Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 41 (2000), No. 1, 1-6.

Eine gemeinsame Kennzeichnung der Krümmungsachse bei Regelflächen und Kurven

Walter Benz

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg
D-20146 Hamburg, Germany
e-mail: benz@math.uni-hamburg.de

0. In einer Vorlesung über Differentielle Liniengeometrie im WS 1998/99, einem Gebiet, das so bedeutende Mathematiker wie William Rowan Hamilton (1805–1865), Eduard Kummer (1810–1893), Julius Plücker (1801–1868), Alfred Clebsch (1833–1872), Felix Klein (1849–1925), Eduard Study (1862–1930) schon im 19. Jahrhundert zur hohen Blüte geführt haben, erschienen mir immer wieder Rückgriffe auf Ansätze und Motivationen dieser frühen Zeit als höchst aufschlußreich, und dann schließlich als wohl eigentlich unverzichtbar zum Verständnis dieser großartigen geometrischen Disziplin. Im Zuge eines solchermaßen beeinflußten Aufbaus meiner Vorlesung suchte ich eine einfache und natürliche Charakterisierung der Krümmungsachse bei Regelflächen, und dies in der Nähe einer ebensolchen bei Kurven. Das Resultat, das ich weder für Regelflächen noch für Kurven in der Literatur fand, ist nachstehend wiedergegeben.

1. Sei $\mathbb{D}$ der Ring der dualen Zahlen $a + b\varepsilon$ mit $a, b \in \mathbb{R} \not\ni \varepsilon$ und $\varepsilon^2 = 0$. Sind dann $f_i(h)$, $g_i(h)$ reellwertige Funktionen für $i = 1, 2$, die in einer Umgebung $I \subset \mathbb{R}$ von $h = 0$ definiert sind, so setzen wir

$$f_1(h) + \varepsilon f_2(h) = g_1(h) + \varepsilon g_2(h) \quad [h^3]$$

genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(h) - g_1(h)}{h^3} \text{ und } \lim_{h\to 0} \frac{g_1(h) - g_2(h)}{h^3}$$

existieren.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und sei

$$X(s) = x(s) + \varepsilon\overline{x}(s),\ s \in J,$$

eine in Plückerkoordinaten $x, \overline{x}$ geschriebene, dreimal stetig differenzierbare Regelfläche des $\mathbb{R}^3$ ohne zylindrische Stellen. Dabei sei s ihr natürlicher Parameter, d.h., die Bogenlänge ihres sphärischen Bildes. Dann beweisen wir

Satz 1. *Der beliebig vorgegebene Strahl K des $\mathbb{R}^3$ ist (bis auf das Vorzeichen) genau dann die Krümmungsachse der Regelfläche in $s \in J$, wenn*

$$X(s+h) \cdot K = X(s) \cdot K \quad [h^3] \tag{1}$$

gilt.

Lokal können wir also sagen, daß die Krümmungsachse, abgesehen von ihrer Richtung, derjenige Strahl ist, der bezüglich $X(s+h)$ und $X(s)$ gleiches Verhalten zeigt: die gleichen Winkel werden eingeschlossen, die gleichen Abstände liegen vor. An Literatur über die verwendeten Begriffe nennen wir die Bücher [2], [3], [4] und auch die Schrift [1].

Es ist vielleicht nicht uninteressant, darauf hinzuweisen, daß der Satz 1 mutatis mutandis auch für die Kurventheorie gilt:

Satz 2. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und sei $x(s)$, $s \in J$, eine dreimal stetig differenzierbare Kurve des $\mathbb{R}^3$ mit nichtverschwindender Krümmung $\kappa(s)$ in J. Dabei sei s ihre Bogenlänge. Die beliebig vorgegebene Gerade*

$$K = p + \mathbb{R}v,\ v^2 = 1,$$

des $\mathbb{R}^3$ ist genau dann die Krümmungsachse der Kurve in $s \in J$, wenn

$$x(s+h) \cdot v = x(s) \cdot v \quad [h^3] \tag{2}$$

und

$$\text{Abstand}(x(s+h), K) = \text{Abstand}(x(s), K) \quad [h^3] \tag{3}$$

gelten.

Zu den verwendeten Begriffen der Kurventheorie verweisen wir auf die Bücher [5], [6].

2. Stellen die Strahlen

$$X = X(s),\ N = N(s),\ R = R(s)$$

das begleitende Dreibein der Regelfläche in $s \in J$ dar, wobei N die Kehlpunktnormale und R das Vektorprodukt $X \wedge N$ bezeichnen, so ist

$$A := \frac{PR + QX}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

nach der Namensgebung durch Wilhelm Blaschke die Krümmungsachse der Regelfläche in s. Dabei sind

$$P = 1 + \varepsilon d$$

und

$$Q = \frac{(X, X', X'')}{(X')^2}$$

die zugehörigen Invarianten in s mit $d = d(s)$ als reziprokem Drall. Ableitungen nach dem natürlichen Parameter s wurden zudem mit einem Strich geschrieben. Beachtet man die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} X' &= PN \\ N' &= -PX + QR \\ R' &= -QN, \end{aligned}$$

so gilt für $s + h \in J$ offenbar

$$X(s+h) - X = -\frac{h^2 P^2}{2} X + \left(hP + \frac{h^2}{2} P'\right) N + \frac{h^2 PQ}{2} R + \frac{h^3}{6} X''', \tag{4}$$

wobei die Komponenten von X''' an geeigneten Stellen $s + \vartheta_i h$ mit $0 \leq \vartheta_i \leq 1$ für $i = 1, 2, 3$ zu nehmen sind. Das Tripel X, N, R ist orthonormiert, da sich diese Strahlen paarweise senkrecht im Kehlpunkt $k(s)$ schneiden. Also gilt wegen der Stetigkeit von Real- und Dualteil von X''' in s

$$(X(s+h) - X) \cdot A = 0 \; [h^3],$$

d.h., wir haben (1) für $K = A$ und auch für $K = -A$.

Sei nun umgekehrt K ein beliebiger Strahl des $\mathbb{R}^3$, der (1) genügt. Setzen wir

$$K = \alpha X + \beta N + \gamma R$$

mit eindeutig bestimmten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$, die

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{5}$$

befriedigen müssen, so folgt mit (4)

$$(X(s+h) - X)\, K = -\frac{\alpha h^2}{2} P^2 + \beta \left(hP + \frac{h^2 P'}{2}\right) + \frac{\gamma h^2 PQ}{2} + \frac{h^3}{6} X''' K.$$

Da dieser Ausdruck $= 0\,[h^3]$ ist, so gilt bereits

$$2\beta h P + h^2(-\alpha P^2 + \beta P' + \gamma PQ) = 0 \quad [h^3]. \tag{6}$$

Im Falle $s - h \in J$ ist (6) auch erfüllt, wenn wir dort h durch $-h$ ersetzen. Also gilt

$$\beta P = 0 = -\alpha P^2 + \beta P' + \gamma PQ.$$

Da $P \in \mathbb{D}$ Einheit ist, folgt $\beta = 0$ und $\alpha = \gamma Q P^{-1}$. Mit (5) ergibt sich dann $K = A$ oder $K = -A$.

3. Stellen die Vektoren

$$t = t(s) = x'(s),\ n = n(s),\ b = b(s)$$

das begleitende Dreibein der Kurve in $s \in J$ dar, wobei n den Hauptnormalenvektor und b das Vektorprodukt $t \wedge n$, also den Binormalenvektor, bezeichnen, so ist mit $x = x(s)$

$$A := x + \frac{1}{\kappa} n + \mathbb{R}b \tag{7}$$

die Krümmungsachse der Kurve in s. Beachtet man hier

$$t' = \kappa n,$$

so gilt für $s + h \in J$ offenbar

$$x(s+h) - x = ht + \frac{h^2}{2} \kappa n + \frac{h^3}{6} x''', \tag{8}$$

wobei wiederum die Komponenten von x''' an geeigneten Stellen $s + \vartheta_i h$ mit $0 \leq \vartheta_i \leq 1$ für $i = 1, 2, 3$ zu nehmen sind. Trivialerweise gilt dann (2) für $v = b$.

Der Abstand von x und A ist $\frac{1}{\kappa}$. Bezeichnet $\xi(h)$ den Abstand von $x(s+h)$ und A, so haben wir

$$\xi(h) = \left| \left(x(s+h) - x - \frac{1}{\kappa} n \right) \wedge b \right|,$$

d.h.

$$(\xi(h))^2 =: \frac{1}{\kappa^2} + h^3 \left(\frac{1}{3\kappa} + h \cdot L \right)$$

mit existierendem Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} L$. Also strebt

$$\frac{1}{h^3} \left(\xi(h) - \frac{1}{\kappa} \right) = \frac{(\xi(h))^2 - \frac{1}{\kappa^2}}{h^3 \left(\xi(h) + \frac{1}{\kappa} \right)}$$

für $h \to 0$ gegen $\frac{1}{6}$. Damit gilt auch (3) für $K = A$.

Wir kommen nun zum Beweis des interessanteren Teils von Satz 2. Sei K also eine beliebige Gerade des $\mathbb{R}^3$, die (2) und (3) genügt. Aus (2) und (8) folgt

$$htv + \frac{h^2}{2} \kappa n v + \frac{h^3}{6} x''' v = 0 \quad [h^3],$$

d.h. $tv = 0$ und $nv = 0$. Damit ist $v = b$ oder $v = -b$. Ohne Einschränkung setzen wir $v = b$. Bezeichnet $\eta(q)$ den Abstand des Punktes $q \in \mathbb{R}^3$ von K, so gilt

$$\eta^2(q) = ((q - p) \wedge b)^2. \tag{9}$$

Offenbar ist $\lim\limits_{h\to 0}[\eta(x(s+h))+\eta(x)] = 2\eta(x)$. Mit (3) existiert damit

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta^2(x(s+h))-\eta^2(x)}{h^3}.$$

Setzen wir

$$r := (x-p)\wedge b,$$

so gilt also, wenn wir (8) beachten,

$$r^2 = \left(r + \frac{h^2}{2}\,\kappa t - hn + \frac{h^3}{6}\,x''' \wedge b\right)^2 \quad [h^3],$$

d.h.

$$0 = -2hnr + h^2(1+\kappa tr) \quad [h^3].$$

Es ergibt sich damit $nr = 0$ und $1+\kappa tr = 0$. Daraus folgt

$$r = -\frac{1}{\kappa}\,t + \zeta b$$

mit passendem $\zeta \in \mathbb{R}$, d.h.

$$(x-p)\wedge b = -\frac{1}{\kappa}\,t + \zeta b. \tag{10}$$

Setzen wir

$$x - p = \alpha t + \beta n + \gamma b$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so ergibt (10)

$$-\frac{1}{\kappa}\,t + \zeta b = -\alpha n + \beta t,$$

d.h. $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{\kappa}$, $\zeta = 0$. Also gilt

$$p = x + \frac{1}{\kappa}\,n - \gamma b,$$

d.h., es ist $K = A$.

Bemerkung. Betrachtet man neben der Kurve $x(s)$, $s \in J$, von Satz 2 auch ihre Tangentenfläche

$$X(s) = x'(s) + \varepsilon\,(x(s)\wedge x'(s)),\ s \in J,$$

so kann man bekanntlich das Dreibein von $X(s)$ in s mit demjenigen von $x(s)$ in s identifizieren. Hier kennzeichnet (1) offenbar die Strahlen durch

$$x(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\,n(s),$$

τ die Torsion von $x(s)$ in s, die parallel zum Darbouxschen Vektor von $x(s)$ in s sind. Genau im Falle $\tau(s) = 0$ ist offenbar die Trägergerade dieser Strahlen Krümmungsachse der Kurve $x(s)$ in s.

Literatur

[1] Benz, W.: *On Study's Übertragungsprinzip.* J. Geom. **64** (1999), 1–7.

[2] Blaschke, W.: *Differentialgeometrie.* Springer Verlag, Berlin 1921.

[3] Haack, W.: *Differentialgeometrie II.* Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hannover 1948.

[4] Hoschek, J.: *Liniengeometrie.* BI Wissenschaftsverlag, Zürich 1971.

[5] Klotzek, B.: *Einführung in die Differentialgeometrie I, II.* Verlag Harri Deutsch. Thun und Frankfurt am Main 1995.

[6] Laugwitz, D.: *Differentialgeometrie*, 2. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1968.

Received March 25, 1999