Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 38 (1997), No. 2, 315-323.

Schwache Kongruenzebenen

Erhard Quaisser
Universität Potsdam, Institut für Mathematik
Postfach 60 15 53, D-14415 Potsdam

Abstract. In this paper congruence planes with weak conditions on the congruence relation are investigated. Well-known and "trivial" properties (congruence axioms) from a lot of relevant papers receive a new rank and signification. Remarkable is the "conjugate" congruence relation.

1. Ausgangspositionen

1.1. Basisstruktur

Eine Struktur $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \perp)$ heißt *prä-euklidische Ebene*, wenn $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ eine affine Ebene mit $\mathbf{P}$ als Punkt- und $\mathbf{L}$ als Geradenmenge ist und wenn $\perp$ eine binäre Relation (*Orthogonalität*) in $\mathbf{L}$ ist, die auf der Ferngeraden eine fixpunktfreie Transformation (Ω) induziert. Damit ist eine Verträglichkeit der Orthogonalität mit der Parallelität sowie die Existenz und Eindeutigkeit von Loten gegeben. Die Symmetrie der Orthogonalitätsrelation wird hier bewußt nicht vorausgesetzt. Ist $a \perp b$, dann wird b ein *Rechtslot* von a und a ein *Linkslot* von b genannt. Die Bezeichnung "euklidisch" bezieht sich auf die Nichtexistenz selbstorthogonaler Geraden.

Jede affine Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *läßt sich zu einer prä-euklidischen Ebene metrisieren.*

Für das Minimalmodell einer affinen Ebene, für die affine Ebene über GF(2) ist das trivial. Hier kann wegen der geforderten Fixpunktfreiheit der induzierten Transformation auf der Ferngeraden keine der eingeführten Orthogonalitätsrelationen symmetrisch sein.

In allen anderen affinen Ebenen gibt es voneinander verschiedene Punkte A und B sowie eine Gerade c mit $A, B \notin c$, die die Verbindungsgerade AB schneidet. Eine Orthogonalitätsrelation $\perp$ kann nun konstruktiv und im theoretischen Sinne elementar so eingeführt werden, daß $AB \perp c$, $c \perp AB$ und $SA \perp SB$ für alle $S \in c \setminus AB$ ist. (Sie ist dadurch eindeutig bestimmt.) Diese Relation $\perp$ ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Sie ist in

0138-4821/93 $ 2.50 ©1997 Heldermann Verlag

einer Translationsebene von Charakteristik $\neq 2$ symmetrisch, falls der Schnittpunkt von AB und c der Mittelpunkt von A, B ist.

Für ein weiteres Beispiel setzen wir eine nicht fanosche Desarguessche Ebene, also eine affine Ebene über einem nicht notwendig kommutativen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ voraus. Die Gültigkeit eines speziellen Höhenschließungssatzes führt zu einer Relation $\perp$, die sich analytisch wie folgt beschreiben läßt ([8]):

$$(a_1, a_2)\perp(b_1, b_2) \iff \lambda a_2^{-1} a_1 + b_1^{-1} b_2 = 0 \text{ für } a_2, b_1 \neq 0$$
$$\text{und } (a_1, 0)\perp(0, b_2) \text{ für } a_1, b_2 \neq 0$$

wobei λ eine von 0 und -1 verschiedene Konstante aus K ist.

Diese Relation ist euklidisch im obigen Sinne genau dann, wenn $-\lambda \notin K^2$ ist, und sie ist symmetrisch genau dann, wenn $-\lambda$ im Zentrum von K liegt.

Dieses Beispiel macht deutlich, daß der Verzicht auf eine Symmetrieforderung für die Orthogonalitätsrelation keineswegs abwegig ist.

Wegen der Metrisierbarkeit jeder affinen Ebene zu einer prä-euklidischen ist mit der ebenen prä-euklidischen Geometrie eine Basis für die weiteren Untersuchungen gegeben, die bewußt sehr schwach angelegt ist.

1.2. Spiegelungsgeometrisch darstellbare prä-euklidische Ebenen (SGD-Ebenen)

Wir gehen von einem schwachen Begriff von Orthogonalspiegelungen an Geraden aus. Eine Transformation $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ heißt *Rechtsspiegelung an der Geraden* a genau dann, wenn folgende Eigenschaften bestehen (Fig. 1):

(a) $P \in a \iff P = P'$,

(b) $P \notin a \implies a \perp PP'$ und für alle $A \in a \backslash PP'$ und $Q \in PP' \backslash a$ gilt $Par(PAP') = Par(QAQ') \in a$,

(c) $PQ \parallel a \implies P'Q' \parallel a$ für alle $P, Q (\neq P) \notin a$.

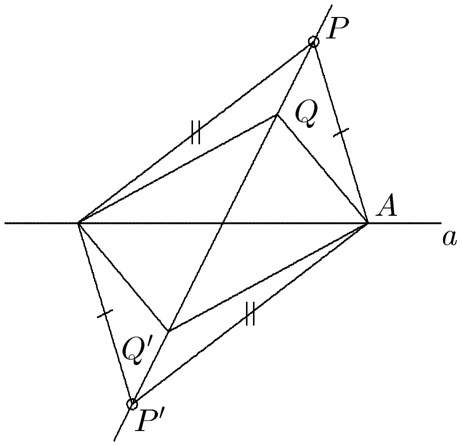

Fig. 1

Eine *Linksspiegelung* sei entsprechend erklärt. Dabei bezeichnet $Par(ABC)$ denjenigen Punkt D, der drei nicht kollinare Punkte A, B und C zum Parallelogramm $ABCD$ ergänzt.

Die Existenz und Eindeutigkeit derartiger Spiegelungen ist in prä-euklidischen Ebenen offen. Man erkennt leicht, daß sie involutorisch sind und daß auf Grund der Forderung (c) das Bild $\sigma(g)$ einer Geraden g bei einer Spiegelung σ an einer Gerade a wieder eine Gerade und überdies zu a parallel ist, wenn $g \parallel a$ ist.

Indem man Rechts- und Linksspiegelungen als Erzeugende zugrunde legt, kann man in Analogie zu bekannten Vorgehensweisen ([1], S. 34) die *Gruppenebene* $(\Pi, \Lambda, \perp)$ einer prä-euklidischen Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \perp)$ erklären ([10]).

Eine prä-euklidische Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \perp)$ wird *spiegelungsgeometrisch darstellbar* genannt, wenn ihre Gruppenebene $(\Pi, \Lambda, \perp)$ in gewisser kanonischer Weise isomorph zu $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \perp)$ ist. (Vgl. [10] und Darstellbarkeitsforderung (c*) in [9].)
In [10] wird folgender Charakterisierungsatz gezeigt:

Satz 1.1. *Eine prä-euklidische Ebene* $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \perp)$ *ist spiegelungsgeometrisch darstellbar genau dann, wenn die affine Inzidenzstruktur* $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *eine Translationsebene von Charakteristik* $\neq 2$ *ist.*

Prä-euklidische Ebenen, die spiegelungsgeometrisch darstellbar sind, werden im folgenden kurz SGD-*Ebenen* genannt. Sie sind nach dem Satz 1.1 inzidenzgeometrisch Translationsebenen von Charakteristik $\neq 2$, sie besitzen an jeder Geraden g genau eine Rechtsspiegelung σ_{gR} und genau eine Linksspiegelung σ_{gL} und man erkennt: Wenn $a \perp b$ und C der Schnittpunkt von a, b ist, dann ist $\sigma_{bL} \circ \sigma_{aR} = \sigma_{aR} \circ \sigma_{bL}$ und gleich der Punktspiegelung an C.

2. Kongruenzen in SGD-Ebenen

2.1. Kongruenzbegriff

In SGD-Ebenen gibt es zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten A und B den Mittelpunkt (kurz $Mp(A, B)$) und durch diesen sowohl das Rechtslot als auch das Linkslot zu AB. Diese Lote heißen das *Rechts-* bzw. *Linksmittellot* von (A, B) und werden mit $m_R(A, B)$ bzw. $m_L(A, B)$ bezeichnet. Überdies steht die bekannte *Parallelgleichheit* $\#$ als zweistellige Relation in der Menge der geordneten Punktepaare zur Verfügung.

Es ist nun naheliegend, in einer SGD-Ebene *Kongruenzen* $\equiv_R$ und $\equiv_L$ als zweistellige Relationen in der Menge der Punktepaare wie folgt einzuführen:

Definition. $AB \equiv_R CD$ *genau dann, wenn für den Punkt* B'*, der durch* $AB' \# CD$ *bestimmt ist, entweder* $B = B'$ *oder* $A \in m_R(B, B')$ *gilt (Fig. 2).*

Nach dieser Definition gilt für je zwei verschiedene Punkte A und B:

$$C \in m_R(A, B) \Longleftrightarrow CA \equiv_R CB.$$

Die Relation $\equiv_L$ sei völlig entsprechend mit dem Linksmittellot erklärt.

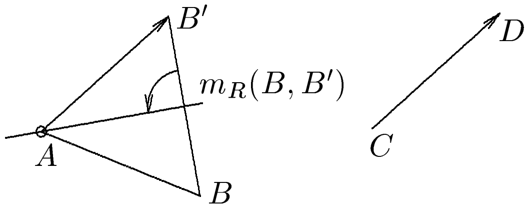

Fig. 2

2.2. Eigenschaften

Im folgenden steht $\equiv$ sowohl für die Relation $\equiv_R$ als auch für $\equiv_L$. Zunächst werden Eigenschaften untersucht, die in einer Vielzahl von einschlägigen Publikationen über Kongruenzebenen als triviale Forderungen an die zugrunde gelegte Kongruenzrelation gestellt werden; so etwa die, daß sie eine Äquivalenzrelation ist.

Anhand der Definition sind offensichtlich:

Lemma 2.1.

a. *Die Parallelgleichheit # ist eine Teilrelation von $\equiv$.*
b. *$\equiv$ ist reflexiv und symmetrisch.*
c. *Aus $AB \equiv CD$ und $CD\#EF$ folgt $AB \equiv EF$.*
d. *Es gilt $AB \equiv BA$ für alle Punkte A, B.*
e. *Aus $AB \equiv AA$ folgt $B = A$.*
f. *Aus $AB \equiv CD, CD \equiv EF$ und $AB \parallel CD \parallel EF$ folgt $AB \equiv EF$.*

Mit der letzten Aussage f. liegt eine schwache Transitivitätseigenschaft von $\equiv$ vor. Überdies ist leicht einsichtig

Lemma 2.2. *Aus $AB \equiv CD$ folgt $BA \equiv DC$.*

Die vielfach benutzte Eigenschaft

$$AB \equiv CD \Longrightarrow AB \equiv DC.$$

gilt hier im allgemeinen nicht. Wir zeigen

Satz 2.3. $AB \equiv_R CD \Longleftrightarrow AB \equiv_L DC.$

Beweis. Es sei $AB \equiv_R CD$, und überdies seien A, B und der durch $AB'\#CD$ bestimmte Punkt B' nicht kollinear, sonst ist die Behauptung trivial. Ferner sei noch B'' derjenige Punkt, für den $AB''\#DC$ gilt. Nach der Voraussetzung ist $A \in m_R(B, B')$. Wegen $A = Mp(B', B'')$ gilt $m_R(B, B') \parallel BB''$ und damit $A \in m_L(B, B'')$. Somit ist nach Definition $AB \equiv_L DC$.
Der umgekehrte Schluß ist auf die gleiche Weise klar. $\square$

Die volle Transitivität von $\equiv$ hat erhebliche Bedingungen an die SGD-Ebene zur Folge, wie folgender Satz zeigt.

Satz 2.4. *Die Transitivität von $\equiv_R$ ist sowohl mit dem Höhenschließungssatz als auch mit dem Satz von Pappos äquivalent (gilt entsprechend für $\equiv_L$).*

Beweis. Wir setzen die Transitivität von $\equiv_R$ voraus. Dann fallen die Relationen $\equiv_R$ und $\equiv_L$ sowie die Rechts- und Linkslote jeweils zusammen. (Siehe Lemma 2.1.d und Satz 2.3)

Ist nun ABD irgendein Dreieck, dann schneiden sich wegen $AB \nparallel BC$ die Mittellote $m(A,B)$ und $m(B,C)$ in einem Punkt M. Mit $MA \equiv MB$ und $MB \equiv MC$ ist auf Grund der Transitivität $MA \equiv MC$ und damit $M \in m(C,A)$, d.h., in jedem Dreieck schneiden sich die Mittellote in einem gemeinsamen Punkt. Daraus folgt die Gültigkeit des Höhenschließungssatzes für jedes Dreieck. (Vgl. z.B. [2].)

In der zugrundeliegenden Geometrie ist dieser Satz mit der Gültigkeit des Satzes von Pappos äquivalent. (Siehe u.a. [6].) Schließlich ist nun einsichtig, daß die Gültigkeit des Höhenschließungssatzes für Rechtslote die Transitivität von $\equiv_R$ zur Folge hat. $\square$

In SGD-Ebenen können notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von weiteren Kongruenzeigenschaften untersucht werden, die in der Literatur vor allem zur Charakterisierung von speziellen Kongruenzebenen benutzt werden. Eine solche ist zum Beispiel

W2. Ist ABC ein Dreieck mit $AB \equiv AC$ und $D \in AB, E \in AC$ sowie $DE \parallel BC$, dann gilt $AD \equiv AE$. (Siehe u.a. [3].)

Satz 2.5. *Die Kongruenzaussage* W2 *(für $\equiv_R$ oder $\equiv_L$) ist äquivalent mit folgendem speziellen Parallelogramm-Desargues: Sind $ABFC$ und $ADGE$ Parallelogramme mit $D \in AB$, $E \in AC$ und $BC \parallel DE$, und sind überdies die Diagonalen AF und BC orthogonal zueinander, dann gilt $G \in AF$ (Fig. 3).*

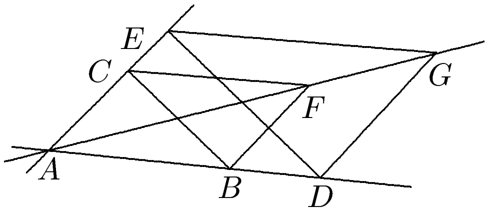

Fig. 3

Beweis. a) Aus den Prämissen von W2 (für $\equiv_R$) folgt zunächst $A \in m_R(B,C)$ und $DE \perp AF$. Mit dem speziellen Parallelogramm-Desargues ergibt sich daraus $G \in AF$ und damit $A \in m_R(D,E)$, also $AD \equiv_R AE$.

b) Umgekehrt setzen wir jetzt die Gültigkeit von W2 für $\equiv_R$ voraus. Aus den Prämissen des speziellen Parallelogramm-Desargues folgt dann $AB \equiv_R AC$, falls AF ein Rechtslot von BC ist. Nach W2 gilt dann $AD \equiv_R AE$ und damit $G \in AF$.

Im Falle $AF \perp BC$ kann folgende Eigenschaft genutzt werden. In Translationsebenen folgt aus der Gültigkeit des Parallelogramm-Desargues für den Fall, daß die parallelen Diagonalen BC und DE in einer festen Richtung ρ_1 und die Diagonale AF in einer festen Richtung ρ_2 liegen, auch die Gültigkeit dieser Aussage unter der Voraussetzung, daß BC, DE in der Richtung ρ_2 und AF in der Richtung ρ_1 enthalten sind. Dies bedeutet, daß mit der Gültigkeit von W2 für $\equiv_R$ auch W2 für $\equiv_L$ gilt. $\square$

Anmerkung. Die Geradentreue der Geradenspiegelungen steht hier nicht generell zur Verfügung.

3. Charakterisierung der SGD-Ebenen als affine Ebenen mit Kongruenz

In einer Fülle von Arbeiten sind vielfältige ebene metrische Strukturen mit Eigenschaften über Kongruenzen (Kongruenzaxiome) begründet und charakterisiert worden, so u.a. von Baer, Hilbert, Karzel, Kist, Kroll, Kustaanheimo, Quaisser, Schnabel, E. M. Schröder, Sörensen, Stanik, Wähling, Windelberg.
Im folgenden geht es vor allem um eine mögliche Charakterisierung der SGD-Ebenen als affine Ebenen mit speziellen Kongruenzeigenschaften. Die Forderungen an die Kongruenz $\equiv$ (Kongruenzaxiome) sind durch die unter 2.2 ausgewiesenen Eigenschaften gerechtfertigt, die sich bewußt an bekannten Kongruenzaxiomen orientieren.

3.1. Erste Aufbaustufe

Es sei $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv)$ eine Struktur mit folgenden Eigenschaften:
a) $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ ist affine Ebene,
b) $\equiv$ ist eine binäre Relation in $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$, für die gilt:

K1. $AA \equiv BB$ für alle $A, B \in \mathbf{P}$.
K2. $AB \equiv CD \Longrightarrow BA \equiv DC$.
K3. $AB \equiv CD \Longrightarrow CD \equiv AB$ (*Symmetrie*).
K4. Ist $AB \equiv CD$ und $CDFE$ ein Parallelogramm, dann gilt $AB \equiv EF$.
K5. Ist $ABCD$ Viereck und $AB \parallel CD$, dann gilt:
$AB \equiv CD \Longleftrightarrow A = Par(BCD) \vee A = Par(BDC)$.

Aus K4 und K5 folgen:

V. $AB \equiv BA$ für alle $A, B \in \mathbf{P}$.
R. $AB \equiv AB$ für alle $A, B \in \mathbf{P}$ (*Reflexivität*).
T'. Aus $AB \equiv CD$ und $CD \equiv EF$ und $AB \parallel CD \parallel EF$ folgt $AB \equiv EF$ (*schwache Transitivität*).

Von struktureller Bedeutung ist

Satz 3.1. $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv)$ *ist Translationsebene und entweder von Charakteristik* $\neq 2$ *oder fanosch.*

Dabei heißt eine affine Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *fanosch*, wenn $Par(PQR) = Par(QRP)$ für alle Dreiecke PQR gilt.

Beweis. Ein entsprechender Satz wird in [5] unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Kongruenz $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist und daß K5 gilt. Bei den Beweisen selbst kommt man aber tatsächlich mit der schwachen Form T' der Transitivität aus. □

Die folgende Überlegung zeigt, daß die bisherigen Kongruenzaxiome noch nicht zu einer Charakterisierung der SGD-Ebenen ausreichen.

Es sei $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ eine Translationsebene und $AB \equiv_T CD :\Longleftrightarrow AB\#CD \vee AB\#DC$. Man erkennt leicht, daß $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv_T)$ eine Kongruenzebene im obigen Sinne ist, d.h., daß die Kongruenzforderungen K1, K2, K3, K4 und K5 erfüllt sind.

Im Anschluß an den Satz 3.1. sind noch unmittelbar einsichtig

Lemma 3.2.
a. *Die Relation $\#$ und damit $\equiv_T$ sind in $\equiv$ enthalten.*
b. *Die Relation $\equiv$ ist gegenüber Translationen invariant.*

3.2. Konjugierte Kongruenz

Es sei $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv)$ eine Kongruenzebene mit K1, K2, K3, K4 und K5. Wir setzen

Definition. $AB \equiv^* CD :\Longleftrightarrow AB \equiv DC$; *$\equiv^*$ heißt die zu $\equiv$ konjugierte Kongruenz.*

Auf Grund der Eigenschaften V und T' gilt

Lemma 3.3. *Wenn $AB \parallel CD$, dann $AB \equiv^* CD :\Longleftrightarrow AB \equiv CD$.*

Folglich gilt für $\equiv^*$ auch Lemma 3.2. Weiterhin zeigt man leicht

Satz 3.4. *Die Relation $\equiv^*$ besitzt die Eigenschaften* K1, K2, K3, K4 und K5.

Lemma 3.5. *Es ist* $(\equiv^*)^* = \equiv$.

Lemma 3.6. *Die Relationen $\equiv^*$ und $\equiv$ sind genau dann gleich, wenn für $\equiv$ die Eigenschaft $AB \equiv CD \Longrightarrow AB \equiv DC$ gilt.*

3.3. Weiterer Aufbau

Im folgenden bezeichnen $m(A, B)$ und $m^*(A, B)$ die Punktmengen $\{X : XA \equiv XB\}$ bzw. $\{X : XA \equiv^* XB\}$, wobei A, B voneinander verschiedene Punkte sind. Die folgende zusätzliche Forderung an die Kongruenz $\equiv$ wird in gleicher Weise an ihre Konjugierte $\equiv^*$ gestellt.

K6. Sind A, B zwei voneinander verschiedene Punkte, dann sind die Punktmengen $m(A, B)$ und $m^*(A, B)$ Geraden, und diese schneiden AB.

Wie die im Anschluß an den Satz 3.1. vorgelegte Kongruenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv_T)$ zeigt, folgt dieses Axiom K6 nicht aus dem bisherigen System $\{$K1,..., K5$\}$.

Lemma 3.7. $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv)$ *ist eine Translationsebene von Charakteristik $\neq 2$.*

Beweis. Nach dem Satz 3.1. ist nur noch zu zeigen, daß es ein Parallelogramm mit sich schneidenden Diagonalen gibt.

Aus K6 folgt die Existenz eines Dreiecks ABC mit $CA \equiv CB$. Für den Punkt $D := Par(ACB)$ ergibt sich nach K4, K3 und K2 die Kongruenz $DA \equiv DB$. Die Diagonale CD ist also gleich $m(A, B)$, und nach K6 schneidet diese Diagonale AB. $\square$

Damit sind einsichtig

Lemma 3.8. *$m(A, B)$ und $m^*(A, B)$ schneiden AB im Mittelpunkt $Mp(A, B)$.*

Lemma 3.9. *Aus $AB \equiv AA$ folgt $B = A$.*

Vor Einführung einer Orthogonalität stellen wir noch zwei Hilfssätze bereit.

Lemma 3.10. *Sind A, B, C, D vier Punkte mit $Mp(A, B) = Mp(C, D)$, dann gilt: $CD = m(A, B) \Longleftrightarrow AB = m^*(C, D)$.*

Beweis. Gilt $CD = m(A, B)$, dann ist auf Grund der Prämissen $ACBD$ ein Parallelogramm und es gilt $CA \equiv CB$ sowie $DA \equiv DB$. Daraus folgt (nach K4 und K3) $BD \equiv^* BC$ und $AD \equiv^* AC$ und damit $AB = m^*(C, D)$. $\square$

Lemma 3.11. *Es gilt $AB \parallel CD \Longleftrightarrow m(A, B) \parallel m(C, D)$.*

Beweis. Es seien E, F zwei verschiedene Punkte auf $m(A, B)$ mit $Mp(E, F) = Mp(A, B)$. Bei der Translation, die $Mp(A, B)$ in $Mp(C, D)$ überführt, gehen A, B, E und F in Punkte A', B', E' und F' derart über, daß $E'F' = m(A', B')$ und $Mp(E', F') = Mp(A', B')$ $(= Mp(C, D))$ ist. Nach dem Lemma 3.10. gilt $A'B' = m^*(E', F')$.

Ist nun $AB \parallel CD$, so ist $A'B' = CD$ und damit $CD = m^*(E', F')$. Daraus folgt nach dem Lemma 3.10. dann $E'F' = m(C, D)$ und wegen $E'F' \parallel EF$ schließlich die Behauptung. Die Umkehrung ist in entsprechender Weise einsichtig. $\square$

Diese Beweise zeigen, daß die konjugierte Kongruenz $\equiv^*$ hilfreich sein kann. Wir führen nun eine Orthogonalität wie folgt ein:

Definition. *Es sei $a \perp b$ genau dann, wenn es Punkte $C, D \in a$ mit $b \parallel m(C, D)$ gibt.*

Nach den Sätzen 3.11., 3.10. und 3.9. ist einsichtig, daß $a \perp b$ äquivalent mit der Existenz von Punkten $E, F \in b$ mit $m^*(E, F) \parallel a$ ist und daß schließlich gilt

Satz 3.12. *Die Relation $\perp$ induziert auf der Ferngeraden eine fixpunktfreie Transformation.*

Die durch K1 – K6 bestimmten Kongruenzebenen $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \equiv)$ sind nach Satz 1.1. also SGD-Ebenen.

Die Darlegungen ergeben:

- Die Theorie der SGD-Ebenen und die der Kongruenzebenen (mit K1–K6) sind wechselseitig ineinander interpretierbar. Im einzelnen besteht folgender Zusammenhang:

Es sei $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ eine Translationsebene von Charakteristik $\neq 2$. Ist $\perp$ eine binäre Relation in $\mathbf{L}$, die auf der Ferngeraden eine fixpunktfreie Transformation induziert, dann bezeichne $K(\perp)$ die durch die Definition (unter 2.1) bestimmte (Kongruenz-)Relation in $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$. Und ist umgekehrt $\equiv$ eine binäre Relation in $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ mit den Eigenschaften K1–K6, dann bezeichne $\Omega(\equiv)$ die durch die obige Definition bestimmte Orthogonalitätsrelation in $\mathbf{L}$. Dann ist bemerkenswert, daß $\Omega(K(\perp)) = \perp$ und $K(\Omega(\equiv)) = \equiv$.

- Jede Translationsebene von Charakteristik $\neq 2$ läßt sich zu einer Kongruenzebene metrisieren, in der die Bedingungen K1,...,K6 gelten.

Letzteres macht deutlich, daß sich hier ein breiter Spielraum für einen Stufenaufbau von (euklidischen) Kongruenzebenen eröffnet. Nach der ersten Aufbaustufe (siehe 3.1) können noch pseudoeuklidische und parabolische sowie fanosche (Charakteristik=2) Typen einbezogen werden. (Dementsprechende Darlegungen sind geplant.)

Literatur

[1] Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

[2] Baer, R.: *The Fundamental Theorems of Elementary Geometry. An Axiomatic Analysis.* Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 94–129.

[3] Karzel, H.: *Fanosche metrische affine Ebenen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **43** (1975), 166–178.

[4] Karzel, H.; Sörensen, K.; Windelberg, D.: *Einführung in die Geometrie.* UTB (Nr. 184), Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1973.

[5] Karzel, H.; Stanik, R.: *Metrische affine Ebenen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 237–243.

[6] Lenz, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik.* Dt. Verlag d. Wiss. Berlin 1975.

[7] Quaisser, E.: *Metrische Relationen in affinen Ebenen.* Math. Nachr. **48** (1970), 1–31.

[8] Quaisser, E.: *Zu einer Orthogonalitätsrelation in Desarguesschen Ebenen (der Charakteristik $\neq 2$).* Beiträge zur Algebra und Geometrie **4** (1975), 71–84.

[9] Quaisser, E.: *Darstellbarkeitsfragen im Rahmen der ebenen pseudoeuklidischen Geometrie.* Univ. Potsdam, FB Mathematik, Preprint 92/15 (1992).

[10] Quaisser, E.: *Lower levels of Euclidean Planes.* Preprint (in preparation).

Received November 12, 1996