfrak{g}$, $\varphi$ dans $\mathcal{D}$,

$$W(i\,\widetilde{X})\,\varphi = d\pi\,(X)\,\varphi\,.$$

Introduire la notion de calcul symbolique adapté est en fait une manière de généraliser directement les "règles de quantification" habituelles de la mécanique quantique ; en particulier, les "observables" $\widetilde{X}$ $(X \in \mathfrak{g})$ correspondent alors à des opérateurs $W(\widetilde{X})$ tels que, conformément à la prescription de Dirac,

$$[W(\widetilde{X})\,,\,W(\widetilde{Y})] = -i \quad W(\{\widetilde{X}\,,\,\widetilde{Y}\})$$

pour $X, Y$ dans $\mathfrak{g}$, $\{\ ,\ \}$ désignant le crochet de Poisson associé à la 2-forme de Kirillov de l'orbite $\mathcal{O}$. Lorsque que l'orbite $\mathcal{O}$ est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa 2-forme symplectique usuelle ($n = 1/2\dim\mathcal{O}$), la transformation de Weyl [12] donne fréquemment un calcul symbolique adapté sur $\mathcal{O}$ [4], [22].

Lorsque $\mathcal{O}$ est une orbite coadjointe entière d'un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe, le calcul de Berezin défini par une méthode d'états cohérents fournit un calcul symbolique adapté sur $\mathcal{O}$ [1]. En règle générale, le procédé habituel de quantification géométrique [20], [23] appliqué à l'orbite $\mathcal{O}$ permet de définir un calcul symbolique adapté sur $\mathcal{O}$, la classe des symboles pouvant être assez réduite.

L'exemple étudié dans [6] est le cas particulier de [10] où, avec les notations précédentes, $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $K = SO(2)$. Les orbites coadjointes associées aux représenta-tions de la série principale de $SL(2,\mathbb{R})$ et aux représentations génériques de $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ sont des cylindres et les calculs symboliques adaptés utilisés sur ces orbites sont dérivés de la transformation de Weyl. Cotton et Dooley montrent alors que le calcul symbolique introduit sur une orbite coadjointe associée à une représentation générique de $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ s'interprète comme limite (en un sens précisé dans [6]) de calculs symboliques sur les orbites coadjointes associées aux représentations de la série principale de $SL(2,\mathbb{R})$ ce qui donne immédiatement, dans ce cas particulier, une version infinitésimale des résultats de [10]. L'utilisation de calculs symboliques adaptés permet ainsi de relier directement, lors d'une contraction, le comportement des orbites coadjointes (à travers les fonctions hamiltoniennes $\widetilde{X}$) à celui des représentations associées.

Le but du présent travail est de montrer comment les idées de [9] et de [6] peuvent être appliquées dans le cas de la contraction de $SU(2)$ vers le groupe de Heisenberg $H$ étudiée par F. Ricci. Les orbites coadjointes non dégénérées de $H$ admettent des structures kälheriennes invariantes, les représentations unitaires irréductibles de $H$ associées à ces orbites peuvent être réalisées comme des représentations induites holomorphes [15], [2] et on dispose au dessus de ces orbites du calcul de Berezin qui définit un calcul symbolique adapté comme dans le cas des orbites coadjointes entières de $SU(2)$. On peut remarquer que les fonctions quantifiables (au sens de la quantification géométrique, voir [23]) sur une orbite coadjointe de $H$ sont des symboles du calcul de Berezin et que le calcul symbolique issu de la quantification géométrique coïncide avec le calcul de Berezin sur la classe des fonctions quantifiables [8]. Il en est de même sur une orbite coadjointe entière de $SU(2)$ (ou, plus généralement, d'un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe) la classe des symboles de Berezin étant alors un espace vectoriel complexe de dimension finie qui coïncide avec la classe des fonctions quantifiables [1]. Les orbites coadjointes non dégénérées de $H$ sont paramétrées par le plan complexe $\mathbb{C}$, les orbites coadjointes entières de $SU(2)$ par la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup (\infty)$. La contraction des représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ vers celles de $H$ sera alors déduite de la convergence simple (sur $\mathbb{C}$) des symboles de Berezin des opérateurs de ces représentations appelés star-exponentielles dans [1]. On donnera en particulier une preuve simple et directe du résultat principal de [18] (Théorème 2 p. 219) relatif à la convergence des coefficients des représentations de $SU(2)$ vers les coefficients des représentations de $H$. Des résultats analogues au niveau infinitésimal seront obtenus en remarquant que chaque fonction hamiltonienne $\widetilde{X}$ sur une orbite coadjointe de $H$ paramétrée par $\mathbb{C}$ est limite simple d'une suite de fonctions hamiltoniennes sur les orbites coadjointes de $SU(2)$ construite à partir des images de $X$ par les applications contractions.

Le plan de cet article est le suivant. Dans le Paragraphe 2 (respectivement dans le Paragraphe 3) on décrit rapidement la construction des représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ (respectivement de $H$) à partir des orbites coadjointes, on introduit le calcul de Berezin sur ces orbites et on donne l'expression des star-exponentielles. Dans le Paragraphe 4, on précise la contraction de $SU(2)$ vers $H$ utilisée et on interprète en termes de fonctions hamiltoniennes $\widetilde{X}$ la déformation des orbites coadjointes observée lors de cette contraction. On étudie, dans le Paragraphe 5, le comportement des star-exponentielles par contraction et on en déduit, comme indiqué précédemment, nos principaux résultats sur la contraction des représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ vers celles de $H$. On donne dans le Paragraphe 6 une version infinitésimale de ces résultats de contraction et on termine dans le Paragraphe 7 par diverses remarques complémentaires.

## 2. Quantification d'une orbite coadjointe entière de $SU(2)$

**2.1. Généralités.** Dans toute la suite, $G$ désigne le groupe $SU(2)$ des matrices

$$g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = su(2)$ de $G$ admet pour base

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

Le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathfrak{g}$ à l'aide de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ définie par

$$< X, Y >= -2\, Tr\,(XY)$$

pour $X$ et $Y$ dans $\mathfrak{g}$. L'action coadjointe de $G$ sur $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ est alors donnée par

$$g \cdot \xi = g\, \xi\, g^{-1}$$

pour $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ et les orbites coadjointes sont les sphères $S(r)$ de $\mathfrak{g}^*$ où

$$S\,(r) = \left\{ x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + x_3\, u_3 \quad / \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \right\}.$$

Si $m$ est un entier positif, notons $\mathcal{O}_m$ l'orbite coadjointe de $\xi_m = (m\,/\,2)u_3 \in \mathfrak{g}^*$. Le stabilisateur de $\xi_m$ pour l'action coadjointe est le tore $\mathbb{T}$ formé des matrices $g\,(e^{i\theta}\,,\,0)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathbb{R}\, u_3$.

Le groupe $G = SU(2)$ se complexifie en $SL(2,\mathbb{C})$. Soit $P$ le sous groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (0)$, $\gamma \in \mathbb{C}$. On a les identifications

$$SL(2,\mathbb{C})\,/\,P \simeq G\,/\,\mathbb{T} \simeq \mathcal{O}_m = S\,(m/2)\,.$$

La bijection de $\mathbb{C}$ dans $SL\,(2,\mathbb{C})\,/\,P\ \setminus\ \{g\,(0,1)\,P\}$ qui à $z$ associe la classe de la matrice

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induit, via les identifications précédentes, une bijection $\varphi_m$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{O}_m \setminus \{-\xi_m\}$ donnée par

$$\varphi_m(z) = -\frac{m}{2}\left(\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}\,u_1 + \frac{z-\overline{z}}{i(1+z\overline{z})}\,u_2 + \frac{z\overline{z}-1}{1+z\overline{z}}\,u_3\right)$$

dont la bijection réciproque s'obtient en composant projectique stéréographique de pôle Nord $\xi_m$ et symétrie par rapport au centre de la sphère $S(m/2)$.

L'action naturelle de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $SL(2,\mathbb{C})\,/\,P \simeq \mathcal{O}_m$ s'écrit dans la carte de $\mathcal{O}_m$ donnée par l'application $\varphi_m$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.z = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad (\gamma\, z + \delta \neq 0)\,.$$

En particulier l'application $\varphi_m$ entrelace l'action de $G \subset SL(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ par transformations homographiques (définie presque partout) et l'action coadjointe de $G$ sur $\mathcal{O}_m$.

**2.2. Représentation de $G$ associée à l'orbite $\mathcal{O}_m$.** Le caractère $\chi_m$ de $\mathbb{T}$ défini par $d\chi_m = i\,\xi_m\,|_{\mathbb{R}\,u_3}$ se prolonge en un caractère $\chi'_m$ de $P$ donné par

$$\chi'_m \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1/\alpha \end{pmatrix} = \alpha^m\,.$$

Considérons le fibré holomorphe $L_m = SL(2,\mathbb{C}) \times_{\chi'_m} \mathbb{C}$ au dessus de $\mathcal{O}_m$ [1]. Les sections holomorphes $s$ de $L_m$ s'écrivent, dans la carte de $\mathcal{O}_m$ donnée par l'application $\varphi_m$,

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow s(z) = [\sigma(z)\,,\, F(z)] \in L_m$$

où $F$ appartient à l'espace $\mathcal{F}_m$ des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $m$. L'action naturelle de $SL(2,\mathbb{C})$ sur ces sections :

$$(g \cdot s)\ (z) = g.s(g^{-1}.z)$$

induit la représentation $\pi_m$ de $G$ dans $\mathcal{F}_m$ définie par

$$(\pi_m\,(g)\,F)(z) = (\alpha + \overline{\beta}\,z)^m\ F\,\left(\frac{\overline{\alpha}z - \beta}{\overline{\beta}z + \alpha}\right)$$

où $g = g(\alpha,\beta) \in G\,,\ F \in \mathcal{F}_m$.
Le produit scalaire $G$-invariant sur l'espace $\mathcal{F}_m$ est

$$< F, G >_m = \int_{\mathbb{C}} F(z)\,\overline{G(z)}\ d\mu_m\,(z)$$

où $d\mu_m(z) = \frac{m+1}{\pi}\,(1 + z\overline{z})^{-m-2}\,dx\,dy$ , $dx\,dy$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Une base de $\mathcal{F}_m$ orthonormée pour ce produit scalaire est formée par les polynômes $F_p^m\,(z) = \sqrt{C_m^p}\,z^p$ où $p = 0, 1 \ldots m$.

**2.3. Calcul de Berezin.** [8] Soit $t \in \mathbb{C}$. Il existe un unique élément $E_t^m$ de $\mathcal{F}_m$, appelé état cohérent, tel que, pour tout $F$ dans $\mathcal{F}_m$

$$< F\,,\, E_t^m >_m = F\,(t)\,.$$

On trouve aisément l'expression de $E_t^m$ :

$$E_t^m\,(z) = (1 + \overline{t}\,z)^m\,.$$

Le symbole de Berezin d'un opérateur $A$ de $\mathcal{F}_m$ est la fonction $s_m\,(A)$ définie par

$$s_m\,(A)(z) = \frac{< A\,E_z^m\,,\, E_z^m >_m}{< E_z^m\,,\, E_z^m >_m}\,.$$

Le symbole double de Berezin d'un opérateur $A$ de $\mathcal{F}_m$ est la fonction

$$S_m(A)(z, z') = \frac{< A\,E_{z'}^m\,,\, E_z^m >_m}{< E_{z'}^m\,,\, E_z^m >_m}$$

holomorphe en la variable $z$, antiholomorphe en la variable $z'$ sur l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ formé par les couples $(z, z')$ tels que

$$< E_{z'}^m, E_z^m >_m \neq 0,$$

et donc déterminée par sa restriction $S_m(A)(z,z) = s_m(A)(z)$ à la diagonale de $\mathbb{C}^2$.

Soit $A$ un opérateur de $\mathcal{F}_m$, $F \in \mathcal{F}_m$ et $z \in \mathbb{C}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} A\,F\,(z) &= < A\,F\,,\, E_z^m >_m = < F\,,\, A^*\,E_z^m >_m \\ &= \int_{\mathbb{C}} F(z')\,\overline{A^*\,E_z^m(z')}\,d\mu_m\,(z') \\ &= \int_{\mathbb{C}} F(z')\,\overline{< A^*\,E_z^m\,,\, E_{z'}^m >_m}\,d\mu_m\,(z') \\ &= \int_{\mathbb{C}} F(z') < A\,E_{z'}^m\,,\, E_z^m >_m\; d\mu_m\,(z') \\ &= \int_{\mathbb{C}} F(z')\,S_m(A)(z,z') < E_{z'}^m\,,\, E_z^m >_m \quad d\mu_m\,(z')\,. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une formule permettant de retrouver l'opérateur $A$ à partir de son symbole double. On en déduit la formule suivante qui sera utilisée plus loin. Pour $F, G$ dans $\mathcal{F}_m$, on a

$$< A\,F, G >_m = \int_{\mathbb{C}^2} F(z')\,\overline{G(z)}\,S_m(A)(z,z') < E_{z'}^m\,,\, E_z^m >_m\; d\mu_m(z)\,d\mu_m(z')\,.$$

**2.4. Star-exponentielle.** On obtient immédiatement, si $g = g\,(\alpha,\beta) \in G$ :

$$S_m(\pi_m(g))(z,z') = (\alpha + \overline{\alpha}\,z\,\overline{z}' + \overline{\beta}\,z - \beta\overline{z}')^m\,(1 + z\overline{z}')^{-m}$$

puis

$$s_m(\pi_m\,(g))(z) = (\alpha + \overline{\alpha}\,z\,\overline{z} + \overline{\beta}\,z - \beta\overline{z})^m\,(1 + z\overline{z})^{-m}.$$

D'autre part, la différentielle de la représentation $\pi_m$ est donnée par

$$\begin{aligned} d\pi_m\,(u_1)\; F(z) &= -\frac{m}{2}\,i\,z\; F(z) + \frac{1}{2}\,i\,(z^2-1)\,F'(z) \\ d\pi_m\,(u_2)\; F(z) &= -\frac{m}{2}\,z\; F(z) + \frac{1}{2}\,(z^2+1)\,F'(z) \\ d\pi_m\,(u_3)\; F(z) &= \frac{m}{2}\,i\; F(z) - i\,z\; F'(z) \end{aligned}$$

pour $F \in \mathcal{F}_m$. Par suite :

$$\begin{aligned} S_m(d\pi_m\,(u_1))(z,z') &= -\frac{im}{2}\,\frac{z+\overline{z}'}{1+z\overline{z}'} \\ S_m(d\pi_m\,(u_2))(z,z') &= -\frac{m}{2}\,\frac{z-\overline{z}'}{1+z\overline{z}'} \\ S_m(d\pi_m\,(u_3))(z,z') &= \frac{im}{2}\,\frac{1-z\overline{z}'}{1+z\overline{z}'} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $X$ dans $\mathfrak{g}$, on a

$$s_m\,(d\pi_m\,(X))(z) = i\;\widetilde{X}\,(\varphi_m(z))$$

ce qui exprime que le calcul de Berezin définit un calcul symbolique adapté selon la terminologie de [5].

## 3. Quantification d'une orbite coadjointe du groupe de Heisenberg

Soient $H$ le groupe de Heisenberg de dimension 3, $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de $H$ et $(v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathfrak{h}$ dans laquelle les relations de commutation sont

$$[v_1, v_2] = v_3 \quad , \quad [v_1, v_3] = [v_2, v_3] = 0\,.$$

On notera $[a, b, c]$ l'élément $\exp\,(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3)$ de $H$ ($a, b, c$ étant 3 réels). La multiplication de $H$ est donnée par

$$[a, b, c].[a', b', c'] = [a + a'\,,\; b + b'\,,\; c + c' + \frac{1}{2}\,(ab' - a'b)]\,.$$

Notons $(v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ la base de $\mathfrak{h}^*$ duale de $(v_1, v_2, v_3)$. L'action coadjointe de $H$ sur $\mathfrak{h}^*$ est donnée par

$$[a, b, c]\cdot(x_1\,v_1^* + x_2\,v_2^* + x_3\,v_3^*) = (x_1 + b\,x_3)\,v_1^* + (x_2 - a\,x_3)\,v_2^* + x_3\,v_3^*$$

et par suite l'orbite coadjointe d'un élément $\xi$ de $\mathfrak{h}^*$ tel que $v_3^*\,(\xi) = \lambda$ est le plan $(x_3 = \lambda)$ lorsque $\lambda \neq 0$ et est réduite à $\{\xi\}$ lorsque $\lambda = 0$.

Supposons $\lambda \neq 0$ et notons $\chi_\lambda$ le caractère du centre de $H$ défini par

$$\chi_\lambda\,([0, 0, c]) = e^{ic\lambda}\,.$$

D'après le théorème de Stone-von Neumann [12], il existe une représentation unitaire et irréductible de $H$, unique à équivalence unitaire près, qui coïncide avec $\chi_\lambda$ sur le centre de $H$. On va rappeler ici rapidement comment la méthode des orbites permet de réaliser cette représentation comme représentation induite holomorphe.

Pour $\lambda \neq 0$, soit $W_\lambda$ l'orbite coadjointe de $\xi_\lambda = \lambda\,v_3^* \in \mathfrak{h}^*$. Notons $\varepsilon$ le réel qui vaut 1 si $\lambda > 0$ et $-1$ si $\lambda < 0$. Considérons la polarisation complexe positive $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ au point $\xi_\lambda$ engendrée par $v_1 + i\,\varepsilon\,v_2$ et $v_3$ et notons $P_\varepsilon$ le sous groupe connexe de $H^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathcal{P}_\varepsilon$. Tout élément $g$ de $H^{\mathbb{C}}$ peut s'écrire de façon unique

$$g = \exp\alpha\,(v_1 - i\,\varepsilon\,v_2) \quad \exp\,(\beta\,(v_1 + i\,\varepsilon\,v_2) + \gamma\,v_3)$$

où $\alpha, \beta, \gamma$ appartiennent à $\mathbb{C}$. Plus précisément, si $g = \exp(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3)$ avec $a, b, c$ éléments de $\mathbb{C}$, on a

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(a + i\,\varepsilon\,b)\;,\;\; \beta = \frac{1}{2}\,(a - i\,\varepsilon\,b)\;,\;\; \gamma = c - (1/4)\,i\,\varepsilon\,(a^2 + b^2)\,.$$

On en déduit que l'espace homogène $H^{\mathbb{C}}/P_\varepsilon$ s'identifie à $\mathbb{C}$ au moyen de l'application qui à $z$ élément de $\mathbb{C}$ associe la classe de

$$\sigma_\lambda(z) = \exp\left(\frac{z}{2i\lambda}\,(-\varepsilon\, v_1 + i\, v_2)\right)\,.$$

Identifions d'autre part l'orbite $W_\lambda$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de l'application

$$\psi_\lambda\,:\,z \to (Re z)\,v_1^* + \varepsilon\,(Im\,z)\,v_2^* + \lambda\,v_3^*.$$

L'action naturelle de $H^{\mathbb{C}}$ sur $H^{\mathbb{C}}/P_\varepsilon$ induit alors une action holomorphe de $H^{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$\exp\left(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3\right)\cdot z = z + (b - \varepsilon\,a\,i)\,\lambda$$

pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, qui prolonge l'action coadjointe de $H$ sur $W_\lambda \simeq \mathbb{C}$.

On considère à présent le fibré holomorphe $L_\lambda = H^{\mathbb{C}} \times_{\chi'_\lambda} \mathbb{C}$ au dessus de $W_\lambda \simeq \mathbb{C}$ où $\chi'_\lambda$ désigne le prolongement de $\chi_\lambda$ à $P_\varepsilon$ défini par

$$\chi'_\lambda\left(\exp(\beta(v_1 + i\,\varepsilon\,v_2) + \gamma\,v_3)\right) = e^{i\gamma\lambda}$$

pour $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Les sections holomorphes de $L_\lambda$ s'écrivent $z \mapsto [\sigma_\lambda(z)\,,\,f(z)]$ où $f$ est une fonction entière. L'action naturelle de $H$ sur ces sections induit alors une représentation $\rho^\lambda$ de $H$ dans l'espace des fonctions entières définie par

$$\rho^\lambda([a,b,c])\,f(z) = \exp(ic\,\lambda + \frac{1}{4}(\varepsilon b + ai)(2z + (-b + \varepsilon\,ai)\lambda)\,f(z + \lambda(-b + \varepsilon\,ai))\,.$$

La représentation unitaire irréductible $\rho_\lambda$ de $H$ attachée à $W_\lambda$ par la méthode des orbites est obtenue en considérant la restriction de $\rho^\lambda$ à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ formé des fonctions entières $f\;:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_\lambda^2 = \frac{1}{2\pi|\lambda|}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\,e^{-|z|^2/2|\lambda|}\,dx\,dy < +\infty$$

où $dx\,dy$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Une base hilbertienne de $\mathcal{H}_\lambda$ est formée par les fonctions $f_k^\lambda(z) = (1/\sqrt{(2|\lambda|)^k\,k\,!})\,z^k$ où $k \in \mathbb{N}$.

Soit $t \in \mathbb{C}$. L'évaluation $f \to f(t)$ étant une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ (voir [12] par exemple), il existe un "état cohérent" $e_t^\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ tel que

$$< f, e_t^\lambda >_\lambda = f(t)$$

pour tout $f$ dans $\mathcal{H}_\lambda$. On obtient :

$$e_t^\lambda(z) = \exp\left((1/2|\lambda|)\,z\,\bar{t}\right).$$

Etant donné un opérateur $A$ de $\mathcal{H}_\lambda$, on peut alors définir, comme au paragraphe précédent, le symbole de Berezin $s_\lambda(A)$ de $A$ et le symbole double de Berezin $S_\lambda(A)$ lequel est une fonction définie sur $\mathbb{C}^2$. On dispose également des formules intégrales analogues à celles du 2.3. permettant d'exprimer, si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{H}_\lambda$, $A(f)$ et $< A(f), g >_\lambda$ à partir de $S_\lambda(A)$. En particulier, on a

$$S_\lambda(\rho_\lambda([a,b,c])(z,z') = \exp\left(ic\,\lambda + \frac{1}{2}(\varepsilon\, b + i\,a)\,z + \frac{1}{2}(-\varepsilon\, b + a\,i)\,\overline{z}' - \frac{|\lambda|}{4}(a^2+b^2)\right)$$

pour $a, b, c$, dans $\mathbb{R}$ et $z, z'$ dans $\mathbb{C}$.

Utilisant d'autre part l'expression de la différentielle $d\rho_\lambda$ de la représentation $\rho_\lambda$ donnée par

$$\begin{aligned}(d\rho_\lambda(v_1)\,f)(z) &= \frac{1}{2}\,i\,z\;f(z) + \lambda\,\varepsilon\,i\;f'(z)\\ (d\rho_\lambda(v_2)\,f)(z) &= \frac{1}{2}\,\varepsilon\,z\;f(z) - \lambda\;f'(z)\\ (d\rho_\lambda(v_3)\,f)(z) &= i\,\lambda\;f(z)\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}S_\lambda(d\rho_\lambda(v_1))(z,z') &= i\,\frac{z+\overline{z}'}{2}\\ S_\lambda(d\rho_\lambda(v_2))(z,z') &= \varepsilon\,\frac{z-\overline{z}'}{2}\\ S_\lambda(d\rho_\lambda(v_3))(z,z') &= i\,\lambda\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$s_\lambda(d\rho_\lambda(X))(z) = i\widetilde{X}(\psi_\lambda(z))$$

pour $X \in \mathfrak{h}$, $z \in \mathbb{C}$.

Le calcul de Berezin induit donc ici un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite $W_\lambda \simeq \mathbb{C}$ tout comme la transformation de Weyl définit un calcul symbolique adapté au dessus de $W_\lambda \simeq \mathbb{R}^2$ lorsque qu'on réalise la représentation de $H$ associée à l'orbite $W_\lambda$ comme induite unitaire en utilisant des polarisations réelles [22]. Le lien entre les calculs de Berezin et de Weyl est étudié dans [2] dans le cas d'un groupe de Heisenberg de dimension quelconque.

## 4. Généralités sur la contraction de $SU(2)$ vers le groupe de Heisenberg

**4.1.** Si $r$ est un réel strictement positif, on note $C_r$ l'application linéaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$C_r(v_1) = r\,u_1 \quad , \quad C_r(v_2) = r\,u_2 \quad , \quad C_r(v_3) = r^2\,u_3$$

et $c_r$ l'application de $H$ dans $G$ telle que, pour tout $X$ élément de $\mathfrak{h}$,

$$c_r(\exp_H X) = \exp_G C_r(X)\,.$$

La différentielle de $c_r$ en l'identité de $H$ est $C_r$ et on a, pour $X$ et $Y$ éléments de $\mathfrak{h}$ :

$$\lim_{r\to 0} C_r^{-1}\,[C_r\,(X)\,,\,C_r\,(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{h}}\,,$$

ce qui exprime que la famille $(C_r)_{r>0}$ est une contraction de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{h}$ [9].

On en déduit, en utilisant notamment le fait que l'application exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de l'identité dans $G$, la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** 1) *Il existe un voisinage ouvert $V$ de l'identité de $G$ tel que, pour tout $r > 0$, $c_r$ est un difféomorphisme de $c_r^{-1}\,(V^2)$ dans $V^2$.*

2) *Pour tout $x$ dans $H$, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r < r_0$, $c_r\,(x) \in V$.*

3) *Pour tout $r > 0$, $c_r\,([0,0,0]) = g\,(1,0)$.*

4) *Soient $x, y$ dans $H$. Il existe $r_1 > 0$ tel que, pour tout $r < r_1$, $c_r^{-1}\,(c_r\,(x)\,c_r\,(y)^{-1})$ est bien défini et on a :*

$$\lim_{r\to 0} c_r^{-1}\,(c_r\,(x)\,c_r\,(y)^{-1}) = x.y^{-1}\,.$$

On dit alors, suivant [16], Définition 1, que la famille $(c_r)_{r>0}$ est une contraction de $G$ vers $H$, la famille $(C_r)_{r>0}$ étant la contraction de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{h}$ associée.

On donne à présent un résultat technique qu'on utilisera plus loin.

**Lemme 4.2.** *Soient $g_m = g(\alpha_m, \beta_m)$ une suite d'éléments de $G$, $[a,b,c]$ un élément de $H$ et $r\,(m)$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 lorsque $m$ tend vers $+\infty$. Il y a équivalence entre*

(1) *la suite $g_m$ tend vers l'identité de $G$ et la suite $c_{r(m)}^{-1}\,(g_m)$ tend vers $[a,b,c]$ dans $H$ et*

(2) $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} (r\,(m)^{-1}\,\beta_m) = \frac{1}{2}\,(-b + a\,i)$ *et* $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} r\,(m)^{-2}\,(\alpha_m - 1) = -\frac{1}{8}\,(a^2+b^2) + i\frac{c}{2}\,.$

*Preuve.* Notons $U$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ et $U'$ un voisinage ouvert de l'identité dans $G$ tels que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de $U$ dans $U'$ dont on note log le difféomorphisme inverse.

Supposons que (1) soit vérifié. Pour $m$ assez grand, $g_m$ appartient à $U'$ et $c_{r(m)}^{-1}\,(g_m) = \exp_H\, C_{r(m)}^{-1}\,(\log g_m)$ est un élément de $H$ bien défini que l'on notera $[a_m, b_m, c_m]$. On a alors

$$g_m = c_{r(m)}\,([a_m, b_m, c_m]) = \exp_G\,(r(m)\,a_m\,u_1 + r(m)\,b_m\,u_2 + r(m)^2\,c_m\,u_3)$$

ce qui!donne

$$g_m = g\left(\cos R(m) + i\,\frac{r(m)^2\,c_m \sin R(m)}{2R(m)} \quad , \quad (-b_m + i\,a_m)\,\frac{r(m)\sin R(m)}{2R(m)}\right)$$

où $R(m) = \frac{1}{2}\,r(m) \quad (a_m^2 + b_m^2 + r(m)^2\,c_m^2)^{1/2}$, d'où l'on déduit aisément (2).

Réciproquement, partant de (2), on voit immédiatement que $g_m$ tend vers l'identité $G$. On vérifie alors que $C^{-1}_{r(m)}(\log g_m)$ tend vers $a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3$ à l'aide d'un développement limité de $\log g_m$ par rapport à $r(m)$, d'où (1).

Remarquons que, étant donnés une suite $(r(m))$ de réels strictement positifs tendant vers 0 et un élément $[a,b,c] = \exp_H(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3)$ de $H$, un exemple type de suite $(g_m)$ de $G$ satisfaisant aux conditions du lemme précédent est

$$g_m = \exp_G C_{r(m)}(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3) = c_{r(m)}([a,b,c]) .$$

**4.2.** On va voir à présent de quelle façon les orbites coadjointes (entières) de $G$ se contractent vers les orbites coadjointes de $H$. Rappelons que l'orbite $\mathcal{O}_m$ de l'élément $(m/2)u_3 \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ sous l'action (co)adjointe de $G$ a pour équation, dans la base $(u_1, u_2, u_3)$ de $\mathfrak{g}$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 .$$

Il en résulte immédiatement que, pour $r > 0$, l'image de $\mathcal{O}_m$ par la transposée $C_r^*$ de l'application $C_r$ a pour équation, dans la base $(v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ de $\mathfrak{h}^*$,

$$r^2\,(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = \left(\frac{r^2 m}{2}\right)^2 .$$

Fixons $\lambda_0 > 0$ et supposons que $r$ soit une fonction $r(m)$ de $m$ telle que $\lim_{m\to+\infty}(m\,r(m)^2) = 2\lambda_0$. Lorqu'on fait tendre $m$ vers $+\infty$ dans l'équation précédente, on obtient

$$x_3^2 = \lambda_0^2$$

ce qui permet de dire que les ellipsoïdes $C^*_{r(m)}(\mathcal{O}_m)$ convergent en quelque sorte vers la réunion des orbites $W_{\lambda_0}$ et $W_{-\lambda_0}$, [9]. On va alors utiliser les paramétrages des orbites $\mathcal{O}_m$ et $W_\lambda$ obtenues aux Paragraphes 2 et 3 pour exprimer cette "convergence" ce qui permettra plus loin de relier le comportement des orbites par contraction à celui des représentations associées.

Un calcul rapide montre que, avec les notations des paragraphes précédents, si on suppose comme ci-dessus que $\lim_{m\to+\infty}(mr(m)^2) = 2\lambda_0$ où $\lambda_0 > 0$, on a

$$\lim_{m\to+\infty} C^*_{r(m)}\left(\varphi_m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda_0 m}}\right)\right) = \psi_{\lambda_0}(-z)$$

ou, de façon équivalente,

$$\lim_{m\to+\infty} \widetilde{C_{r(m)}(X)}\left(\varphi_m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda_0 m}}\right)\right) = \widetilde{X}\,(\psi_{\lambda_0}(-z))$$

pour $z \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathfrak{h}$, ce qui correspond à la "convergence" des ellipsoïdes $C^*_{r(m)}(\mathcal{O}_m)$ vers l'orbite $W_{\lambda_0}$.

Remarquons que, inversement, si la suite de points $\xi_m = \varphi_m(z_m)$ ( $z_m \in \mathbb{C}$) de $\mathcal{O}_m$ est telle que la suite $C^*_{r(m)}(\xi_m)$ où $\lim_{m\to+\infty}(m\, r(m)^2) = 2\lambda_0$ , converge vers le point $\eta = \psi_{\lambda_0}(-z)$ dans $\mathfrak{h}^*$, alors $z_m$ est équivalent à $z/\sqrt{2\lambda_0 m}$ lorsque $m$ tend vers $+\infty$.

Pour obtenir une "convergence" analogue des ellipsoïdes $C^*_{r(m)}(\mathcal{O}_m)$ vers l'orbite $W_{-\lambda_0}$ on procède comme suit. L'application de $\mathbb{C}$ dans $SL(2,\mathbb{C})/P$ qui à $z$ associe la classe de la matrice

$$\sigma'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$$

induit comme au Paragraphe 2.3 une bijection $\varphi'_m$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{O}_m \setminus \{\xi_m\}$ dont la bijection réciproque s'obtient comme composée de la projection stéréographique de pôle sud $-\xi_m$ et de la symétrie par rapport au centre de la sphère $\mathcal{O}_m \simeq S(m/2)$. On a, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi'_m(z) = \frac{m}{2}\left(-\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}\,u_1 + \frac{z-\overline{z}}{i(1+z\overline{z})}\,u_2 + \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}\,u_3\right).$$

On en déduit que, si $\lim_{m\to+\infty}(m\, r(m)^2) = 2\lambda_0$ ,

$$\lim_{m\to+\infty} C^*_{r(m)}\left(\varphi'_m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda_0 m}}\right)\right) = \psi_{-\lambda_0}(-z)$$

ce qui revient à dire que

$$\lim_{m\to+\infty} \widetilde{C_{r(m)}(X)}\left(\varphi'_m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda_0 m}}\right)\right) = \widetilde{X}\left(\psi_{-\lambda_0}(-z)\right)$$

pour tous $X \in \mathfrak{h}$ , $z \in \mathbb{C}$.

De même que plus haut, on peut vérifier que si la suite de points $\xi_m = \varphi_m(z_m)$ où $z_m \in \mathbb{C}$ de $\mathcal{O}_m$ est telle que la suite $C^*_{r(m)}(\xi_m)$ où $\lim_{m\to+\infty}(m\, r(m)^2) = 2\lambda_0$ , converge vers le point $\eta = \psi_{-\lambda_0}(-z)$ dans $\mathfrak{h}^*$, alors $z_m$ est équivalent à $z/\sqrt{2\lambda_0 m}$ lorsque $m$ tend vers $+\infty$.

## 5. Contraction des représentations de $SU(2)$ vers celles de $H$.

Dans tout ce paragraphe, $\lambda$ désigne un réel strictement positif et $(r(m))$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{m\to+\infty}(m\, r(m)^2) = 2\lambda$. On va établir ici divers résultats relatifs à la contraction des représentations $(\pi_m)$ de $G$ vers la représentation $\rho_\lambda$ de $H$. On précisera plus loin comment obtenir les résultats analogues dans le cas où $\lambda < 0$.

Notons $\tau$ l'opérateur (unitaire) de $\mathcal{H}_\lambda$ défini par $\tau(f)(z) = f(-z)$ et par $\widetilde{\rho}_\lambda$ la représentation de $H$ dans $\mathcal{H}_\lambda$ équivalente à $\rho_\lambda$ définie par $\widetilde{\rho}_\lambda = \tau \circ \rho_\lambda \circ \tau$. Partant des expressions des symboles (doubles) de Berezin des opérateurs $\pi_m(g)$ $(g \in G)$ et $\rho_\lambda(h)$ $(h \in H)$ données aux Paragraphes 2 et 3, on obtient, en utilisant le Lemme 4.2 :

**Proposition 5.1.** *Soient* $(g_m)$ *une suite de* $G$ *convergeant vers l'identité de* $G$ *et* $h$ *un élément de* $H$ *tels que* $\lim_{m\to+\infty} c_{r(m)}^{-1}(g_m)=h$. *Pour* $z$ *et* $z'$ *dans* $\mathbb{C}$, *on a*

$$\lim_{m\to+\infty} S_m(\pi_m(g_m))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\,,\,\frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right)=S_\lambda\,(\rho_\lambda\,(h))(-z,-z')=S_\lambda(\widetilde{\rho}_\lambda\,(h))(z,z')\,.$$

*En particulier, pour* $z\in\mathbb{C}$,

$$\lim_{m\to+\infty} s_m\,(\pi_m\,(g_m))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right)=s_\lambda\,(\rho_\lambda\,(h))(-z)=s_\lambda\,(\widetilde{\rho}_\lambda\,(h))(z)\,.$$

On peut alors énoncer l'un de nos principaux résultats :

**Proposition 5.2.** *Soient* $(g_m)$ *une suite de* $G$ *convergeant vers l'identité de* $G$ *et* $h$ *un élément de* $H$ *tels que* $\lim_{m\to+\infty} c_{r(m)}^{-1}(g_m)=h$. *Pour tous entiers positifs* $p,q$, *on a :*

$$\lim_{m\to+\infty} <\pi_m\,(g_m)\,F_p^m\,,\,F_q^m>_m=<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,f_p^\lambda\,,\,f_q^\lambda>_\lambda\ .$$

*Preuve.* En recopiant la dernière formule du Paragraphe 2.3. dans le cas où $F=F_p^m$ et $G=F_q^m$ et en effectuant dans l'intégrale du second membre le changement de variables $(z,z')\to(z/\sqrt{2\lambda m}\,,\,z'/\sqrt{2\lambda m})$ on obtient, pour $m\geq\max(p,q)$ :

$$<\pi_m\,(g_m)\,F_p^m\,,\,F_q^m>_m=\frac{1}{(2\lambda\pi)^2}\,\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\int_{\mathbb{C}^2} I_m\,(z,z')\,dx\,dy\,dx'\,dy'$$

où on a noté $I_m(z,z')$ l'intégrande

$$F_p^m\left(\frac{z'}{\sqrt{2\lambda\,m}}\right)\overline{F_q^m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right)}\frac{<\pi_m\,(g_m)\,E^m_{z'/\sqrt{2\lambda m}},E^m_{z/\sqrt{2\lambda m}}>_m}{\left((1+\frac{z\overline{z}}{2\lambda m})(1+\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda m})\right)^{m+2}}.$$

Remarquons que

$$F_p^m\left(\frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right)=\sqrt{C_m^p}\,\frac{z'^p}{(\sqrt{2\lambda m})^p}=\sqrt{\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{m^p}}\,f_p^\lambda(z')$$

tend vers $f_p^\lambda(z')$ lorsque $m$ tend vers $+\infty$.
A l'aide de la Proposition 5.1, on obtient :

$$\lim_{m\to+\infty} I_m\,(z,z')=f_p^\lambda(z')\,\overline{f_q^\lambda\,(z)}<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,e_{z'}^\lambda\,,\,e_z^\lambda>_\lambda\ e^{-|z|^2/2\lambda}\,e^{-|z'|^2/2\lambda}\,.$$

D'autre part, pour appliquer le théorème de la convergence dominée, on remarque que :

$$\begin{aligned}|<\pi_m\,(g_m)\,E^m_{z'/\sqrt{2\lambda m}}\,,\,E^m_{z/\sqrt{2\lambda m}}>_m| &\leq \|\pi_m(g_m)\,E^m_{z'/\sqrt{2\lambda m}}\|_m.\|E^m_{z/\sqrt{2\lambda m}}\|_m\\ &\leq \|E^m_{z'/\sqrt{2\lambda m}}\|_m.\|E^m_{z/\sqrt{2\lambda m}}\|_m\\ &\leq \left(1+\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda m}\right)^{m/2}\left(1+\frac{z\overline{z}}{2\lambda m}\right)^{m/2}.\end{aligned}$$

D'où

$$|I_m(z,z')| \leq \frac{|z'|^p\,|z|^q}{(\sqrt{2\lambda})^{p+q}\,\sqrt{p!}\sqrt{q!}}\left(1+\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda m}\right)^{-\frac{m}{2}-2}\left(1+\frac{z\overline{z}}{2\lambda m}\right)^{-\frac{m}{2}-2}.$$

On en déduit que, si l'on pose par exemple $m_0=\max(p,q)+3$, il existe un réel $C>0$ tel que, pour tout $m\geq m_0$,

$$|I_m\,(z,z')| \leq C\,|z'|^p\,|z|^q\left(1+\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda m_0}\right)^{-\frac{m_0}{2}}\left(1+\frac{z\overline{z}}{2\lambda m_0}\right)^{-\frac{m_0}{2}}.$$

Le second membre de cette inégalité étant une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^2$ on peut alors conclure que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}<\pi_m\,(g_m)\,F^m_p\,,\,F^m_q>_m &= \frac{1}{(2\lambda\pi)^2}\int_{\mathbb{C}^2} f^\lambda_p(z')\,\overline{f^\lambda_q(z)}<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,e^\lambda_{z'},e^\lambda_z>_\lambda\\ &\qquad e^{-|z|^2/2\lambda}e^{-|z'|^2/2\lambda}dxdydx'dy'\\ &=<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,f^\lambda_p\;f^\lambda_q>_\lambda\;.\end{aligned}$$

La proposition précédente est en fait une reformulation du principal résultat de [18] comme le montre le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.** *Soient $(g_m)$ une suite de $G$ convergeant vers l'identité et $h$ un élément de $H$ tels que $\lim_{m\to+\infty} c^{-1}_{r(m)}\,(g_m)=h$. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients complexes. On a :*

$$\lim_{m\to+\infty}<\pi_m\,(g_m)\;P(\sqrt{2\lambda m}\;\cdot)\;,\;Q(\sqrt{2\lambda m}\;\cdot)>_m=<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,P\,,\,Q>_\lambda\;.$$

*Preuve.* Par linéarité il suffit de considérer le cas où $P(z)=z^p$ et $Q(z)=z^q$. On a alors

$$<\pi_m\,(g_m)\;P(\sqrt{2\lambda m}\;\cdot)\;,\;Q\,(\sqrt{2\lambda m}\;\cdot)>_m=\frac{\sqrt{2\lambda m}^{p+q}}{\sqrt{C^p_mC^q_m}}<\pi_m\,(g_m)\,F^m_p\,,\,F^m_q>_m$$

qui tend, lorsque $m\to+\infty$, vers

$$\sqrt{2\lambda}^{p+q}\;\sqrt{p!}\;\sqrt{q!}\;<\widetilde{\rho}_\lambda(h)\,f^\lambda_p\,,\,f^\lambda_q>_\lambda\;=\;<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,P\,,\,Q>_\lambda\;.$$

Dans [18], le résultat précédent est utilisé pour retrouver une formule de type Mehler-Heine exprimant les polynômes de Laguerre comme limites de suites de polynômes de Jacobi. Une autre conséquence de la Proposition 5.1 est le résultat suivant.

**Proposition 5.4.** *Soient $(g_m)$ une suite de $G$ convergeant vers l'identité et $h$ un élément de $H$ tels que $\lim_{m\to+\infty} c^{-1}_{r(m)}(g_m) = h$.*

1) *Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :*

$$\lim_{m\to+\infty} (\pi_m(g_m) F_p^m)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = (\widetilde{\rho}_\lambda(h) f_p^\lambda)(z)$$

2) *On a :*

$$\lim_{m\to+\infty} \left\|(\pi_m(g_m) F_p^m)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{2\lambda m}}\right) - \widetilde{\rho}_\lambda(h) f_p^\lambda\right\|_\lambda = 0\,.$$

*Preuve.* La preuve de 1) est une version simplifiée de celle de la Proposition 5.2 et utilise l'avant-dernière formule intégrale du Paragraphe 2.3. Pour montrer 2) on revient à la définition de $\pi_m(g_m)$. Posant $g_m = g(\alpha_m\,,\,\beta_m)$, on a

$$\begin{aligned}(\pi_m(g_m)\; F_p^m)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) &= \sqrt{C_m^p}\;\left(\alpha_m + \overline{\beta}_m\,\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right)^{m-p}\;\left(\overline{\alpha}_m\,\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}} - \beta_m\right)^p \\ &= \frac{\sqrt{C_m^p}}{(\sqrt{2\lambda m})^p}{\alpha_m}^{m-p}\Big(1+\frac{\overline{\beta}_m z\sqrt{2\lambda m}}{2\lambda m\alpha_m}\Big)^{m-p}(\overline{\alpha}_m\,z - \beta_m\sqrt{2\lambda m})^p\,.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.2 on en déduit qu'il existe des constantes $A, B, C > 0$ telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\left|\pi_m(g_m)\,F_p^m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right)\right| &\le A\left(1 + B\frac{|z|}{m}\right)^m (|z| + C)^p \\ &\le A\,(|z|+C)^p \quad e^{B|z|}\,.\end{aligned}$$

On termine en appliquant le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions

$$\left|(\pi_m(g_m)\,F_p^m)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) - (\widetilde{\rho}_\lambda(h)\,f_p^\lambda)(z)\right|^2\; e^{-|z|^2/2\lambda}$$

qui converge simplement vers la fonction nulle d'après 1) .

Les définitions de la notion de contraction d'une famille de représentations rencontrées dans la littérature diffèrent quelque peu les unes des autres. On donne ici une définition de cette notion inspirée de celles de [16] et de [7].

Soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes de Lie, $J$ un sous ensemble de $]0,+\infty[$ admettant 0 comme point d'accumulation et $(c_\varepsilon)_{\varepsilon\in J}$ une contraction de $G_1$ vers $G_2$. Pour tout $\varepsilon$ dans $J$, soit $\pi_1^\varepsilon$ une représentation unitaire de $G_1$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon$ et soit $\pi_2$ une représentation de $G_2$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

**Définition 5.5.** *Avec les notations précédentes, on dira que la famille $(\pi_1^\varepsilon)_{\varepsilon\in J}$ de représentations de $G_1$ se contracte vers la représentation $\pi_2$ de $G_2$ (ou encore que la représentation $\pi_2$ est une contraction de la famille $(\pi_1^\varepsilon)$) lorsqu'il existe une famille $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in J}$ telle que, pour tout $\varepsilon \in J$ , $A_\varepsilon$ est une application linéaire continue injective de $\mathcal{H}_\varepsilon$ dans $\mathcal{H}$ et :*

1) *$D = \bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon(\mathcal{H}_\varepsilon)$ est une partie dense de $\mathcal{H}$.*
2) *Pour tout $\psi$ dans $D$ il existe $\varepsilon_0 \in J$ tel que, pour tout $\varepsilon \in J$ , $\varepsilon < \varepsilon_0$ implique $\psi \in A_\varepsilon(\mathcal{H}_\varepsilon)$.*
3) *Pour tout $h$ dans $G_2$ et $\psi$ dans $D$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|A_\varepsilon\, \pi_1^\varepsilon\, (c_\varepsilon\, (h))\, A_\varepsilon^{-1}\, \psi - \pi_2\, (h)\psi\|_{\mathcal{H}} = 0\,.$$

Les principales différences entre la définition précédente et celles données dans [7] et [16] consistent en ce que dans [7] chaque espace $A_\varepsilon(\mathcal{H}_\varepsilon)$ est supposé dense dans $\mathcal{H}$, ce qui n'est pas adapté à la situation étudiée ici, et que dans [16] les opérateurs $A_\varepsilon$ sont supposés unitaires. Nous reviendrons plus loin sur ce dernier point (Paragraphe 7.2).

Notons $\mathcal{F}_m^\lambda$ le sous espace hilbertien de $\mathcal{H}_\lambda$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $m$ et $A_m$ l'isomorphisme linéaire de $\mathcal{F}_m$ dans $\mathcal{F}_m^\lambda$ défini par

$$(A_m\, P)(z) = P\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right).$$

On peut alors reformuler le 2) de la Proposition 5.4 de manière à montrer que les représentations $\pi_m$ de $G$ se contractent vers la représentation $\widetilde{\rho}_\lambda$ de $H$ au sens de la définition 5.5 :

**Proposition 5.6.** *Soient $(g_m)$ une suite de $G$ convergeant vers l'identité et $h$ un élément de $H$ tels que $\lim_{m\to+\infty} c_{r(m)}^{-1}(g_m) = h$. Pour tout polynôme $P$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} \|(A_m\, \pi_m\, (g_m)\, A_m^{-1})\, P - \widetilde{\rho}_\lambda\, (h)\, P\|_\lambda = 0\,.$$

*Preuve.* Il suffit de considérer le cas où $P = f_p^\lambda$ , $p$ étant un entier positif. On a :

$$\begin{aligned}
&\left\| A_m\, \pi_m\, (g_m)\, A_m^{-1}\, f_p^\lambda - (\pi_m\, (g_m)\, F_p^m) \left(\frac{\cdot}{\sqrt{2\lambda m}}\right)\right\|_\lambda \\
&= \|A_m\, \pi_m\, (g_m)\, A_m^{-1}\, f_p^\lambda - A_m\, \pi_m\, (g_m)\, F_p^m\|_\lambda \\
&\leq \|A_m\|_{op}\, \|\pi_m\, (g_m)\|_{op}\, \|A_m^{-1}\, f_p^\lambda - F_p^m\|_m \\
&\leq \left| 1 - \sqrt{\frac{m^p}{m(m-1)\ldots(m-p+1)}}\right|
\end{aligned}$$

car $\|A_m\|_{op} \leq 1$. On en déduit le résultat à l'aide de la Proposition 5.4. 2).

## 6. Contraction des différentielles des représentations de $SU(2)$ vers celles de $H$

On suppose ici comme au paragraphe précédent que $\lambda$ est réel strictement positif et que $(r(m))$ est une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{m\to+\infty}(m\,r(m)^2) = 2\lambda$. Pour obtenir des résultats analogues à ceux du paragraphe précédent au niveau infinitésimal, on commence par traduire en termes de symboles de Berezin les résultats du Paragraphe 4.2.

**Lemme 6.1.** *Pour $X$ élément de $\mathfrak{h}$, $z$ et $z'$ éléments de $\mathbb{C}$ on a :*

1) $\lim_{m\to+\infty} s_m\left(d\pi_m\left(C_{r(m)}(X)\right)\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = s_\lambda\left(d\rho_\lambda(X)\right)(-z) = s_\lambda\left(d\widetilde{\rho}_\lambda(X)\right)(z)$

2) $\lim_{m\to+\infty} S_m\left(d\pi_m\left(C_{r(m)}(X)\right)\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}, \frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = S_\lambda\left(d\rho_\lambda(x)\right)(-z,-z')$
$= S_\lambda\left(d\widetilde{\rho}_\lambda(X)\right)(z,z')$.

Ce lemme se vérifie par un calcul direct. On peut également pour le 1) utiliser les résultats du Paragraphe 4.2 et le fait que les calculs de Berezin $s_m$ et $s_\lambda$ sont adaptés. On peut alors énoncer :

**Proposition 6.2.**

1) *Pour $X \in \mathfrak{h}$, $z \in \mathbb{C}$,*

$$\lim_{m\to+\infty} d\pi_m(C_{r(m)}(X))\, F_p^m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = (d\widetilde{\rho}_\lambda\,(X)\, f_p^\lambda)(z)\,.$$

2) *Pour $X \in \mathfrak{h}$,*

$$\lim_{m\to+\infty}\left\| d\pi_m\left(C_{r(m)}(X)\right) F_p^m\left(\frac{\cdot}{\sqrt{2\lambda m}}\right) - d\widetilde{\rho}_\lambda(X)\, f_p^\lambda\right\|_\lambda = 0\,.$$

3) *Pour $X \in \mathfrak{h}$ et $P$ polynôme,*

$$\lim_{m\to+\infty}\|A_m\, d\pi_m\left(C_{r(m)}(X)\right) A_m^{-1}\, P - d\widetilde{\rho}_\lambda(X)\, P\|_\lambda = 0\,.$$

*Preuve.* Par linéarité, il suffit de montrer 1) lorsque $X = v_i$, $i = 1,2,3$. Supposons par exemple $X = v_1$, les autres cas se traitant de la même façon.
D'après une formule du 2.3 on a

$$\begin{aligned}
& d\pi_m\left(C_{r(m)}(v_1)\right) F_p^m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right) \\
&\quad = \int_{\mathbb{C}} F_p^m(z')\, r(m)\, S_m(d\pi_m(v_1))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}, z'\right) < E_{z'}^m, E_{z/\sqrt{2\lambda m}}^m >_m\; d\mu_m(z') \\
&\quad = \frac{m+1}{m}\, r(m)\int_{\mathbb{C}} F_p^m(z')\, S_m(d\pi_m(v_1))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}, \frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right) \\
&\qquad\qquad < E_{z'/\sqrt{2\lambda m}}^m, E_{z/\sqrt{2\lambda m}}^m >_m \left(1 + \frac{z'\overline{z}'}{2\lambda m}\right)^{-m-2}\frac{dx'dy'}{2\lambda\pi}
\end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité comme dans les preuves des Propositions 5.2 et 5.4. 1) à l'aide du Lemme 6.1 en appliquant le théorème de la convergence dominée après avoir remarqué que

$$S_m(d\pi_m(v_1))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}, \frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right) < E^m_{\frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}}, E^m_{\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}} >_m = -\frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{8\lambda}}(z+\overline{z}')\left(1+\frac{z\overline{z}'}{2\lambda m}\right)^{m-1}$$

et que

$$\left|1+\frac{z\overline{z}'}{2\lambda m}\right|^{m-1} \leq \left(1+\frac{|z|^2}{2\lambda m}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(1+\frac{|z'|^2}{2\lambda m}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

On déduit 2) de 1) comme dans la preuve de la Proposition 5.4 après avoir montré, en revenant à l'expression de $d\pi_m$, qu'étant donnés $X$ élément de $\mathfrak{h}$ et $p$ entier positif, il existe des réels $A, B$ tels que pour tout $m$ entier positif et $z \in \mathbb{C}$ :

$$\left|d\pi_m\left(C_{r(m)}\left(X\right)\right) F_p^m\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\right)\right| \leq A + B\,|z|^{p+1}.$$

Enfin 3) est une conséquence de 2). En effet, pour $X = v_1$ par exemple, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|A_m\, d\pi_m\left(C_{r(m)}(v_1)\right) A_m^{-1}\, f_p^\lambda - d\pi_m\left(C_{r(m)}\left(v_1\right)\right) F_p^m\left(\frac{\cdot}{\sqrt{2\lambda m}}\right)\right\|_\lambda \\
&= \|A_m\, d\pi_m(r(m)\, u_1)(A_m^{-1}\, f_p^\lambda - F_p^m)\|_\lambda \\
&\leq r(m)\, \|A_m\|_{op}\, \|d\pi_m\,(u_1)(A_m^{-1}\, f_p^\lambda - F_p^m)\|_m \\
&\leq \frac{1}{2}\, r(m)\, \sqrt{(p+1)^2 + (m-p+1)^2}\, \left(\sqrt{\frac{m^p}{p! C_m^p}} - 1\right)
\end{aligned}$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque $m$ tend vers $+\infty$.

Par analogie avec le Paragraphe 5, on dira que le point 3) de la proposition précédente exprime que les différentielles $(d\pi_m)$ se contractent vers $d\rho_\lambda$.

## 7. Compléments

**7.1.** On va voir ici que lorsque $\lambda$ est un réel strictement négatif on peut obtenir la représentation $\widetilde{\rho}_\lambda$ de $H$ par contraction d'une suite de représentations unitaires de $G$ équivalentes aux représentations $\pi_m$ et que, plus généralement, on peut établir alors les mêmes résultats que ceux des Paragraphes 5 et 6.

Soit $m$ un entier positif. Lorsqu'on exprime l'action naturelle de $G$ sur les sections holomorphes du fibré holomorphe $L_m$ du Paragraphe 2.2 dans la carte $\varphi'_m$ de l'orbite $\mathcal{O}_m$ donnée par la section $\sigma'$ (voir le Paragraphe 4.2) on obtient la représentation unitaire $\pi'_m$ de $G$, équivalente à $\pi_m$, réalisée dans le même espace de Hilbert $\mathcal{F}_m$ que $\pi_m$, donnée par

$$(\pi'_m\,(g)\,F)(z) = (\overline{\alpha} - \beta\, z)^m\, F\left(\frac{\alpha\, z + \overline{\beta}}{-\beta\, z + \overline{\alpha}}\right)$$

pour $g = g(\alpha, \beta) \in G$ , $F \in \mathcal{F}_m$ et $z \in \mathbb{C}$.
L'opérateur d'entrelacement entre $\pi_m$ et $\pi'_m$ associe à tout polynôme $F(z)$ de $\mathcal{F}_m$ le polynôme $z^m\, F(1/z)$.

Remarquons que

$$\pi'_m\,(g(\alpha\,,\,\beta)) = \pi_m(g(\overline{\alpha}\,,\,-\overline{\beta}))\,.$$

Par suite, si $(r(m))$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{m\to+\infty}(m\; r(m)^2) = 2\,|\lambda|$ et si $g_m = g(\alpha_m\,,\,\beta_m)$ est une suite d'éléments de $G$ convergeant vers l'identité de $G$ telle que la suite $c^{-1}_{r(m)}\,(g_m)$ converge vers l'élément $[a, b, c]$ de $H$, le Lemme 4.2 montre que la suite $g'_m = g\,(\overline{\alpha}_m\,,\,-\overline{\beta}_m)$ satisfait à $\lim_{m\to+\infty}\; c^{-1}_{r(m)}\,(g'_m) = [a, -b, -c]$.

On a alors, en utilisant la Proposition 5.1 :

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty} S_m\,(\pi'_m\,(g_m))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\,,\,\frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = \lim_{m\to+\infty} S_m\,(\pi_m(g'_m))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda m}}\,,\,\frac{z'}{\sqrt{2\lambda m}}\right)\\
&= S_{|\lambda|}\,(\rho_{|\lambda|}([a,-b,-c])(-z,-z')\\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}|\lambda|\,(a^2+b^2) - i\,c\,|\lambda| + \frac{1}{2}\,(b-a\,i)\,z - \frac{1}{2}\,(b+a\,i)\,\overline{z}'\right)\\
&= S_\lambda\,(\rho_\lambda\,[a,b,c])(-z,-z')\\
&= S_\lambda(\tilde{\rho}_\lambda([a,b,c]))(z,z').
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on obtient l'analogue des Propositions 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 et 5.6 pour $\lambda < 0$ en y remplaçant $\pi_m$ par $\pi'_m$ (et $\sqrt{2m\lambda}$ par $\sqrt{2m|\lambda|}$).

D'autre part, on vérifie aisément que, si on paramètre l'orbite $\mathcal{O}_m$ au moyen de la carte $\varphi'_m$ le calcul de Berezin $s_m$ est encore adapté, c'est à dire que

$$s_m\,(d\pi'_m\,(X))(z) = i\widetilde{X}\,(\varphi'_m\,(z))$$

pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $z \in \mathbb{C}$. Utilisant le dernier résultat du Paragraphe 4.2, on obtient l'analogue du Lemme 6.1 et de la Proposition 6.2 dans le cas $\lambda < 0$ en remplaçant $\pi_m$ par $\pi'_m$.

**7.2.** On peut se demander si, dans la Proposition 5.6, il est possible de remplacer les opérateurs $A_m$ par des opérateurs unitaires de $\mathcal{F}_m$ dans $\mathcal{F}^\lambda_m$ afin de se rapprocher de la définition de la contraction d'une famille de représentations donnée dans [16]. En particulier, il paraît naturel de se demander si les opérateurs $B_m$ définis par $B_m(F^m_p) = f^\lambda_p$ pour $p = 0, 1 \ldots m$ conviennent. On va répondre à cette question par l'affirmative.

**Lemme 7.1.** *Soient $(g_m)$ une suite de $G$ convergeant vers l'identité de $G$ telle que la suite $(c^{-1}_{r(m)}(g_m))$ converge vers un élément de $H$ et $p$ un entier positif. Il existe une série convergente $\sum_{q\geq 0} v(q)$ telle que, pour tous $m \geq 0$ et $q \geq 0$,*

$$|<\pi_m\,(g_m)\,F^m_p\,,\,F^m_q>_m|^2 \leq v(q).$$

*Preuve.* Posons $g_m = g(\alpha_m, \beta_m)$. On a :

$$\begin{aligned}(\pi_m(g_m)F_p^m)(z) &= \sqrt{C_m^p}(\overline{\beta}_m z + \alpha_m)^{m-p}(\overline{\alpha}_m z - \beta_m)^p \\ &= \sqrt{C_m^p}(\overline{\beta}_m z + \alpha_m)^{m-p}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \overline{\alpha}_m^k (-\beta_m)^{p-k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k . E_k\end{aligned}$$

où l'on a posé pour $0 \leq k \leq p$ :

$$E_k = \overline{\alpha}_m^k \beta_m^{p-k} \sum_{l=0}^{m-p} \frac{\sqrt{C_m^p}.C_{m-p}^l}{\sqrt{C_m^{l+k}}} \alpha_m^{m-p-l} \overline{\beta}_m^l F_{l+k}^m.$$

On a alors :

$$< E_k, F_{l+k}^m >_m = \overline{\alpha}_m^k \beta_m^{p-k} \sum_{l=0}^{m-p} \frac{\sqrt{C_m^p}.C_{m-p}^l}{\sqrt{C_m^{l+k}}} \alpha_m^{m-p-l} \overline{\beta}_m^l.$$

Compte tenu de l'hypothèse sur la suite $(g_m)$, la suite $(\alpha_m^{m-p-l})_m$ est bornée et il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $m \geq 0$,

$$|\beta|^{p-k+l} \leq A^l \ m^{-\frac{1}{2}(p-k+l)}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{C_m^p (C_{m-p}^l)^2}{C_m^{l+k}} &= (m-p-l+1)\cdots(m-p)(m-l-p+1)\cdots(m-l-k).\frac{(l+k)!}{p!.l!^2} \\ &\leq (m-p)^l (m-l-k)^{p-k} \ \frac{(l+p)!}{p!.l!^2}.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que, pour tous $m \geq 0$, $l \geq 0$ :

$$\begin{aligned}| < E_k, F_{l+k}^m >_m |^2 &\leq C(m-p)^l (m-l-k)^{p-k} A^{2l} m^{-(p-k)-l} \frac{(l+p)!}{l!^2} \\ &\leq C(1-\frac{p}{m})^l (1-\frac{l+k}{m})^{p-k} A^{2l} \frac{(l+p)!}{l!^2} \\ &\leq C.A^{2l}\frac{(l+p)!}{l!^2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

**Proposition 7.2.** *Soient $(g_m)$ une suite de $G$ convergeant vers l'identité de $G$ et $h$ un élément de $H$ tels que $\lim_{m\to+\infty} c_{r(m)}^{-1}(g_m) = h$. Pour tout polynôme à coefficients complexes $P$, on a :*

$$\lim_{m\to+\infty} \|(B_m \, \pi_m \, (g_m) \, B_m^{-1}) \, P - \widetilde{\rho}_\lambda \, (h) \, P\|_\lambda = 0 \, .$$

*Preuve.* Il suffit de considérer le cas où $P = f_p^\lambda$, $p$ étant un entier positif donné. Posons $u_m(q) =< \pi_m(g_m)F_p^m, F_q^m >_m$ et $u(q) ==< \widetilde{\rho}_\lambda(h)f_p^\lambda, f_q^\lambda >_\lambda$ pour $m \geq 0$ et $q \geq 0$. D'après le lemme précédent, il existe une série convergente $\sum_{q\geq 0} v(q)$ telle que $|u_m(q)|^2 \leq v(q)$ pour tous $m \geq 0$, $q \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_m(q) - u(q)|^2 &\leq |u_m(q)|^2 + |u(q)|^2 + 2|u_m(q)||u_(q)| \\ &\leq v(q) + |u(q)| + 2\sqrt{v(q)}|u(q)| =: w(q) \end{aligned}$$

pour $m \geq 0$, $q \geq 0$. La série dont le terme général $w(q)$ est le second membre de l'inégalité précédente étant également convergente. Comme on vérifie immédiatement que

$$\|(B_m\pi_m(g_m)B_m^{-1})f_p^\lambda - \widetilde{\rho}_\lambda(h)f_p^\lambda\|_\lambda^2 = \sum_{q\geq 0} |u_m(q) - u(q)|^2,$$

le résultat découle de ce qui précède et de la Proposition 5.2.

**Remerciements.** Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Sylvie Maggipinto qui a dactylographié ce texte.

## Références

[1] Arnal, D.; Cahen, M.; Gutt, S.: *Representations of compact Lie groups and quantization by deformation.* Acad. R. Belg. Bull. Sc. 5e série, LXXIV, 4-5 (1988), 123–141. Zbl 0681.58016

[2] Arnal, D.; Cahen, M.; Gutt, S.; Zahir, H.: *A Moyal type star product on Hermitian symmetric spaces.* Acad. R. Belg. Bull. Sc. 6e série, II, 1-3 (1991) 91-103. Zbl 0854.22008

[3] Cahen, B.: *Deformation Program for Principal Series Representation.* Lett. Math. Phys. **36** (1996), 65–75. Zbl 0843.22020

[4] Cahen, B.: *Quantification d'une orbite massive d'un groupe de Poincaré généralisé.* C.R. Acad. Sci. Paris t. 325, série I (1997) 803–806. Zbl 0883.22016

[5] Cahen, B.: *Quantification d'orbites coadjointes et théorie des contractions.* Journ. Lie Theory **11**(2) (2001), 257–272. Zbl 0973.22009

[6] Cotton, P.; Dooley, A. H.: *Contraction of an Adapted Functional Calculus.* Journ. Lie Theory **7**(2) (1997), 147–164. Zbl 0882.22015

[7] Cishahayo, C.; De Bièvre, S.: *On the contraction of the discrete series of $SU(1,1)$.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **43**(2) (1993), 551–567. Zbl 0793.22005

[8] Cahen, M.; Gutt, S.; Rawnsley, J.: *Quantization on Kähler manifolds I : Geometric interpretation of Berezin quantization.* J. Geom. Phys. **7**(1) (1990), 45–62. Zbl 0719.53044

[9] Dooley, A. H.: *Contractions of Lie groups and applications to analysis.* In: Topics in Modern Harmonic Analysis. Rome, Ist. di Alta Mat (1983), 483–515. Zbl 0551.22006

[10] Dooley, A. H.; Rice, J. W.: *On contractions of semisimple Lie groups.* Trans. Amer. Math Soc. **289**(1) (1985), 185–202. Zbl 0546.22017

[11] Dooley, A. H.; Rice, J. W.: *Contractions of rotation groups and their representations.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 509–517. Zbl 0532.22014

[12] Folland, B.: *Harmonic Analysis in Phase Space.* Princeton Univ. Press 1989. Zbl 0682.43001

[13] Inonu, E.; Wigner, E. P.: *On the contraction of groups and their representations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), 510–524. Zbl 0050.02601

[14] Levy-Nahas, M.: *Deformation and Contraction of Lie Algebras.* Journ. Math. Phys. **8**(6) (1967), 1211–1222. Zbl 0175.24803

[15] Levy-Nahas, M.: *Représentations des groupes de Heisenberg.* Dans Bernat P. et al, Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod Paris (1972), 153–175. Zbl 0248.22012

[16] Mickelsson, J.; Niederle, J.: *Contractions of Representations of de Sitter Groups.* Commun. math. Phys. **27** (1972), 167–180. Zbl 0236.22021

[17] Renaud, J.: *The contraction of the $SU(1,1)$ discrete series of representations by means of coherent states.* Journ. Math. Phys. **37**(7) (1996), 3168–3179. Zbl 0860.22013

[18] Ricci, F.: *A Contraction of $SU(2)$ to the Heisenberg Group.* Mh. Math. **101** (1986), 211–225. Zbl 0588.43007

[19] Ricci, F.; Rubin, R. L.: *Transferring Fourier Multipliers from $SU(2)$ to the Heisenberg Group.* Amer. Journ. Math. **108** (1986), 571–588. Zbl 0613.43005

[20] Kostant, B.: *Quantization and unitary representations.* In: Lecture Notes in Math. **170**, Springer Berlin 1970, 87–208. Zbl 0223.53028

[21] Saletan, E. J.: *Contraction of Lie Groups.* Journ. Math. Phys. **2**(1) (1961), 1–21. Zbl 0098.25804

[22] Wildberger, N. J.: *Convexity and unitary representations of a nilpotent Lie group.* Invent. Math. **89** (1989), 281–292. Zbl 0684.22005

[23] Woodhouse, N. M. J.: *Geometric Quantization.* Clarendon Press, Oxford 1992. Zbl 0747.58004

Received May 30, 2002