Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 40 (1999), No. 2, 417-436.

Produit tensoriel tressé et Algèbre de Lie dans une catégorie tressée

A. Haddi **S. Hadj Nassar**

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Tétouan B.P 2121
e-mail: haddi-aziz@hotmail.com

Laboratoire SD-TAS, Faculté des Sciences et techniques, Tanger B.P 416
e-mail: hadjnassar@fstt.ac.ma

Résumé. Dans une catégorie tensorielle tressée $\zeta = (\zeta, \otimes, I)$ nous introduisons la notion de produit tensoriel tressé. Dans le cas où ζ est une Ab-catégorie nous proposons une définition d'algèbre de Lie dans ζ comme conséquence d'une surprenante relation entre l'anticommutativité et l'identité de Jacobi. Enfin, comme exemple d'application du produit tensoriel tressé nous montrons que $A \otimes_\zeta g$ est une algèbre de Lie de ζ chaque fois que A est une algèbre commutative de ζ et g une algèbre de Lie de ζ. Lorsque ζ est abélienne, nous définissons $\mathrm{Prim}(A)$ l'objet primitif d'une bigèbre A de ζ et nous montrons que $\mathrm{Prim}(A)$ est une algèbre de Lie de ζ. Finalement, nous formulons la notion de dérivation d'une algèbre A de ζ, comme dans le cas classique, nous obtenons que $\mathrm{Der}(A)$ est une algèbre de Lie de ζ.

Introduction

Les résultats de cet article se basent sur le concept de catégorie tressée introduit par Joyal et Street en 1991 (cf. [3]). Au paragraphe 1, nous introduisons la notion de produit tensoriel tressé généralisant le produit tensoriel tressé de deux algèbres évoqué par Baez [1] et mettons en évidence quelques unes de ses propriétés.

En procédant comme Manin (cf. [7], p.81), nous proposons au paragraphe 2, une définition d' algébre de Lie dans une Ab-catégorie tensorielle tressée ζ, de telle sorte que si (A, m) est une algèbre associative de ζ, A munie du crochet $[\cdot,\cdot] = m - m \circ c_A$ est une algèbre de Lie

0138-4821/93 \$ 2.50

de ζ où c_A est le tressage de l'objet A. Au paragraphe 3 nous donnons quelques propriétés des algèbres de Lie de ζ. Plus précisément, nous montrons que l'objet primitif d'une bigèbre A d'une catégorie tensorielle tressée abélienne ζ possède une structure d'algèbre de Lie de ζ. Enfin, en nous plaçant dans une catégorie de k-modules, nous construisons un automorphisme $\widetilde{c} : \mathrm{Der}(A) \otimes_k \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(A) \otimes_k \mathrm{Der}(A)$ vérifiant l'équation de Yang-Baxter. Il existe alors une catégorie tensorielle tressée ζ_0, telle que $\mathrm{Der}(A)$, muni du crochet $[\ \ ] = m_0 - m_0 \circ \widetilde{c}$ soit une algèbre de Lie de ζ_0, m_0 étant la composition des flèches.

1. Le produit tensoriel tressé

1.1. Catégories tensorielles tressées

Nous donnons ici quelques rappels. Pour plus de détails on pourra consulter [5].

Définition 1. *Une catégorie tensorielle tressée (stricte) $\zeta = (\zeta, \otimes, I, c)$ est la donnée d'une catégorie tressée ζ, d'un objet I de ζ, d'un foncteur $\otimes : \zeta \times \zeta \to \zeta$ et d'une famille d'isomorphismes naturels $c_{U,V}$ de ζ indexés par tous les couples (U, V) d'objets de ζ, vérifiant:*

(a) *ζ est associatif pour les objets et les morphismes de ζ.*

(b) *Pour tout objet V de ζ,*

$$I \otimes V = V \otimes I = V. \tag{1}$$

(c) *Pour tout morphisme f de ζ,*

$$f \otimes id_I = id_I \otimes f = f. \tag{2}$$

(d) *Pour tous objets U, V et W de ζ*

$$c_{U,V\otimes W} = (id_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes id_W), \tag{3}$$

$$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c_{V,W}). \tag{4}$$

Le triplet $(\zeta, \otimes, I)$ est appelé catégorie tensorielle (stricte) et pour tout objet V de ζ, $c_{V,V}$ est noté c_V.

Remarque 1. (i) La fonctorialité de $\otimes$ se traduit, chaque fois que la composition a un sens, par les relations:

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) = (h \circ f) \otimes (k \circ g), \tag{5}$$

$$id_U \otimes id_V = id_{U\otimes V}, \tag{6}$$

f, g, h et k étant des flèches et U, V des objets de ζ.

(ii) La naturalité des tressages signifie que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(V, V')$ et tout $g \in \mathrm{Hom}_\zeta(W, W')$

$$c_{W',V'}(g \otimes f) = (f \otimes g)c_{W,V}. \tag{7}$$

Rappelons la définition suivante de Turaev [8]:

Définition 2. *Une Ab-catégorie tensorielle $\zeta = (\zeta, \otimes, I)$ est une catégorie tensorielle ζ telle que:*

(i) *ζ soit une Ab-catégorie*

(ii) *l'application $(f, g) \to f \otimes g$, où f et g sont des flèches de ζ, est biadditive.*

Exemple 1. (i) La catégorie des k-modules Mod_k munie de la volte τ définie par $\tau_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$. En vertu du théorème de cohérence de MacLane (cf. [6] ou [5], p.291) Mod_k est équivalente à une catégorie tensorielle tressée stricte qui est de surcroît une Ab-catégorie tensorielle.

(ii) Soit g un k-module muni d' un automorphisme $c : g \otimes g \to g \otimes g$ vérifiant l'équation de Yang-Baxter: $c_2 c_1 c_2 = c_1 c_2 c_1$ où $c_1 = c \otimes id_g$ et $c_2 = id_g \otimes c$. On peut associer à g une Ab-catégorie tensorielle tressée dont les objets sont les puissances tensorielles de g, les flèches les applications linéaires f qui vérifient (7) pour $g = id_W$ et les tressages sont définis par récurrence à partir de c_g par les relations (3) et (4).

Par la suite, nous utiliserons constament le résultat suivant [8]:

Proposition 1. *Soient $\zeta = (\zeta, \otimes, I)$ une Ab-catégorie tensorielle et $K = \mathrm{Hom}_\zeta(I, I)$ on a alors:*

(a) *K est un anneau commutatif unitaire (appelé l'anneau de base de la catégorie ζ).*

(b) *Pour tous objets U, V de ζ, $\mathrm{Hom}_\zeta(U, V)$ est muni d'une structure de K-module définie par la relation $k \cdot f = k \otimes f$; pour tous $k \in K$ et $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(U, V)$.*

(c) *L'application $(f, g) \to f \circ g$ est K-bilinéaire.*

(d) *L'application $(f, g) \to f \otimes g$ est K-linéaire à gauche, de plus elle est K-bilinéaire si la catégorie est tressée.*

(e) *Pour tout objet U de ζ,*

$$c_{A,I} = c_{I,A} = id_A. \tag{8}$$

Convention et notations. Si V est un objet d'une catégorie tensorielle stricte ζ, on notera V^n le produit tensorielle $V \otimes V \otimes V \ldots \otimes V$ (n fois), avec la convention $V^0 = I$. Pour tout morphisme $f : V^2 \to V^{2-k}$ ($k \in \{0, 1\}$) on pose: $f_i = id_{V^{i-1}} \otimes f \otimes id_{V^{n-i-1}} : V^n \to V^{n-k}$ où $n \geq 2$ et $i \in [1, n-1]$. En particulier, si $[\ ,\ ] : g^2 \to g$ est une flèche de ζ et $n = 3$, on écrira $[\ ,\ ]_1 = [\ ,\ ] \otimes id_g$ et $[\ ,\ ]_2 = id_g \otimes [\ ,\ ]$. Enfin K désignera l'anneau $\mathrm{Hom}_\zeta(I, I)$.
Pour tous objets U, V de ζ et tout $n \in \mathbf{N}$, nous définissons, par récurrence, un opérateur de séparation $S_{(U \otimes V)^n} : (U \otimes V)^n \to U^n \otimes V^n$ par les relations

$$\begin{aligned} &S_1 = id_I\ ,\ S_{U \otimes V} = id_{U \otimes V}\ , \\ &S^{(n+m)}_{(U \otimes V)} = (id^n_U \otimes C_{V^n, U^m} \otimes id^m_V)(S^n_{(U \otimes V)} \otimes S_{(U \otimes V)^m}). \end{aligned} \tag{9}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité $S_{(U \otimes V)^n}$ sera noté S_n.

Définition 3. *Soient $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(U^P, V^q)$ et $g \in \mathrm{Hom}_\zeta(V^p, V^q)$, on appelle produit tensoriel tressé de f par g la flèche de ζ définie par*

$$f \otimes_\zeta g = S_q^{-1}(f \otimes g) S_p \tag{10}$$

1.2. Propriétés du produit tensoriel tressé

Proposition 2. *Si ζ est une Ab-catégorie tensorielle tressée, le produit tensoriel tressé est K-bilinéaire.*

Preuve. Il résulte de la Proposition 1 que le produit tensoriel ainsi que la composition des flèches sont K-bilinéaires. Il s'en suit alors que le produit tensoriel tressé est K-bilinéaire.□

Le résultat suivant met en évidence les relations de "fonctorialité" vérifiées par le produit tensoriel tressé.

Proposition 3. *Soient U, V deux objets d'une catégorie tensorielle tressée ζ. Pour tous $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(U^p, U^q)$, $g \in \mathrm{Hom}(V^p, V^q)$, $f' \in \mathrm{Hom}_\zeta(U^q, U^r)$ et $g' \in \mathrm{Hom}(V^q, V^r)$:*

(i)
$$(f' \otimes_\zeta g')(f \otimes_\zeta g) = (f' \circ f) \otimes_\zeta (g' \circ g), \tag{11}$$

(ii)
$$id_{U^n} \otimes_\zeta id_{V^n} = id_{(U \otimes V)^n}. \tag{12}$$

Preuve. (i) Par définition

$$(f' \otimes_\zeta g')(f \otimes_\zeta g) = S_r^{-1}(f' \otimes g')(f \otimes g)S_p.$$

De (5) on obtient:

$$(f' \otimes_\zeta g')(f \otimes_\zeta g) = S_r^{-1}[(f' \circ f') \otimes (g' \circ g)]S_p = (f' \circ f) \otimes_\zeta (g' \circ g).$$

(ii) résulte immédiatement de (6). □

On obtient une deuxième relation de fonctorialité en remplaçant la composition par le produit tensoriel.

Proposition 4. *Soient $(\zeta, \otimes, I)$ une catégorie tensorielle, $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(U^n, V^m)$, $g \in \mathrm{Hom}_\zeta(V^n, V^m)$, $f' \in \mathrm{Hom}(U^p, U^q)$ et $g \in \mathrm{Hom}_\zeta(V^p, V^q)$. Alors*

$$(f \otimes f') \otimes_\zeta (g \otimes g') = (f \otimes_\zeta g) \otimes (f' \otimes_\zeta g'). \tag{13}$$

Preuve. Par définition on a:

$$(f \otimes f') \otimes_\zeta (g \otimes g') = S_{m+q}^{-1}[(f \otimes_\zeta f') \otimes (g \otimes g')]S_{n+p}\ ,$$

$$S_{n+p} = (id_{U^n} \otimes c_{V^n, U^p} \otimes id_{V^p})(S_n \otimes S_p) \quad \text{et} \quad S_{m+q}^{-1} = (S_m^{-1} \otimes S_q^{-1})(id_{U^m} \otimes c_{V^m, U^q} \otimes id_{V^q})^{-1}.$$

L'associativité du produit tensoriel et la naturalité du tressage entraînent:

$$(id_{U^m} \otimes c_{V^m, U^q} \otimes id_{V^q})^{-1}[(f \otimes f') \otimes (g \otimes g')](id_{U^n} \otimes c_{V^n, U^p} \otimes id_{V^p}) = ((f \otimes g) \otimes (f' \otimes g'))$$

d'où

$$\begin{aligned} (f \otimes f') \otimes_\zeta (g \otimes g') &= (S_m^{-1} \otimes S_q^{-1})[(f \otimes g) \otimes (f' \otimes g')](S_n \otimes S_p) \\ &= [S_m^{-1}(f \otimes g)S_n] \otimes [S_q^{-1}(f' \otimes g')S_p] = (f \otimes_\zeta g) \otimes (f' \otimes_\zeta g'). \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Avec les notations précédentes on a pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f_i \otimes_\zeta g_i = (f \otimes_\zeta g)_i \; . \tag{14}$$

Preuve. $f_i \otimes_\zeta g_i = (id_{U^{i-1}} \otimes f \otimes id_{U^{n-i-1}}) \otimes_\zeta (id_{V^{i-1}} \otimes g \otimes id_{V^{n-i-1}})$. De l'associativité du produit tensoriel et de la Proposition 4, on déduit la relation:

$$f_i \otimes_\zeta g_i = (id_{U^{i-1}} \otimes_\zeta id_{V^{i-1}}) \otimes (f \otimes_\zeta g)(id_{U^{n-i-1}} \otimes_\zeta id_{V^{n-i-1}}) = (f \otimes_\zeta g)_i \; . \qquad \square$$

Lemme 1. *Soient* U, V *et* W *des objets d'une catégorie tensorielle tressé* ζ*, pour tout entier naturel* n *on a:*

$$[S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{W^n}] S_{[(U\otimes V)\otimes W]^n} = [id_{U^n} \otimes S_{(V\otimes W)^n}] S_{[U\otimes (V\otimes W)]^n} \; .$$

Preuve. Pour $n = 0$, les deux membres sont égaux à id_I. Posons

$$X = [S_{(U\otimes V)^{n+1}} \otimes id_{W^{n+1}}] S_{((U\otimes V)\otimes W)^{n+1}}.$$

De la définition de l'opérateur de séparation, de l'associativité et de la fonctorialité du produit tensoriel on a:

$$\begin{aligned} X \;=\; & [id_{U^n} \otimes c_{V^n,U} \otimes id_V \otimes id_{W^{n+1}}][S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{U\otimes V} \otimes id_{W^{n+1}}] \\ & [id_{(U\otimes V)^n} \otimes c_{W^n, U\otimes V} \otimes id_W][S_{((U\otimes V)\otimes W)^n} \otimes id_{U\otimes V\otimes W}]. \end{aligned}$$

De la naturalité des tressages, le composé du 2ème et 3ème terme devient:

$$(id_{U^n} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n, U\otimes V} \otimes id_W)(S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{W^n} \otimes id_{(U\otimes V)\otimes W}).$$

Posons

$$Y = [id_{U^n} \otimes c_{V^n,U} \otimes id_V \otimes id_{W^{n+1}}](id_{U^n} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n,U\otimes V} \otimes id_W).$$

Des relations (3), (7) et (4) on obtient:

$$\begin{aligned} Y \;=\; & (id_{U^{n+1}} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n,V} \otimes id_W)(id_{U^n} \otimes c_{V^n,U} \otimes id_{W^n} \otimes id_{V\otimes W}) \\ & (id_{U^n} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n,U} \otimes id_{V\otimes W}) \\ =\; & ((id_{U^{n+1}} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n,V} \otimes id_W)(id_{U^n} \otimes c_{V^n\otimes W^n,U} \otimes id_{V\otimes W}). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} Z \;=\; & (S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{W^n} \otimes id_{(U\otimes V)\otimes W})[S_{((U\otimes V)\otimes W)^n} \otimes id_{U\otimes V\otimes W}] \\ =\; & [id_{U^n} \otimes S_{(V\otimes W)^n} \otimes id_{U\otimes V\otimes W}][S_{(U\otimes (V\otimes W))^n} \otimes id_{U\otimes V\otimes W}]. \end{aligned}$$

On a alors

$$X = Y \circ Z.$$

La naturalité des tressages entraîne:

$$\begin{aligned} X &= [id_{U^{n+1}} \otimes id_{V^n} \otimes c_{W^n,V} \otimes id_W][id_{U^{n+1}} \otimes S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{V\otimes W}] \\ &\quad [id_{U^n} \otimes c_{(V\otimes W)^n,U} \otimes id_{V\otimes W}](S_{(U\otimes(V\otimes W))^n} \otimes id_{U\otimes(V\otimes W))}] \\ &= (id_{U^{n+1}} \otimes S_{(V\otimes W)^{n+1}})(S_{U\otimes(V\otimes W)^{n+1}}). \end{aligned}$$ □

Proposition 5. *Dans une catégorie tensorielle tressée ζ, le produit tensoriel tressé (chaque fois qu'il a un sens) est associatif.*

Preuve. Soient U, V, W des objets de ζ et $n, m \in \mathbf{N}$. Et soient $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(U^n, U^m)$, $g \in \mathrm{Hom}_\zeta(V^n, V^m)$ et $h \in \mathrm{Hom}_\zeta(W^n, W^m)$. Alors

$$\begin{aligned} (f \otimes_\zeta g) \otimes_\zeta h &= S^{-1}_{[(U\otimes V)\otimes W]^m}[(f \otimes_\zeta g) \otimes h]S_{[(U\otimes V)\otimes W]^n} \\ &= S^{-1}_{[(U\otimes V)\otimes W]^n}[(S^{-1}_{(U\otimes V)^m}(f \otimes g)S_{(U\otimes V)^n} \otimes (id_{W^m} \circ h \circ id_{W^n})]S_{[(U\otimes V)\otimes W]^n} \\ &= [S^{-1}_{[(U\otimes V)\otimes W]^n}][S^{-1}_{(U\otimes V)^m} \otimes id_{W^m}]((f \otimes g) \otimes h)[S_{(U\otimes V)^n} \otimes id_{W^n}][S_{[(U\otimes V)\otimes W]^n}]. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme précédent on obtient :

$$\begin{aligned} (f \otimes_\zeta g) \otimes_\zeta h &= [S^{-1}_{(U\otimes(V\otimes W))^m}][id_{U^m} \otimes S^{-1}_{(V\otimes W)^m}](f \otimes (g \otimes h)) \\ &\quad [id_{U^n} \otimes S_{(V\otimes W)^n}] \otimes [S_{(U\otimes(V\otimes W)^n}] \\ &= S^{-1}_{((U\otimes(V\otimes W))^m}(f \otimes (g \otimes_\zeta h))S_{(U\otimes(V\otimes W))^n} = f \otimes_\zeta (g \otimes_\zeta h). \end{aligned}$$ □

2. Notion d'algèbre de Lie dans une catégorie tressée

Dans ce paragraphe, nous établissons certaines relations dans une Ab-catégorie tensorielle tressée ζ. Elles nous permettent de proposer une notion d'algèbre de Lie dans une telle catégorie.

2.1. Calcul tressé

Dans ce qui suit, g désignera un objet d'une Ab-catégorie tensorielle tressée $\zeta = (\zeta, \otimes, I, c)$, $K = \mathrm{Hom}_\zeta(I, I)$, q un élément inversible de K, $[\ ]$: $g^2 \to g$ une flèche arbitraire de ζ et $c = c_g$ le tressage de g. Enfin $Y = c_1c_2c_1$ représentera l'opérateur de Yang-Baxter. Rappelons (cf. [4]) que $c_1c_2c_1 = c_2c_1c_2$ et que :

$$[\ ,\ ]_1 = [\ ,\ ] \otimes id_g, \qquad [\ ,\ ]_2 = id_g \otimes [\ ,\ ].$$

Lemme 2. *Avec les notations précédentes on a:*

(i) $(c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_1 c_2^{-1} = c[\ \ ]_2(c_1^2 - id_{g^3})c_1^{-1} + [\ \ ]_1(c_2^2 - id_{g^3})c_2^{-1}$,
(ii) $(c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_2 c_1^{-1} = c[\ \ ]_1(c_2^2 - id_{g^3})c_2^{-1} + [\ \ ]_2(c_1^2 - id_{g^3})c_1^{-1}$.

Preuve. (i) En utilisant deux fois la naturalité des tressages on a

$$(c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_1 = c^2[\ \ ]_1 - [\ \ ]_1 = [\ \ ]_1 c_2 c_1^2 c_2 - [\ \ ]_1$$

d'où

$$\begin{aligned}(c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_1 &= [\ \ ]_1 c_2 c_1^2 c_2 - [\ \ ]_1 c_2^2 + [\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) \\ &= [\ \ ]_1 c_2 (c_2 - id_{g^3}) + [\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) \\ &= c[\ \ ]_2 (c_1^2 - id_{g^3}) c_1^{-1} c_2 + [\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}).\end{aligned}$$

En composant par c_2^{-1} on obtient (i); la relation (ii) se démontre de manière analogue. □

Lemme 3. *Si* $[\ \ ] \circ c = -q[\ \ ]$, *alors:*
(i) $qc[\ \ ]_2 = -[\ \ ]_1 \circ Y, \qquad qc[\ \ ]_1 = -[\ \ ]_2 \circ Y;$
(ii) $q^2c^2[\ \ ]_2 = [\ \ ]_2 \circ Y^2, \qquad q^2c^2[\ \ ]_1 = [\ \ ]_1 \circ Y^2;$
(iii) $qc[\ \ ]_1 \circ (c_2^2 - id_{g^3}) = -[\ \ ]_2 (c_1^2 - id_{g^3}) \circ Y, \quad qc[\ \ ]_2 \circ (c_1^2 - id_{g^3}) = -[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) \circ Y.$

Preuve.
(i) $qc[\ \ ]_2 = q[\ \ ]_1 c_{g^2,g} = q[\ \ ]_1 c_2 c_1 = -[\ \ ]_1 c_1 c_2 c_1 = -[\ \ ]_1 \circ Y.$
(ii) La bilinéarité de la composition des flèches et la relation (i) entraînent: $q^2c^2[\ \ ]_2 = (qc)(qc)[\ \ ]_2 = -(qc)[\ \ ]_1 \circ Y = [\ \ ]_1 \circ Y^2.$
(iii) $qc[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) = -[\ \ ]_2 \circ Y (c_1^2 - id_{g^3}) = -[\ \ ]_2 \circ (c_1^2 - id_{g^3}) \circ Y,$
(car $Y \circ c_2^2 = c_1^2 \circ Y$).

Les relations obtenues en permutant les indices 1 et 2, se démontrent de manière analogue.□

Comme conséquence immédiate du Lemme 3 on a:

Lemme 4. *Soit* $d_{i,j} = [\ \ ]_i - q[\ \ ]_j - [\ \ ]_i c_j$, *pour tous* $i, j \in \{1, 2\}$, *on a alors*

$$qcd_{1,2} = -d_{2,1} \circ Y.$$

Remarque 2. Si ζ est une catégorie tensorielle tressée de k-modules on notera par $\Lambda_c^2(g)$ le quotient de $g \otimes g$ par le sous-K-module engendré par $\mathrm{Im}(c + id_{g^2})$. Le Lemme 2 montre que dans $\Lambda_c^2(g)$ on a:

$$[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) c_2^{-1} = [\ \ ]_2 (c_1^2 - id_{g^3}) c_1^{-1}$$

du fait que $c_2^{-1} \circ Y = Y \circ c_1^{-1}$, la relation suivante est une conséquence du Lemme 3

$$[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) c_2^{-1} (q \cdot id_{g^3} - Y) = 0.$$

En homologie, l'expression $[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) c_2^{-1}$ joue un rôle fondamental (cf. [3]). Enfin, notons qu'en général le terme $[\ \ ]_1 (c_2^2 - id_{g^3}) c_2^{-1}$ n'est pas nul (cf. [7], p.71).

2.2. Algèbre de Lie dans une Ab-catégorie tensorielle tressée

Rappelons tout d'abord la notion d'algèbre dans une catégorie tensorielle.

Définition 4. *Une algèbre d'une catégorie tensorielle ζ, est un triplet $A = (A, m, u)$ où A est un objet de ζ, $m : A \otimes A \to A$ et $u : I \to A$ sont deux flèches de ζ vérifiant*

$$m \circ m_1 = m \circ m_2, \tag{15}$$
$$m \circ (id_A \otimes u) = m \circ (u \otimes id_A) = id_A. \tag{16}$$

Si de plus ζ est tressée, l'algèbre A est dite commutative (resp. tressée) si

$$m \circ c_A = m, \tag{17}$$
$$(resp.\ m \circ c_A^2 = m), \tag{18}$$

où c_A désigne le tressage de l'objet A.

De la définition précédente et des relations (7) et (8) se déduisent les égalités suivantes:

$$(u \otimes id_A) \circ m = u \otimes m, \tag{19}$$
$$(id_A \otimes u) \circ m = m \otimes u, \tag{20}$$
$$m \circ (u \otimes u) = u. \tag{21}$$

Définition 5. *Un morphisme d'algèbre f: $(A, m, u) \to (A', m', u')$ est une flèche $f \in \mathrm{Hom}_\zeta(A, A')$ telle que:*

$$m' \circ (f \otimes f) = f \circ m \qquad \text{et} \qquad f \circ u = u'. \tag{22}$$

Posons $c = c_A$ un petit miracle a fait que:

Proposition 6. *Soient (A, m, u) une algèbre dans une Ab-catégorie tensorielle tressée ζ et q un élément de $K = \mathrm{Hom}_\zeta(I, I)$. Alors il existe une application K-linéaire*

$$F : \ \mathrm{Hom}_\zeta(A^2, A) \to \mathrm{Hom}_\zeta(A^3, A)$$

telle que

$$[\ \ ][\ \ ]_1(id_{A^3} - c_2) - q[\ \ ][\ \ ]_2 = F([\ \ ](c + q \cdot id_{A^2})) \tag{23}$$

où $[\ \ ] = m - m \circ c_A$.

Preuve. En utilisant la naturalité des tressages, (15), l'équation de Yang-Baxter $c_1c_2c_1 = c_2c_1c_2$ et le fait que $mm_1 = mm_2$ on a:

$$\begin{aligned} [\ \ ][\ \ ]_1(id_{A^3} - c_2) - q([\ \ ][\ \ ]_2 \ &= \ mm_2[(1-q) \cdot (id_{A^3} - c_2) - c_1 + q \cdot c_2c_1 \\ &\quad + (1-q) \cdot c_1c_2c_1 - c_2c_1c_2^2 + c_1c_2^2] \end{aligned}$$

or $$mm_2c_1c_2^2 = m(m_2c_1c_2)c_2 = mcm_1c_2 = mc(m_1c_2c_1)c_1^{-1} = mc^2m_2c_1^{-1}.$$

Posons
$$H = c^2 + (q-1)\cdot c - q\cdot id_{A^2}.$$

On a alors:
$$mm_2c_1c_2^2 = mHm_2c_1^{-1} + (1-q)\cdot mcm_2c_1^{-1} + q\cdot mm_2c_1^{-1}.$$

Mais
$$qmm_2c_1^{-1} = qmm_1c_1^{-1} = mm_1c_1 + (q-1)mm_1 - mm_1H_1c_1^{-1}.$$

D'où $$mm_2c_1c_2^2 = mHm_2c_1^{-1} - mm_1H_1c_1^{-1} + mm_2c_1 + (q-1)\cdot mm_2(id_{A^3} - c_2).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} mm_2c_2c_1c_2^2 &= mm_2c_2c_1H_2 + mm_2(1-q)\cdot c_2c_1c_2 + qmm_2c_2c_1 \\ &= m(m_1c_2c_1)H_2 + (1-q)\cdot mm_2c_1c_2c_1 + qmm_2c_2c_1 \\ &= mcm_2H + (1-q)mm_2c_1c_2c_1 + qmm_2c_2c_1. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$[\ \ ][\ \ ]_1(id_{A^3} - c_2) - q[\ \ ][\ \ ]_2 = mHm_2c_1^{-1} + mm_1H_1c_1^{-1} - mcm_2H_2.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $[\ \ ](c + q\cdot id_{A^2}) = -mH$ et que la composition des flèches est K-bilinéaire. □

Les considérations précédentes nous conduisent à formuler une "version tressée" de la notion d'algèbre de Lie:

Définition 6. *Soient $\zeta = (\zeta, \otimes, I, c)$ une catégorie tensorielle tressée, g un objet de ζ et $[\ \ ]$: $g\otimes q \to g$ un morphisme de ζ. On dira que $(g, [\ \ ], q)$ est une algèbre de Lie de ζ si:*

(i) $$[\ \ ]\circ c = (-q)\cdot[\ \ ], \tag{24}$$

(ii) $$q[\ \ ][\ \ ]_2 = [\ \ ][\ \ ]_1(id_{g^3} - c_2), \tag{25}$$

où q est un élément inversible de K et $c = c_g$ est le tressage de g.

La relation (ii) est appelée identité de Jacobi tressée, cette terminologie est justifiée par les relations suivantes:

Proposition 7. *Soit $(g, [\ \ ], q)$ une algèbre de Lie de ζ, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $$q[\ \ ][\ \ ]_2 = [\ \ ][\ \ ]_1(id_{g^3} - c_2), \tag{26}$$

(ii) $$q[\ \ ][\ \ ]_1 = [\ \ ][\ \ ]_2(id_{g^3} - c_1), \tag{27}$$

(iii) $$[\ \ ][\ \ ]_1(1 - c_2 + c_2c_1) = 0, \tag{28}$$

(iv) $$[\ \ ][\ \ ]_2(1 - c_1 + c_1c_2) = 0. \tag{29}$$

Preuve. Avec les notations du Lemme 4, les conditions (i) et (ii) sont respectivement équivalentes à:

$$[\ \ ]d_{12} = 0 \qquad \text{et} \qquad [\ \ ]d_{21} = 0$$

en composant par $[\ \ ]$ l'égalité du Lemme 4, on obtient l'équivalence de (i) et (ii). D'autre part

$$q \cdot [\ \ ][\ \ ]_2 = -[\ \ ]c[\ \ ]_2 = -[\ \ ][\ \ ]_1 c_2 c_1$$

ce qui montre l'équivalence de (i) et (iii). De manière analogue on obtient celle de (ii) et (iv). □

Remarque 3. Dans une Ab-catégorie tensorielle tressée ζ une algèbre (A, m, u) munie du crochet $[\ ] = m - mc_A$ est une algèbre de Lie de ζ si et seulement si $m(c - id_{A^2})(c + q \cdot id_{A^2}) = 0$. Lorsque $q = 1$, on retrouve la notion d'algèbre tressée et cette condition a permis à Baez (cf. [1]) de construire le complexe de Hochschild de l'algèbre A. Notons enfin, que dans la définition d'une algèbre de Lie de ζ, q=1 est un choix naturel. En effet:

Proposition 8. *$(g, [\ \ ], q)$ est une algèbre de Lie de $(\zeta, \otimes, I, c)$ si et seulement si $(g, [\ \ ], id_I)$ est une algèbre de Lie de $(\zeta, \otimes, I, q^{-1} \cdot c)$.*

Preuve. Soit $(g, [\ \ ], q)$ une algèbre de Lie de $(\zeta, \otimes, I, q^{-1} \cdot c)$, la relation

$$[\ \ ] \circ c = (-q) \cdot [\ \ ]$$

est équivalente à

$$[\ \ ] \circ q^{-1} \cdot c = [\ \ ].$$

D'autre part remarquons que

$$q \cdot [\ \ ][\ \ ]_1 = [\ \ ][\ \ ]_1$$

en effet d'après (26) et (27) on a:

$$q^2 \cdot [\ \ ][\ \ ]_1 = q \cdot [\ \ ][\ \ ]_2 (1 - c_1) = [\ \ ][\ \ ]_1 (1 - c_2)(1 - c_1) = [\ \ ]_1 (1 - c_2 + c_1 c_2) - [\ \ ][\ \ ]_1 c_1.$$

Or d'après (28)

$$[\ \ ]_1 (1 - c_2 + c_1 c_2) = 0$$

et d'autre part (24) implique

$$[\ \ ]_1 c_1 = q[\ \ ]_1,$$

q étant inversible on a

$$q \cdot [\ \ ][\ \ ]_1 = [\ \ ][\ \ ]_1.$$

Il en résulte que la relation (25) est équivalente à

$$[\ \ ][\ \ ]_2 = [\ \ ][\ \ ]_1 (id_{g^3} - q^{-1} c_2)$$ □

M. Wambst a introduit (cf. [9], p.35) une définition d'algèbre de Lie quantique basée sur la notion de symétrie de Hecke:

Définition 7. *Soit g un k-module de rang fini N. Un automorphisme c de $g \otimes g$ est une symétrie de Hecke de marque q*

(1) *si c vérifie l'équation de Yang-Baxter* $c_1c_2c_1 = c_2c_1c_2$

(2) *et s'il existe un élément inversible q de k tel que* $(c + q\, id_{g\otimes g})(c - id_{g\otimes g}) = 0$.

Définition 8. *Une algèbre de Lie quantique est la donnée $(g, c, [\ \ ])$ d'un k-module g muni d'une symétrie de Hecke de marque q et d'une application linéaire $[\ \ ] :\ g \otimes g \to g$ vérifiant:*

(i) $$[\ \ ] \circ c = -q[\ \ ],$$

(ii) $$[\ \ ][\ \ ]_2 = [\ \ ][\ \ ]_1(id_{g^2} - c_2),$$

(iii.a) $$c[\ \ ]_1 = [\ \ ]_2c_1c_2,$$

(iii.b) $$c[\ \ ]_2 = [\ \ ]_1c_2c_1,$$

(iii.c) $$c[\ \ ]_1c_2 = [\ \ ]_2c_1.$$

Lorsque $q = 1$, l'algèbre g est dite involutive.

Dans le cas particulier où ζ est une catégorie de k-modules; une algèbre de Lie quantique est tout simplement une algèbre de Lie de ζ involutive c'est à dire de tressage c_g involutif.

Proposition 9. *Si $(g, c, [\ \ ])$ une algèbre de Lie quantique sur un corps K, alors g est involutive ou abélienne.*

Preuve. Par définition, il existe q élément inversible de K tel que:

$$(c - id_{g^2})(c + q\, id_{g^2}) = c^2 + (q - 1)c - q\, id_{g^2}. \tag{a}$$

Les conditions (iii.a) et (iii.c) impliquent

$$[\ \ ]_1(c_2^2 - id_{g^3}) = 0. \tag{b}$$

q étant inversible, le Lemme 3 entraîne

$$[\ \ ]_2(c_1^2 - id_{g^3}) = 0. \tag{c}$$

D'une part, on obtient alors du Lemme 2

$$(c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_1 = (c^2 - id_{g^2})[\ \ ]_2 = 0. \tag{d}$$

D'autre part, la condition (ii) de la Définition 8 entraîne:

$$[\ \ ][\ \ ]_2 = 0. \tag{e}$$

En composant l'égalité (a) par $[\ \ ]_1$ et $[\ \ ]_2$, on obtient:

$$(1 - q)(id_{g^2} - c)[\ \ ]_1 = (1 - q)(id_{g^2} - c)[\ \ ]_2 = 0.$$

En rappelant que la condition $q = 1$ signifie que g est involutive, on peut supposer que $q \neq 1$. Comme $1 - q$ est inversible, alors:

$$c[\ \ ]_1 = [\ \ ]_1 \quad \text{(f)} \qquad \text{et} \qquad c[\ \ ]_2 = [\ \ ]_2\,. \quad \text{(g)}$$

D'autre part (a) implique :

$$[\ \ ]_1(c_2^2 - (q-1)c_2 - q\, id_{g^3}) = 0 \quad \text{et} \quad [\ \ ]_2(c_1^2 - (q-1)c_2 - q\, id_{g^3}) = 0,$$

(b) et (c) entraînent alors :

$$[\ \ ]_1 c_2 = [\ \ ]_1 \qquad \text{(h)} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad [\ \ ]_2 c_1 = [\ \ ]_2. \qquad \text{(i)}$$

Or d'après (e) et (g) d'une part et (iii.c) et (h) d'autre part

$$c[\ \ ]_2 c_2 = [\ \ ]_2 c_1 = [\ \ ]_1 \qquad \text{et} \qquad c[\ \ ]_1 c_2 = [\ \ ]_1 c_2 = [\ \ ]_2.$$

D'où

$$[\ \ ]_1 = [\ \ ]_2. \tag{j}$$

Supposons que $g' = [g, g] \neq 0$, et soit e' un élément d'une base de g'; pour tous x, y dans g d'après (i) et (d) on a

$$[x, y] \otimes e' = x \otimes [y, e'] = x \otimes 0 = 0.$$

Par conséquent $[x, y] = 0$ et donc g est abélienne. □

2.3. Exemple d'algèbre de Lie de ζ

Rappelons que si A est une K-algèbre commutative au sens classique et g est une K-algèbre de Lie, alors $A \otimes_K g$, munie du crochet $[a \otimes_K x, b \otimes_K y] = ab \otimes_K [x, y]$, est une K-algèbre de Lie.

Nous donnons une version tressée de cet exemple d'algèbre de Lie, obtenue par une application élégante du produit tensoriel tressé.

Proposition 10. *Soient (A, m, u) une algèbre commutative et $(g, [\ \ ], q)$ une algèbre de Lie, de ζ. Si $c_{A,g} = c_{g,A}^{-1}$, alors $(A \otimes_\zeta g, m \otimes_\zeta [\ \ ], q)$ est une algèbre de Lie de ζ ayant pour tressage $c_{A\otimes g} = c_A \otimes_\zeta c_g$.*

Preuve. En appliquant (3) et (4) on a:

$$\begin{aligned} c_{A\otimes g} &= (id_A \otimes c_{A,g} \otimes id_g)(c_A \otimes c_g)(id_A \otimes c_{g,A} \otimes id_g) \\ &= (id_A \otimes c_{g,A} \otimes id_g)^{-1}(c_A \otimes c_g)(id_A \otimes c_{g,A} \otimes id_g) \\ &= S^{-1}_{(A\otimes g)^2}(c_A \otimes c_g) S_{(A\otimes g)^2} = c_A \otimes_\zeta c_g. \end{aligned}$$

D'après (10) on a

$$(m \otimes_\zeta [\ \ ]) c_{A\otimes g} = (m \otimes_\zeta [\ \ ])(c_A \otimes_\zeta c_g) = (m \circ c_A) \otimes_\zeta [\ \ ] c_g$$

or $m \circ c_A = m$, $[\ \ ]c_g = -q[\ \ ]$ et le produit tensoriel tressé est K-bilinéaire on obtient donc:

$$(m \otimes_\zeta [\ \ ]) c_{A\otimes g} = -q(m \otimes_\zeta [\ \ ]).$$

D'autre part, de (13) et (15) il résulte que

$$\begin{aligned} &q(m \otimes_\zeta [\ \ ])(m \otimes_\zeta [\ \ ])_2 = q(m \otimes_\zeta [\ \ ])(m_2 \otimes_\zeta [\ \ ]_2) = (mm_2 \otimes_\zeta q[\ \ ][\ \ ]_2) \\ &= (mm_1 \otimes_\zeta [\ \ ][\ \ ]_1)(id_{g^3} - c_2) = mm_1 \otimes_\zeta [\ \ ][\ \ ]_1 - (mm_1 \otimes_\zeta [\ \ ][\ \ ]_1 c_2). \end{aligned}$$

d'après la bilinéarité de $\otimes_\zeta$ et de (11) et (13) on a alors:

$$q(m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_2 = (m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_1 - mm_1c_{A,2}\otimes_\zeta [\ \ ][\ \ ]_1c_{g,2}$$
$$= (m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_1 - (m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_1(c_{A,2}\otimes_\zeta c_{g,2}).$$

(13) implique

$$(c_{A,2}\otimes_\zeta c_{g,2}) = (c_{A,}\otimes_\zeta c_{g,})_2 = c_{A\otimes g,2}.$$

On a

$$(m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_2 = (m\otimes_\zeta [\ \ ])(m\otimes_\zeta [\ \ ])_1(id_{(A\otimes g)3} - c_{A\otimes g,2})$$

c'est à dire $(A\otimes_\zeta g, m\otimes_\zeta [\ \ ], q)$ est une algèbre de Lie de ζ. □

Dans tout ce qui suit on prendra $q = 1$, $\zeta = (\zeta, \otimes, I)$ désignera une catégorie tensorielle stricte et l'algèbre de Lie $(g, [\ \ ], id_I)$ sera notée $(g, [\ \ ])$.

3. Propriétés des algèbres de Lie de ζ

3.1. Notion d'objet primitif

Dans une catégorie abélienne ζ nous définissons le concept d'objet primitif d'une bigébre et nous montrons qu'il est possible de le munir d'une structure d'algèbre de Lie de ζ.

Donnons tout d'abord les définitions de cogèbre et bigébre d'une catégorie tensorielle tressée ζ. Par dualisation de la notion d'algèbre, on obtient la définition d'une cogèbre.

Définition 9. *Une cogèbre d'une catégorie tensorielle ζ est un triplet $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ où C est objet de ζ, $\Delta : C \to C\otimes C$ et $\varepsilon : C \to I$ sont deux flèches de ζ vérifiant:*

$$\Delta_1 \circ \Delta = \Delta_2 \circ \Delta, \tag{30}$$
$$(id_C \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes id_C)\Delta. \tag{31}$$

Proposition 11. *Le produit tensoriel tressé de deux algébres (resp. cogèbres) de ζ est une algébre (resp. cogèbre) de ζ.*

Preuve. Soient (A', m', u') et (A'', m'', u'') deux algébres de ζ. On a $(A', m', u')\otimes_\zeta (A'', m'', u'')$ $= (A'\otimes_\zeta A'', m'\otimes_\zeta m'', u'\otimes_\zeta u'')$. Remarquons que $A'\otimes_\zeta A'' = A'\otimes A''$ et que $u'\otimes_\zeta u'' = u'\otimes u''$. Soient $A = A'\otimes A''$, $m = m'\otimes_\zeta m''$ et $u = u'\otimes u''$. On a alors:

$$mm_1 = (m'\otimes_\zeta m'')(m'\otimes_\zeta m'')_1 = (m'\otimes_\zeta m'')(m'_1\otimes_\zeta m''_1) = m'm_1{}'\otimes_\zeta m''m''_1.$$

De (15) on obtient

$$\begin{aligned} mm_1 &= m'm'_2\otimes_\zeta m''m''_2 = (m'\otimes_\zeta m'')(m'_2\otimes_\zeta m''_2) \\ &= (m'\otimes_\zeta m'')(m'\otimes_\zeta m'')_2 = mm_2, \\ mu_1 &= (m'\otimes_\zeta m'')(u'\otimes_\zeta \otimes_\zeta u'')_1 = (m'\otimes_\zeta m'')(u'_1\otimes_\zeta u''_1) \\ &= m'u'_1\otimes_\zeta m''u''_1 = m'u'_2\otimes_\zeta m''u''_2 \\ &= (m'\otimes_\zeta m'')(u'\otimes_\zeta u'')_2 = mu_2. \end{aligned}$$

Enfin de (16) et (11), on obtient

$$mu_1 = mu_2 = id_{A'} \otimes_\zeta id_{A''} = id_{A' \otimes A''} = id_A.$$

Ce qui montre que (A, m, u) est une algébre de ζ. Pour les cogèbres la preuve est analogue. □

Comme dans le cas des K-modules on a:

Définition 10. *Une bigèbre d'une catégorie tensorielle tressée ζ est un quintuplet $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ où (A, m, u) est une algébre de ζ, (A, Δ, ε) est une cogèbre de ζ et $\Delta : A \to A \otimes_\zeta A$ et $\varepsilon : A \to I$ sont deux morphismes d'algèbres.*

Δ et ε vérifient les relations:

$$(m \otimes_\zeta m)(\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ m, \qquad \Delta \circ u = u \otimes u, \tag{32}$$

$$(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon \circ m, \qquad \varepsilon \circ u = id_I. \tag{33}$$

Nous sommes à présent en mesure d'introduire la notion d'objet primitif d'une bigèbre de ζ.

Définition 11. *Soient $\zeta = (\zeta, \otimes, I, c)$ une catégorie abélienne tensorielle tressée et $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre de ζ, on appelle objet primitif de A l'objet $P = Ker(\Delta - \Delta_0)$ où $\Delta_0 = u \otimes id_A + id_A \otimes u$.*

Proposition 12. *Soient $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre d'une catégorie abélienne tensorielle tressée ζ telle que $mc^2 = m$ et soit P l'objet primitif de A. L'objet P est muni d'une structure d'algèbre de Lie, induite par celle de A si et seulement si c_p est involutif.*

Preuve. D'après la Remarque 3, $mc^2 = m$, si et seulement si, $(A, [\ \ ] = m - m \circ c_A)$ est une algèbre de Lie de ζ. Soit $\lambda : \ P \to A$ le monomorphisme définissant P. Calculons $(\Delta - \Delta_0)[\ \ ](\lambda \otimes \lambda)$. De (32) et de la naturalité des tressages on a:

$$\begin{aligned} \Delta[\ \ ] = \Delta m - \Delta m c_A &= (m \otimes_\zeta m)(\Delta \otimes \Delta) - (m \otimes_\zeta m)(\Delta \otimes \Delta)c_A \\ &= (m \otimes_\zeta m)(1 - c_{A^2, A^2})(\Delta \otimes \Delta). \end{aligned}$$

D'autre part à l'aide de (17), (18), (19) et (7) un calcul direct montre que

$$\Delta_0 m = (m \otimes_\zeta m)(\Delta_0 \otimes \Delta_0) - id_{A^2} - c_A$$

d'où

$$\Delta[\ \ ] = \Delta m - \Delta m c_A = (m \otimes_\zeta m)(\Delta \otimes \Delta) + c_A^2 - id_{A^2}.$$

On a alors

$$(\Delta - \Delta_0)[\ \ ](\lambda \otimes \lambda) = (m \otimes_\zeta m)(1 - c_{A^2, A^2})(\Delta^2 - \Delta_0^2)(\lambda \otimes \lambda) + (c_A^2 - id_{A^2})(\lambda \otimes \lambda).$$

Or par definition de λ

$$\Delta\lambda = \Delta_0\lambda,$$

d'où $$(\Delta^2 - \Delta_0^2)(\lambda \otimes \lambda) = 0.$$

Si c_P est involutif, par naturalité des tressages on a

$$(c_A^2 - id_{A^2})(\lambda \otimes \lambda) = (\lambda \otimes \lambda)(c_P^2 - id_{P^2}) = 0,$$

d'où $$(\Delta - \Delta_0)[\ \ ](\lambda \otimes \lambda) = 0.$$

D'après la définition du noyau il existe alors une flèche unique $[\ \ ]_P \in \mathrm{Hom}_\zeta(P^2, P)$ telle que

$$\lambda[\ \ ]_P = [\ \ ](\lambda \otimes \lambda). \tag{a}$$

De cette dernière égalité, et du fait que λ est un monomorphisme, on vérifie facilement que P est une algèbre de Lie de ζ.

Réciproquement supposons que $(P, [\ \ ]_P)$ soit une algèbre de Lie de ζ dont la structure est induite par celle de A, la relation (a) est alors vérifiée, on a donc

$$0 = (\Delta - \Delta_0)\lambda[\ \ ]_P = (\Delta - \Delta_0)[\ \ ](\lambda \otimes \lambda) = (c_A^2 - id_{A^2})(\lambda \otimes \lambda) = (\lambda \otimes \lambda)(c_P^2 - id_{P^2}).$$

Il s'en suit que $$c_P^2 - id_{P^2} = 0.$$ □

3.2. Dérivations d'une algèbre de Lie de ζ

Dans cette section, nous étendons la notion de dérivation aux catégories tensorielles et nous donnons quelques propriétés.

Définition 12. *Soient B un objet d'une catégorie tensorielle $\zeta = (\zeta, \otimes, I, c)$ et $f : B \otimes B \to B$ une flèche de ζ. Une dérivation de (B, f) est une flèche $d : B \to B$ de ζ telle que:*

$$d \circ f = f(d \otimes id_B + id_B \otimes d). \tag{34}$$

Proposition 13. *Soient (A, m, u) une algèbre d'une Ab-catégorie tensorielle ζ et $[\ \ ] = m - mc_A$. Toute dérivation de (A, m) est une dérivation de $(A, [\ \ ])$.*

Preuve. Soit d une dérivation de (A, m), par définition on a

$$\begin{aligned} d \circ [\ \ ] &= d \circ m(id_{A^2} - c_A) = m(d \otimes id_A + id_A \otimes m)(id_{A^2} - c_A) \\ &= m(d \otimes id_A) + m(id_A \otimes m) - m(d \otimes id_A)c_A - m \otimes (id_A \otimes d)c_A, \end{aligned}$$

la naturalité des tressages implique

$$d \circ [\ \ ] = (m - mc_A)(d \otimes id_A + id_A \otimes m) = [\ \ ](d \otimes id_A + id_A \otimes d).$$ □

Voici un exemple de dérivation appelée dérivation intérieure:

Proposition 14. *Avec les notations précédentes, pour tout $a \in \mathrm{Hom}_\zeta(I, A)$, on a $d_a = [\ \ ](a \otimes id_A)$ est une dérivation de (A, m).*

Preuve.

$$m(d_a \otimes id_A + id_A \otimes d_a) = mm_1(a \otimes id_{A^2}) - mm_1 c_{A,1}(a \otimes id_{A^2}) \\ + mm_2(id_A \otimes a \otimes id_A) - m_2 c_2(id_A \otimes a \otimes id_A).$$

De la naturalité des tressages et des relations (8) et (15) on a

$$\begin{aligned} mm_1 c_{A,1}(a \otimes id_{A^2}) &= mm_2(id_A \otimes a \otimes id_A) \qquad \text{et} \qquad mm_2 c_{A,2}(id_A \otimes a \otimes id_A) \\ &= mm_1(id_{A^2} \otimes a) \\ &= m(id_A \otimes a)m = mc_A(a \otimes id_A). \end{aligned}$$

De plus,

$$mm_1(a \otimes id_{A^2}) = mm_2(a \otimes id_{A^2}) = m(a \otimes id_A)m.$$

D'où:

$$m(d_a \otimes id_A + id_A \otimes d_a) = (m - mc_A)(a \otimes id_A)m = d_a \circ m.$$

C'est à dire d_a est une dérivation de (A, m). □

Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre tressée dans une catégorie tensorielle tressée ζ de k-modules. On notera par $\mathrm{Der}(A)$ (resp. $\mathrm{IDer}(A)$) le k-module des dérivations (resp. des dérivations intérieures) de (A, m, u). Nous nous proposons de munir $\mathrm{Der}(A)$ d'une structure d'algèbre de Lie qui généralise le cas classique.

Soit $c = c_A$ le tressage de A. On considère $d : A \to \mathrm{Der}(A)$ l'opérateur de dérivation intérieure

$$a \to d_a$$

et l'opérateur linéaire $\widetilde{c} : \mathrm{Der}(A) \otimes_k \mathrm{Der} \to \mathrm{Der}(A) \otimes_k \mathrm{Der}(A)$ définie par:

$$\begin{cases} \widetilde{c}(d_a \otimes_k d_b) = (d \otimes_k d_b)c(a \otimes_k b) \\ \widetilde{c}(d_1 \otimes_k d_2) = (d_2 \otimes_k d_1) \text{ si } d_I \notin \mathrm{IDer}(A) \text{ ou } d_2 \notin \mathrm{IDer}(A) \end{cases}$$

Lemme 5. *L'application $\widetilde{c}$ est un automorphisme vérifiant l'équation de Yang-Baxter*

$$\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2.$$

Preuve. Remarquons que $\widetilde{c}\widetilde{c^{-1}} = \widetilde{c^{-1}}\widetilde{c} = id_{(\mathrm{Der}(A))^2}$; $\widetilde{c}$ est donc un automorphisme. Soit $y \in (\mathrm{Der}(A))^3$, la linéarité de $\widetilde{c}$ permet de supposer que $y = d_1 \otimes d_2 \otimes d_3$. Considérons tout d'abord le cas où

$$d_1 = d_a \ , \ d_2 = d_b \text{ et } d_3 = d_c.$$

Pour tout i, $i = 1, 2$, on a

$$\widetilde{c}_i(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = (d \otimes_k d \otimes_k d)c_i(a \otimes_k b \otimes_k c). \tag{a}$$

En effet supposons, par exemple, que $i = 1$.

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_i(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) &= \widetilde{c}(d_a \otimes_k d_b) \otimes id_{\mathrm{Der}(A)}(d_c)\\ &= (d \otimes_k d)c(a \otimes_k b) \otimes_k d(id_A(c))\\ &= (d \otimes_k d \otimes_k d)c_1(a \otimes_k b \otimes_k c)\end{aligned}$$

De la relation (a) on déduit l'égalité:

$$\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2\widetilde{c}_1(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = (d \otimes_k d \otimes_k d)c_1c_2c_1(a \otimes_k b \otimes_k c).$$

Or c vérifie (cf. [4]) l'équation de Yang–Baxter: $c_1c_2c_1 = c_2c_1c_2$. On a donc:

$$\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2\widetilde{c}_1(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = \widetilde{c}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c).$$

Ce qui établit l'égalité pour ce premier cas. Les autres cas sont triviaux. □

Le k-module $\mathrm{Der}(A)$ est donc un k-module munie d'un automorphisme $\widetilde{c}$ vérifiant l'équation de Yang-Baxter, d'aprés l'exemple 1, on sait lui associer une catégorie tensorielle tressée $\zeta_{\widetilde{C}} = \zeta_{\widetilde{C}}(\mathrm{Der}(A))$ pour laquelle $\mathrm{Der}(A)$ est un objet et $\widetilde{c}$ le tressage de $\mathrm{Der}(A)$. Soit

$$\begin{aligned} m_0 :\quad \mathrm{End}_k(A) \otimes_k End_k(A) &\rightarrow End_k(A) \quad \text{la composition dans } \zeta,\\ f \otimes_k g &\rightarrow f \circ g.\end{aligned}$$

Pour tous d_1, d_2 dans $\mathrm{Der}(A)$ et pour tous a_1, a_2 dans A, posons

$$[d_1, d_2] = [\ \ ](d_1 \otimes_k d_2) = (m_0 - m_0\widetilde{c})(d_1 \otimes_k d_2)$$

et

$$[a_1, a_2] = [\ \ ](a_1 \otimes_k a_2) = (m - mc)(a_1 \otimes_k a_2).$$

Lemme 6. *Pour tous $D \in \mathrm{Der}(A)$ et $b \in A$*

$$[D, d_b] = d_{D(b)}.$$

En particulier $\qquad [d_a, d_b] = d_{[a,b]}$.

Preuve. Supposons que $D = d_a$ avec $a \in A$.

$$\begin{aligned}[D, d_b] = [d_a, d_b] &= m_0(d_a \otimes_k d_b) - m_0\widetilde{c}(d_a \otimes_k d_b)\\ &= m_0(d_a \otimes_k d_b) - m_0(d_a \otimes_k d_b)c(a \otimes_k b).\end{aligned}$$

Par linéarité on peut supposer que

$$c(a \otimes_k b) = b' \otimes_k a'.$$

Pour tout z dans A on a donc

$$[d_a, d_b](z) = d_a \circ d_b - d_{b'} \circ d_{a'}$$

or pour tout z dans A on a

$$d_x(z) = [x, z] = [\ \ ](x \otimes_k z)$$

d'où:

$$\begin{aligned} [d_a, d_b](z) &= [\ \ ][\ \ ]_2(a \otimes_k b \otimes_k z) - [\ \ ][\ \ ]_2(b' \otimes_k a' \otimes_k z) \\ &= [\ \ ][\ \ ]_2(id_{A^3} - c_1)(a \otimes_k b \otimes_k z). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 8 on a

$$[d_a, d_b](z) = [\ \ ][\ \ ]_1(a \otimes_k b \otimes_k z) = [\ \ ](d_a(b) \otimes_k z) = d_{d_a(b)}(z)$$

d'où

$$[d_a, d_b] = d_{d_a(b)} = d_{[a,b]}.$$

Supposons que $D \notin \mathrm{IDer}(A)$,

$$[D, d_b] = m_0(D \otimes_k d_b) - m_0(d_b \otimes_k D) = D \circ d_b - d_b \circ D.$$

D'après la Proposition 13 et la relation (34), on a pour tout z dans A

$$\begin{aligned} [D, d_b](z) &= D \circ [\ \ ](b \otimes_k z) - [\ \ ](b \otimes_k D(z)) \\ &= D \circ [\ \ ](b \otimes_k z) - [\ \ ](id_A \otimes_k D)(b \otimes_k z) \\ &= (D \circ [\ \ ] - [\ \ ](id_A \otimes_k D))(b \otimes_k z) \\ &= [\ \ ](D \otimes_k id_A)(b \otimes_k z) \\ &= [\ \ ](D(b) \otimes_k z) = d_{D(b)}(z). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$[D, d_b] = d_D(b). \qquad \square$$

Proposition 15. *Soient* $(\zeta, \otimes, I, c)$ *une catégorie tensorielle de* k*-modules et* (A, m, u) *une algèbre de* A. $(\mathrm{Der}(A),\ [\ \ ] = m_0 - m_0\widetilde{c})$ *est une algèbre de Lie de* $\zeta_{\widetilde{C}}$.

Preuve. Rappelons que A étant tressée, A muni du crochet $[\ \ ] = m - m \circ c$ est une algèbre de Lie de ζ. Soient d_1, d_2 dans $\mathrm{Der}(A)$, montrons que

$$[\ \ ]\widetilde{c}(d_1 \otimes_k d_2) = -[\ \ ](d_1 \otimes_k d_2).$$

Pour cela il suffit de montrer la relation pour $d_1 = d_a$ et $d_2 = d_b$, les autres cas étant triviaux.

Posons:

$$c(a \otimes_k b) = (b' \otimes_k a') \qquad \text{et} \qquad c(b \otimes_k c) = (c'' \otimes_k b'').$$

D'aprés le Lemme 6 on a

$$\begin{aligned} [\ \ ]\widetilde{c}(d_a \otimes_k d_b) &= [\ \ ](d_{b'} \otimes_k d_{a'}) = d_{[\ \ ](b' \otimes_k a')} = d_{[\ \ ]c(a \otimes_k b)} = -d_{[\ \ ](a \otimes_k b)} = \\ &= -[\ \ ](d_a \otimes_k d_b). \end{aligned}$$

Soit $d_3 \in \mathrm{Der}(A)$, montrons l'identié de Jacobi tressée. Supposons tout d'abord que $d_3 = d_c$. Comme conséquence immédiate du Lemme 6, pour tout i, $i = 1, 2$, on a:

$$[\ ][\ ]_i(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = d_{[\ ][\ ]_i(a \otimes_k b \otimes_k c)}.$$

Par suite:

$$\begin{aligned} [\ ][\ ]_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) &= d_{[\ ][\ ]_2(a \otimes_k b \otimes_k c)} \\ &= d_{[\ ][\ ]_1(a \otimes_k b \otimes_k c)} - d_{[\ ][\ ]_1 c_2(a \otimes_k b \otimes_k c)} \\ &= [\ ][\ ]_1(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) - d_{[\ ][\ ]_1(a \otimes_k c(b \otimes_k c))} \\ &= [\ ][\ ]_1(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) - [\ ][\ ]_1(d_a \otimes_k d_{b''} \otimes_k d_{c''}). \end{aligned}$$

Or

$$\widetilde{c}_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = (d_a \otimes_k d_{c''} \otimes_k d_{b''})$$

d'où:

$$[\ ][\ ]_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c) = [\ ][\ ]_1(id_{(\mathrm{Der}(A))^3} - \widetilde{c}_2)(d_a \otimes_k d_b \otimes_k d_c).$$

Supposons que $d_3 = D \notin \mathrm{IDer}(A)$ en utilisant le Lemme 6 et l'antisymétrie du crochet de $\mathrm{Der}(A)$ on a:

$$\begin{aligned} [\ ][\ ]_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k D) &= [\ ](d_a \otimes_k [\ ](d_b \otimes_k D)) = -[\ ](d_a \otimes_k [\ ]\widetilde{c}_2(d_b \otimes_k D)) \\ &= -[\ ](d_a \otimes_k [\ ](D \otimes_k d_b)) = -[\ ](d_a \otimes_k d_{D(b)}) \\ &= -d_{[\ ](a \otimes_k D(b))} = d_{-[\ ](id_A \otimes_k D)(a \otimes_k b)}. \end{aligned}$$

D étant une dérivation de $(A, [\ ])$, on a

$$-[\ ](id_A \otimes_k D)(a \otimes_k b) = -D \circ [\ ](a \otimes_k b) + [\ ](D \otimes_k id_A)(a \otimes_k b).$$

Mais d'une part:

$$\begin{aligned} d_{-D([\ ](a \otimes_k b))} &= -[\ ](D \otimes_k d_{[\ ](a \otimes_k b)}) = [\ ]\widetilde{c}(D \otimes_k d_{[\ ](a \otimes_k b)}) \\ &= [\ ](d_{[\ ](a \otimes_k b)} \otimes D) = [\ ]([\ ]_1(d_a \otimes_k d_b) \otimes_k D) \\ &= [\ ][\ ]_1(d_a \otimes_k d_b \otimes_k D). \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} d_{[\ ](D \otimes_k id_A)(a \otimes_k b)} &= d_{[\ ](D(a) \otimes_k b)} = [\ ](d_{D(a)} \otimes_k d_b) = [\ ]([\ ]_1(D \otimes_k d_a) \otimes_k d_b) \\ &= -[\ ]([\ ]_1 \widetilde{c}(D \otimes_k d_a) \otimes_k d_b) = -[\ ]([\ ]_1(d_a \otimes_k D) \otimes_k d_b) \\ &= -[\ ][\ ]_1(d_a \otimes_k D \otimes_k d_b) = -[\ ][\ ]_1(\widetilde{c}_2(d_a \otimes_k d_b \otimes_k D)). \end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue

$$[\ ][\ ]_2(d_a \otimes d_b \otimes_k D) = [\ ][\ ]_1(id_{(\mathrm{Der}(A))^3} - \widetilde{c}_2)(d_a \otimes_k d_b \otimes_k D).$$

Les autres cas se démontrent demanière analogue. Il s'en suit que $(\mathrm{Der}(A), [\ ])$ est une algèbre de Lie de ζ. □

Dans [2] on trouvera d'autres applications des algèbres de Lie tressées. Nous remercions Marc Wambst pour avoir été à l'origine des résultats de cet article.

Références

[1] Baez, J. C.: *Hochschild Homology in a Braided Tensor Category.* Wellesley College (Massachusetts) 1992.

[2] Haddi, A.; Hadj Nassar, S.: *Homologie et produit tensoriel tréssé.* Workshop on derived categories and applications, Almeria 1997.

[3] Joyal, A.; Street, R.: *Braided tensor categories.* Adv. Math. **102** (1993), 20–78.

[4] Kassel, C.: *Invariants des noeuds, catégories tensorielles et groupes quantiques.* Gazette des Mathématiciens **56** (1993), 63–80.

[5] Kassel, C.: *Quantum Groups.* Grad. Texts in Math. **155**, Springer Verlag 1995.

[6] MacLane, S.: *Natural associativity and commutativity.* Rice Univ. Studies **49** (1963), 28–46.

[7] Manin, Yu. L.: *Quantum groups and Non-Commutative Geometry.* Université de Montréal, Centre de Recherche Mathématiques, Montréal 1988.

[8] Turaev, V. G.: *Modular Categories and 3-manifold invariants.* Int. J. Modern Phys. B **6** (1992)(11–12), 1807–1824.

[9] M. Wambst, M.: *Homologie des algèbres quantiques.* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1993.

Received March 27, 1998