Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 38 (1997), No. 2, 343-356.

Automorphismes de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$

Odile Fleury

Université de Reims, Département de Mathématiques, U.R.A 1870
Moulin de la Housse, B.P. 1039, 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail: odile.fleury@univ-reims.fr

Résumé. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$ et q un élément de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ non racine de l'unité. Nous déterminons ici les automorphismes d'algèbre (puis les automorphismes d'algèbre de Hopf) de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, forme augmentée de l'analogue quantique de l'algèbre enveloppante de la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.

Introduction. La recherche des automorphismes de certaines algèbres n'est en général pas aisée. Le cas de l'espace affine A^n en est un exemple: seul le cas du plan a été traité entièrement dans [12] et déjà le cas $n = 3$ paraît présenter des automorphismes "sauvages" ([9]).

En ce qui concerne $U(\mathfrak{g})$, algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, M.K. Smith a traité le cas de certaines algèbres de Lie résolubles ([11]). Quant aux cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple, P. Polo ([10]) montre qu'un automorphisme d'algèbre de $U(\mathfrak{g})$ n'agit sur le centre que comme un automorphisme du diagramme de Dynkin et conjecture qu'il en est de même pour l'action sur le spectre primitif (il montre en tout cas que c'est vrai pour une certaine catégorie d'idéaux primitifs).

Le passage à la quantification a permis la détermination des automorphismes de $U_q(sl(2))$ ([1]) alors que le cas $U(sl(2))$ reste encore ouvert ([6]). Il semble, d'après cet exemple, que la quantification rigidifie les structures au point de réduire sensiblement le groupe d'automorphismes d'algèbre dans le passage du cas classique au cas quantique.

Dans [2] sont décrits les automorphismes d'algèbre de $U_q^+(sl(3))$. L'étude des automorphismes d'algèbre de $U_q^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ simple, paraît difficile et c'est pourquoi nous avons étudié l'algèbre enveloppante quantifiée de la sous-algèbre borélienne $\mathfrak{b}^+$, $U_q(\mathfrak{b}^+)$, ou plutôt sa forme augmentée $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Le théorème (2.14) obtenu aboutit à une structure simple du groupe des automorphismes d'algèbre:

$$Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \simeq (\Gamma \ltimes \mathcal{S}) \ltimes (\mathbb{C}^\star)^{2n},$$

où $\mathcal{S}$ est le sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ des matrices symétrisables par les mêmes entiers d_i qui symétrisent la matrice de Cartan (n étant le rang de $\mathfrak{g}$), et où Γ désigne le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin.

Puis dans le théorème (3.2), on en déduit aussitôt la structure du groupe des automorphismes d'algèbre de Hopf de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et on obtient l'isomorphisme:

$$Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \simeq \Gamma \ltimes (\mathbb{C}^\star)^n.$$

1. Rappels et notations

Dans toute la suite, q désignera un élément non nul de $\mathbb{C}$, non racine de l'unité. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang n, $\mathcal{C}_\mathfrak{g} = (a_{ij})$ sa matrice de Cartan, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R (resp. R^+) le système de racines (resp. positives) de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, $\varpi_1, ..., \varpi_n$ les poids fondamentaux, P le réseau des poids ($=\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i$), $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines simples, et Q le réseau des racines ($=\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$).
On a la relation:

$$\forall\ j \in [1,n],\ \alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\varpi_i. \tag{1}$$

Soient $d_1, ..., d_n$ les entiers naturels, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $(d_i a_{ij})$ soit symétrique. Pour $k, j \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^\star$, posons:

$$[k]_d = \frac{q^{dk} - q^{-dk}}{q^d - q^{-d}}\ ;\ [k]_d! = [1]_d[2]_d...[k]_d\ ;\ \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_d = [k]_d...[k-j+1]_d\ /\ [j]_d!$$

Soit W le groupe de Weyl associé au système de racines R, engendré par les réflexions $s_i, i = 1, ..., n$. On sait que W agit transitivement sur les bases et qu'il existe un unique élément ω_0 de plus grande longueur $N = |R^+|$ tel que $\omega_0(R^+) = -R^+$. Soit $\omega_0 = s_{i_1}...s_{i_N}$ une expression réduite de ω_0.
Posons alors $\beta_1 = \alpha_{i_1},\ \beta_k = s_{i_1}...s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}),\ i = 2, ..., N$. On a ainsi ordonné R^+ de façon "convexe" (si $i < j$ et $\beta_i + \beta_j \in R^+$, alors $\beta_i + \beta_j = \beta_k$ pour un certain k compris entre i et j). Cet ordre dépend évidemment de l'expression réduite choisie pour ω_0.
On définit sur $P \times Q$ une forme bilinéaire par $(\varpi_i, \alpha_j) = \delta_{ij}d_i$. Soit $\check{U}_o = \mathbb{C}[P]$ la $\mathbb{C}$-algèbre multiplicative du groupe P, et $\tau\ :\ P \longrightarrow \check{U}_o$ le morphisme canonique vérifiant: si $\lambda, \mu \in P$, alors $\tau(\lambda + \mu) = \tau(\lambda)\tau(\mu)$. Posons pour $\lambda \in P$, $\check{K}_\lambda = \tau(\lambda)$ puis $\check{K}_i = \check{K}_{\varpi_i}$ et $K_i = \check{K}_{\alpha_i}$ $(i = 1, ..., n)$. Alors $\check{U}_o = \mathbb{C}[\check{K}_1^{\pm 1}, ..., \check{K}_n^{\pm 1}]$.
Soit $\check{U}_q(\mathfrak{g})$ la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $\check{U}_o$ et les éléments $x_i,\ y_i$ $(i = 1, ..., n)$ avec les relations:

$$\check{K}_\lambda x_j = q^{(\lambda,\alpha_j)}x_j\check{K}_\lambda,\ \check{K}_\lambda y_j = q^{-(\lambda,\alpha_j)}y_j\check{K}_\lambda,$$

et en particulier:

$$\check{K}_i x_j = q^{\delta_{ij}d_i}x_j\check{K}_i,\ \check{K}_i y_j = q^{-\delta_{ij}d_i}y_j\check{K}_i\ ; \tag{2}$$

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}};$$

et les relations de Serre quantiques:

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{d_i} x_i^{1-a_{ij}-m} x_j x_i^m = 0 \ , \quad \forall\ i \neq j = 1, ..., n \tag{3}$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{d_i} y_i^{1-a_{ij}-m} y_j y_i^m = 0 \ , \quad \forall\ i \neq j = 1, ..., n.$$

On montre que $\check{U}_q(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf avec la structure donnée par:

$$\Delta x_i = x_i \otimes 1 + K_i \otimes x_i,\ \Delta y_i = y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes y_i,\ \Delta \check{K}_\lambda = \check{K}_\lambda \otimes \check{K}_\lambda,$$
$$S x_i = -K_i^{-1} x_i,\ S y_i = -y_i K_i,\ S\check{K}_\lambda = \check{K}_\lambda^{-1},$$
$$\varepsilon(x_i) = 0,\ \varepsilon(y_i) = 0,\ \varepsilon(\check{K}_\lambda) = 1.$$

Introduisons les sous - algèbres de $\check{U}_q(\mathfrak{g})$:

$$U_q(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[K_i^{\pm 1}, x_i, y_i\,; i = 1..., n]$$
$$\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) = \mathbb{C}[\check{K}_i^{\pm 1}, x_i\,; i = 1, ..., n],\ U_q(\mathfrak{b}^+) = \mathbb{C}[K_i^{\pm 1}, x_i\,; i = 1, ..., n].$$

Si $\Delta x = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, alors on notera $ad(x)(y) = \sum x_{(1)} y S x_{(2)}$. Appelons κ l'anti-automorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$, "conjugué"-linéaire défini par:

$$\kappa x_i = y_i,\ \kappa y_i = x_i,\ \kappa K_i = K_i^{-1} \text{ et } \kappa q = q^{-1}.$$

Soient alors les automorphismes T_i de l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ définis par:

$$T_i \check{K}_\alpha = \check{K}_{s_i(\alpha)},\ T_i x_i = -y_i K_i,\ T_i x_j = (-ad x_i)^{-a_{ij}}(x_j),\ T_i \kappa = \kappa T_i,$$

où $\alpha \in Q$ et $i = 1, ..., n$. On définit les éléments $E_{\beta_1}, ..., E_{\beta_N}$ par $E_{\beta_k} = T_{i_1} ... T_{i_{k-1}}(x_{i_k})$. Pour $k = 1, ..., N$, on a $\beta_k \in R^+$ et donc β_k s'exprime comme combinaison linéaire des racines simples à coefficients entiers positifs: $\beta_k = \sum_{i=1}^n m_{ki} \alpha_i$, $m_{ki} \in \mathbb{N}$. On a alors les théorèmes bien connus:

Théorème 1.1. ([7])

i) $\forall\ k = 1, ..., N,\ E_{\beta_k}$ *est une somme de monômes en les* $x_i, 1 \leq i \leq n$, *chacun contenant* m_{ki} *facteurs égaux à* x_i.

ii) $\forall k = 1, ..., N$, *si* $\beta_k = \alpha_i$, *alors* $E_{\beta_k} = x_i$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k, de la même façon que dans la démonstration de la proposition 1.8 de ([7]). □

Théorème 1.2. ([8]) *Comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel,* $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ *a pour base:*

$$\{\check{K}_1^{b_1} ... \check{K}_n^{b_n} E_{\beta_1}^{c_1} ... E_{\beta_N}^{c_N},\ b_i \in \mathbb{Z},\ c_j \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque 1.3.

1) *Les éléments inversibles de* $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ *sont les* $a\check{K}_1^{i_1} ... \check{K}_n^{i_n}$, $a \in \mathbb{C}^\star$, $i_k \in \mathbb{Z}$, $k \in [1, n]$.

2) *Les relations* (2) *et le théorème* (1.1 *i*) *impliquent* :

$$\check{K}_j E_{\beta_k} = q^{m_{kj} d_j} E_{\beta_k} \check{K}_j,\ j \in [1, n],\ k \in [1, N]. \tag{4}$$

2. Automorphismes d'algèbre

Soit $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$; $\check{K}_i$ et donc $\theta(\check{K}_i)$ sont inversibles dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, d'où:

$$\theta(\check{K}_i) = a_i \check{K}_1^{e_{1i}} ... \check{K}_n^{e_{ni}} \quad \text{où } e_{ji} \in \mathbb{Z}, \ \forall\, i,j \in [1,n].$$

Posons $\mathcal{M}_\theta = (e_{ji})_{j,i}$. Comme θ est un automorphisme, il vient que $\mathcal{M}_\theta$ est inversible, puis $\det(\mathcal{M}_\theta) = \pm 1 = \varepsilon$. Notons

$$\theta(x_1) = \sum_{b,c} \gamma_{bc} \check{K}_1^{b_1} ... \check{K}_n^{b_n} E_{\beta_1}^{c_1} E_{\beta_2}^{c_2} .... E_{\beta_N}^{c_N}, \text{ où les } c_j \text{ sont non tous nuls,}$$

puisque $\mathbb{C}[\check{K}_1^{\pm 1}, ..., \check{K}_n^{\pm 1}]$ est invariant par tout automorphisme.

Proposition 2.1. *Soit $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. Alors, $\mathcal{M}_\theta \in GL(n, \mathbb{N})$.*

Démonstration. D'après (2), on a: $\check{K}_i x_1 = q^{\delta_{i1} d_1} x_1 \check{K}_i, \ \forall i = 1, ..., n$.
Donc $\theta(\check{K}_i)\theta(x_1) = q^{\delta_{i1} d_1} \theta(x_1)\theta(\check{K}_i)$ pour tout i. C'est-à-dire:

$$a_i \sum_{b,c} \gamma_{bc} \check{K}_1^{e_{1i}} ... \check{K}_n^{e_{ni}} \check{K}_1^{b_1} ... \check{K}_n^{b_n} E_{\beta_1}^{c_1} ... E_{\beta_N}^{c_N} = q^{\delta_{i1} d_1} a_i \sum_{b,c} \gamma_{bc} \check{K}_1^{b_1} ... \check{K}_n^{b_n} E_{\beta_1}^{c_1} ... E_{\beta_N}^{c_N} \check{K}_1^{e_{1i}} ... \check{K}_n^{e_{ni}}.$$

On utilise ensuite (4) afin d'écrire le second membre de cette égalité comme une expression en fonction de la base décrite dans le théorème (1.2):

$$a_i \sum_{b_k, c_j} \gamma_{bc} \check{K}_1^{e_{1i}+b_1} ... \check{K}_n^{e_{ni}+b_n} E_{\beta_1}^{c_1} ... E_{\beta_N}^{c_N} =$$

$$q^{\delta_{i1} d_1} a_i \sum_{b_k, c_j} \gamma_{bc} q^{(-\sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^N e_{ji} d_j c_k m_{kj}))} \check{K}_1^{e_{1i}+b_1} ... \check{K}_n^{e_{ni}+b_n} E_{\beta_1}^{c_1} .... E_{\beta_N}^{c_N}.$$

D'où, par le théorème (1.2), pour tout i: $1 = q^{\delta_{i1} d_1 - \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^N e_{ji} d_j c_k m_{kj})}$.
Or q est supposé non racine de l'unité, donc: $\forall i, \ \delta_{i1} d_1 = \sum_{j=1}^n e_{ji} (\sum_{k=1}^N d_j c_k m_{kj})$.
Posons $A_1 = d_1 \sum_{k=1}^N c_k m_{k1}, ..., \ A_n = d_n \sum_{k=1}^N c_k m_{kn}$. Alors, pour tout i, on peut écrire: $e_{1i} A_1 + ... e_{ni} A_n = \delta_{1i} d_1$. On obtient ainsi un système de n équations à n inconnues $A_1, ..., A_n$, de déterminant $\det({}^t\mathcal{M}_\theta) = \varepsilon \neq 0$.
On le résout donc via les formules de Cramer:

$$A_i = \frac{1}{\varepsilon} \begin{vmatrix} e_{11} & \dots & e_{i-11} & d_1 & e_{i+11} & \dots & e_{n1} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{1n} & \dots & e_{i-1n} & 0 & e_{i+1n} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} d_1 \Delta_{i1}(\mathcal{M}_\theta),$$

où $\Delta_{i1}(\mathcal{M}_\theta)$ est le cofacteur de e_{i1}.
Or, pour tous i, j, k, les d_i, c_i, m_{jk} appartiennent à $\mathbb{N}$; donc pour tout l, $A_l \geq 0$, par définition de A_l.
D'où, pour tout $l \in [1, n]$, on a $\frac{1}{\varepsilon} d_1 \Delta_{l1}(\mathcal{M}_\theta) \geq 0$, ou encore $\frac{1}{\varepsilon} \Delta_{l1}(\mathcal{M}_\theta) \geq 0$.

En écrivant de même que θ doit conserver les relations (2) pour $x_2 ..., x_n$, on montre que, pour tous $i, j \in [1, n]$, on a: $\frac{1}{\varepsilon}\Delta_{ij}(\mathcal{M}_\theta) \geq 0$, où $\Delta_{ij}(\mathcal{M}_\theta)$ est le cofacteur de e_{ij}. Et donc finalement $\mathcal{M}_{\theta^{-1}} \in GL(n, \mathbb{N})$.
En raisonnant de même sur θ^{-1}, il vient: $\mathcal{M}_\theta \in GL(n, \mathbb{N})$. □

Lemme 2.2. *Si M est une matrice de $GL(n, \mathbb{N})$ telle que M^{-1} appartient aussi à $GL(n, \mathbb{N})$, alors c'est une matrice de permutation; i.e. $M = (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j}$ où δ représente le symbole de Kronecker et σ est une permutation dans le groupe symétrique S_n.*

Démonstration. Soient $M = (m_{ij})_{i,j}$ et $N = M^{-1} = (n_{ij})_{i,j}$ vérifiant les hypothèses. Soit i dans $[1, n]$ quelconque fixé. Alors $MN = I_n$ implique en particulier $\sum_{k=1}^n m_{ik}n_{ki} = 1$. Or pour tout k, m_{ik} et n_{ki} sont des entiers positifs par hypothèse; donc il existe un unique indice k_i dans $[1, n]$ tel que $m_{ik_i} = 1 = n_{k_i i}$. De plus, $MN = I_n$ implique aussi $\forall\ j \neq i$, $\sum_{k=1}^n m_{jk}n_{ki} = 0$ et comme $n_{k_i i} = 1$, on obtient: $\forall\ j \neq i,\ m_{jk_i} = 0$.
Alors, $i \neq j$ implique $k_i \neq k_j$ puisque $m_{jk_i} = 0$ et $m_{jk_j} = 1$. On a ainsi construit une permutation $\sigma : [1, n] \longrightarrow [1, n]$, $i \longmapsto k_i$ telle que la k_i'ème colonne de M est de la forme $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où le 1 est en i'ème position. □

Corollaire 2.3. *Soit $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. Alors, pour tout i, on a:*

$$\theta(\check{K}_i) = a_i\check{K}_{\sigma(i)},\ \textit{où } \sigma \in S_n \textit{ et } a_i \in \mathbb{C}^\star.$$

Démonstration. D'après la proposition (2.1) et le lemme (2.2), il vient que $\mathcal{M}_\theta$ est une matrice de permutation et donc $\theta(\check{K}_i) = a_i\check{K}_{\sigma(i)}$. □

Proposition 2.4. *Soit $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. Alors, pour tout i, on a:*

$$\theta(x_i) = \gamma_i\check{K}_1^{b_{1i}}...\check{K}_n^{b_{ni}}x_{\sigma(i)} \textit{ où } \gamma_i \in \mathbb{C}^\star \textit{ et } b_{ji} \in \mathbb{Z}\ (j = 1, ..., n).$$

Démonstration. D'après (2), on a, pour tout $l \neq 1$, $\check{K}_l x_1 = x_1\check{K}_l$, ce qui implique: $\forall l \neq 1$, $\check{K}_{\sigma(l)}\theta(x_1) = \theta(x_1)\check{K}_{\sigma(l)}$. D'où, pour tout $l \neq 1$,

$$\sum_{b,c}\gamma_{bc}\check{K}_{\sigma(l)}\check{K}_1^{b_1}...\check{K}_n^{b_n}E_{\beta_1}^{c_1}E_{\beta_2}^{c_2}...E_{\beta_N}^{c_N} = \sum_{b,c}\gamma_{bc}\check{K}_1^{b_1}...\check{K}_n^{b_n}E_{\beta_1}^{c_1}E_{\beta_2}^{c_2}...E_{\beta_N}^{c_N}\check{K}_{\sigma(l)}. \tag{5}$$

Puis, comme

$$\sum_{b,c}\gamma_{bc}\check{K}_1^{b_1}...\check{K}_n^{b_n}E_{\beta_1}^{c_1}E_{\beta_2}^{c_2}...E_{\beta_N}^{c_N}\check{K}_{\sigma(l)} = \sum_{b,c}\gamma_{bc}q^{-(\sum_{i=1}^N c_i m_{i\sigma(l)}d_{\sigma(l)})}\check{K}_{\sigma(l)}\check{K}_1^{b_1}...\check{K}_n^{b_n}E_{\beta_1}^{c_1}E_{\beta_2}^{c_2}...E_{\beta_N}^{c_N},$$

il vient alors (5) $\Longleftrightarrow$ $(\forall\ l \neq 1, \sum_{i=1}^N c_i m_{i\sigma(l)}d_{\sigma(l)} = 0)$, car q non racine de l'unité. Donc, pour tout $l \neq 1$, $\sum_{i=1}^N c_i m_{i\sigma(l)} = 0$. Et puisque c_i et $m_{i\sigma(l)} \geq 0$, pour tous $l \neq 1, i \in [1, N]$, on a $c_i m_{i\sigma(l)} = 0$. Cela s'écrit encore:

$$\forall\ i \in [1, N]\ :\ \forall\ l \neq 1,\ (c_i = 0 \text{ ou } m_{i\sigma(l)} = 0).$$

D'où (5) $\Longleftrightarrow$ $(\forall\ i \in [1, N]\ :\ (c_i = 0 \text{ ou } \forall\ l \neq 1,\ m_{i\sigma(l)} = 0))$.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall\ i \in [1, N]\ : \\ c_i = 0 \text{ ou si } c_i \neq 0,\ \beta_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}\alpha_j = m_{i\sigma(1)}\alpha_{\sigma(1)}.\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow (\forall\ i \in [1, N]\ :\ (c_i = 0 \text{ ou si } c_i \neq 0,\ \beta_i = \alpha_{\sigma(1)}))$$

(En effet, si α et $\beta \in R^+$, et si β est proportionnel à α, alors $\beta = \alpha$.)
On en déduit que le seul E_{β_i} apparaissant dans $\theta(x_1)$ correspond à $\beta_i = \alpha_{\sigma(1)}$; et ce E_{β_i} est en fait $x_{\sigma(1)}$ d'après le théorème (1.1 *ii*).

Ainsi, $\theta(x_1) \in \mathbb{C}[\check{K}_1^{\pm 1}, \dots, \check{K}_n^{\pm 1}, x_{\sigma(1)}]$ et de même, on montre que, pour tout i:

$$\theta(x_i) \in \mathbb{C}[\check{K}_1^{\pm 1}, ..., \check{K}_n^{\pm 1}, x_{\sigma(i)}].$$

Donc

$$\theta(x_i) = \sum_{k=1}^{D} P_k x_{\sigma(i)}^k \text{ et } \theta^{-1}(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^{D'} Q_j x_i^j,$$

où, pour tous k, j, on a $P_k, Q_j \in \check{U}_o$ et P_D et $Q_{D'} \neq 0$. D'où $x_i = \theta^{-1}(\sum_{k=1}^{D} P_k x_{\sigma(i)}^k) = \sum_{k=1}^{D} \theta^{-1}(P_k)(\sum_{j=1}^{D'} Q_j x_i^j)^k$. Or (2) implique: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \check{U}_o$, $x_i^k P = R x_i^k$ où $(R \neq 0) \iff (P \neq 0)$.

Donc $x_i = \sum_{k=1}^{D} \theta^{-1}(P_k)(\sum_{j=1}^{D'k} R_j x_i^j)$ et $R_{D'D} \neq 0$.

Alors $x_i = \sum_{k=1}^{D} \sum_{j=1}^{D'k} \theta^{-1}(P_k) R_j x_i^j$ et donc $DD' = 1$, soit $D = D' = 1$. Il vient alors: $\theta(x_i) = P_i x_{\sigma(i)}$ et $\theta^{-1}(x_i) = Q_i x_{\sigma^{-1}(i)}$, où P_i, $Q_i \in \check{U}_o$. D'où $x_i = \theta(Q_i) P_{\sigma^{-1}(i)} x_i$, *i.e.* $\theta(Q_i) P_{\sigma^{-1}(i)} = 1$; ce qui implique, d'après la remarque (1.3) que $P_{\sigma^{-1}(i)}$ est un monôme en les $\check{K}_j^{\pm 1}$; et ce, pour tout i. Finalement, pour tout $i \in [1, n]$, on a

$$\theta(x_i) = \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)} \quad \text{où } \gamma_i \in \mathbb{C}^\star,\ b_{ji} \in \mathbb{Z}\ (j = 1, ..., n). \qquad \square$$

Lemme 2.5. *Soient $\theta \in Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ et σ la permutation qui lui est associée. Alors:*

$$\forall i \in [1, n],\ d_i = d_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Avec les notations des corollaire (2.3) et proposition (2.4), on a:

$$\theta(\check{K}_i x_j) = q^{\delta_{ij} d_i} \theta(x_j \check{K}_i) \iff \check{K}_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1j}} ... \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} = q^{\delta_{ij} d_i} \check{K}_1^{b_{1j}} ... \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} \check{K}_{\sigma(i)},$$

soit encore

$$\check{K}_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1j}} ... \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} = q^{\delta_{ij} d_i} q^{-\delta_{ij} d_{\sigma(i)}} \check{K}_1^{b_{1j}} ... \check{K}_n^{b_{nj}} \check{K}_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}.$$

Cette égalité implique le résultat cherché. $\square$

Théorème 2.6. *Soient α_i et α_j deux racines simples distinctes. Alors:*

$$\{t \in \mathbb{Z} \mid \alpha_i + t\alpha_j \in R\} = [0, -a_{ji}].$$

Démonstration: cf. ([5])

Lemme 2.7. *Soient $\theta \in Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ et σ la permutation qui lui est associée. Alors:*

$$\forall\ i, j \in [1, n],\ a_{ij} \leq a_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

Démonstration. Pour tous $i \neq j$, a_{ij} et $a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ peuvent prendre les valeurs 0,-1,-2, -3. Montrons qu'on ne peut avoir $a_{ij} > a_{\sigma(i)\sigma(j)}$; supposons par l'absurde qu'il existe i, j, tels que $a_{ij} > a_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

1^{er} cas: $a_{ij} = 0$ et $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -1$

Dans ce cas, (3) donne $x_i x_j = x_j x_i$ et donc $\theta(x_i)\theta(x_j) = \theta(x_j)\theta(x_i)$.
D'où, avec les notations de la proposition (2.4), on a:

$$\check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} = \check{K}_1^{b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} \check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)},$$

soit encore, en redressant:

$$q^{-b_{\sigma(i)j} d_{\sigma(i)}} \check{K}_1^{b_{1i}+b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}+b_{nj}} x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} = q^{-b_{\sigma(j)i} d_{\sigma(j)}} \check{K}_1^{b_{1i}+b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}+b_{nj}} x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)}.$$

Et par conséquent, on a:

$$x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} = q^{b_{\sigma(i)j} d_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)i} d_{\sigma(j)}} x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)}. \tag{6}$$

On va maintenant exprimer les 2 membres de cette égalité en fonction des termes de la base de P.B.W. du théorème (1.2) et arriver à une contradiction dans l'égalité elle-même.
D'après le théorème (2.6), l'égalité $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -1$ implique $\alpha_{\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(i)} \in R^+$. Donc il existe $k \in [1, N]$ tel que $\alpha_{\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(j)} = \beta_k$. Et le théorème (1.1 i) donne:

$$E_{\beta_k} = c x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} + c' x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)},$$

où $c, c' \in \mathbb{C}$ et c, c' ne sont pas nuls simultanément.
Supposons $\alpha_{\sigma(i)} < \alpha_{\sigma(j)}$ pour l'ordre convexe mis sur R^+ (la démonstration serait analogue si $\alpha_{\sigma(j)} < \alpha_{\sigma(i)}$). On a donc $\alpha_{\sigma(i)} < \beta_k < \alpha_{\sigma(j)}$.
De plus, $c' \neq 0$ sinon E_{β_k} et $x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}$ sont linéairement dépendants; ce qui est contradictoire avec le théorème (1.2).
D'où $x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)} = {c'}^{-1} E_{\beta_k} - {c'}^{-1} c x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}$, et alors, en redressant:

$$(6) \Longleftrightarrow x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} = q^{b_{\sigma(i)j} d_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)i} d_{\sigma(j)}} \left[{c'}^{-1} E_{\beta_k} - {c'}^{-1} c x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} \right]$$

et par conséquent, on a: $(\dots) x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} - q^{b_{\sigma(i)j} d_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)i} d_{\sigma(j)}} {c'}^{-1} E_{\beta_k} = 0$; ce qui est impossible d'après le théorème (1.2), puisque le cœfficient de E_{β_k} est non nul.

2^e cas: $a_{ij} = 0$ et $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -2$

Les cas concernés sont les types B_n, C_n, F_4 et dans ces cas, $(a_{ij} = 0 \Longrightarrow a_{ji} = 0)$ et $(a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -2 \Longrightarrow a_{\sigma(j)\sigma(i)} = -1)$. Quitte à échanger i et j, on est ainsi ramené au 1^{er} cas.

3^e cas: $a_{ij} = -1$ et $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -2$

Dans ce cas, (3) $\Longleftrightarrow x_i^2 x_j - (q^{d_i} + q^{-d_i}) x_i x_j x_i + x_j x_i^2 = 0$.
La conservation de cette égalité par θ donne:

$$\check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} + \check{K}_1^{b_{1j}} \dots \check{K}_n^{b_{nj}} x_{\sigma(j)} \check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)} \check{K}_1^{b_{1i}} \dots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)}$$

$$-(q^{d_i}+q^{-d_i})\check{K}_1^{b_{1i}}...\check{K}_n^{b_{ni}}x_{\sigma(i)}\check{K}_1^{b_{1j}}...\check{K}_n^{b_{nj}}x_{\sigma(j)}\check{K}_1^{b_{1i}}...\check{K}_n^{b_{ni}}x_{\sigma(i)}=0.$$

D'où, en redressant:

$$q^{-b_{\sigma(i)i}d_{\sigma(i)}-2b_{\sigma(i)j}d_{\sigma(i)}}x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}+q^{-2b_{\sigma(j)i}d_{\sigma(j)}-b_{\sigma(i)i}d_{\sigma(i)}}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}^2$$

$$-(q^{d_i}+q^{-d_i})q^{-b_{\sigma(i)j}d_{\sigma(i)}-b_{\sigma(i)i}d_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)i}d_{\sigma(j)}}x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}=0$$

ou encore:

$$x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}-(q^{d_i}+q^{-d_i})q^Ax_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}+q^{2A}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}^2=0, \qquad (7)$$

avec $A:=b_{\sigma(i)j}d_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)i}d_{\sigma(j)}$. L'idée est alors la même que pour le 1^{er} cas: il s'agit d'exprimer cette égalité en termes de P.B.W. et d'y lire ensuite une contradiction.
D'après le théorème (2.6), l'égalité $a_{\sigma(i)\sigma(j)}=-2$ implique que $\alpha_{\sigma(j)}+\alpha_{\sigma(i)}$ et $\alpha_{\sigma(j)}+2\alpha_{\sigma(i)}\in R^+$, *i.e.* il existe k et l dans $[1,N]$, tels que $\beta_k=\alpha_{\sigma(i)}+\alpha_{\sigma(j)}$ et $\beta_l=\beta_k+\alpha_{\sigma(i)}$. Et, d'après le théorème (1.1), on a:

$$E_{\beta_k}=cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}+c'x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad E_{\beta_l}=sE_{\beta_k}x_{\sigma(i)}+s'x_{\sigma(i)}E_{\beta_k},$$

où c et c' (resp. s et s') ne sont pas simultanément nuls. Supposons par exemple $\alpha_{\sigma(i)}<\alpha_{\sigma(j)}$. Donc $\alpha_{\sigma(i)}<\beta_k<\beta_l<\alpha_{\sigma(j)}$ par convexité de l'ordre mis sur R^+. De plus, $c'\neq 0$ et $s\neq 0$; sinon E_{β_k} et $x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}$ (resp. E_{β_l} et $x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}$) seraient linéairement dépendants, ce qui est impossible puis que ce sont 2 éléments distincts de la base P.B.W du théorème (1.2). On a:

$$x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}=c'^{-1}E_{\beta_k}-c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} \quad \text{et} \quad E_{\beta_k}x_{\sigma(i)}=s^{-1}E_{\beta_l}-s^{-1}s'x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer l'égalité (7) à l'aide de termes de la forme $x_{\sigma(i)}^aE_{\beta_k}^bE_{\beta_l}^cx_{\sigma(j)}^d$.
(7) devient:

$$x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}-(q^{d_i}+q^{-d_i})q^Ax_{\sigma(i)}\left[c'^{-1}E_{\beta_k}-c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}\right]+q^{2A}\left[c'^{-1}E_{\beta_k}-c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}\right]x_{\sigma(i)}=0$$

i.e.

$$(...)x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}-(q^{d_i}+q^{-d_i})q^Ac'^{-1}x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}+q^{2A}c'^{-1}E_{\beta_k}x_{\sigma(i)}-q^{2A}c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}=0,$$

où il faut encore redresser $E_{\beta_k}x_{\sigma(i)}$ et $x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}$. En redressant, on obtient:

$$(...)x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}-(q^{d_i}+q^{-d_i})q^Ac'^{-1}x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}+q^{2A}c'^{-1}\left[s^{-1}E_{\beta_l}-s^{-1}s'x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}\right]$$

$$-q^{2A}c'^{-1}cx_{\sigma(i)}\left[c'^{-1}E_{\beta_k}-c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}\right]=0,$$

et en ordonnant les termes,

$$(...)x_{\sigma(i)}^2x_{\sigma(j)}-(...)x_{\sigma(i)}E_{\beta_k}+q^{2A}c'^{-1}s^{-1}E_{\beta_l}=0.$$

On obtient alors une combinaison linéaire nulle de trois termes distincts, linéairement indépendants d'après (1.2). Donc $q^{2A}c'^{-1}s^{-1}=0$; ce qui n'est pas possible.

4^e cas: $a_{ij} = -1$ et $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -3$

Alors (3) s'écrit $x_i^2 x_j - (q^3 + q^{-3}) x_i x_j x_i + x_j x_i^2 = 0$. Le calcul fait dans le 3^e cas implique alors:

$$x_{\sigma(i)}^2 x_{\sigma(j)} - (q^3 + q^{-3}) q^A x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)} + q^{2A} x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)}^2 = 0. \tag{7}$$

De plus, $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -3$ donc le théorème (2.6) implique $\alpha_{\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(j)} + 2\alpha_{\sigma(i)} \in R^+$. Et la démonstration de l'impossibilité de ce 4^e cas se termine comme pour le 3^e.
On en déduit que, pour tous $i \neq j$, on ne peut avoir $a_{ij} > a_{\sigma(i)\sigma(j)}$. □

Théorème 2.8.

$$\forall\ i, j \in [1, n],\ a_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

Démonstration. Ce résultat est évident lorsque $i = j$ car alors $a_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = 2$. Si $i \neq j$, les seules valeurs possibles pour a_{ij} sont $0, -1, -2, -3$. Considérons tous les couples (i, j) pour lesquels $a_{ij} = 0$. Alors le lemme (2.7) implique $a_{\sigma(i)\sigma(j)} \geq 0$. Or puisque $i \neq j$ et comme σ est une permutation, on a $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Or 0 est la valeur maximale que peut prendre a_{kl} pour $k \neq l$, donc $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$; et ce, pour tout (i, j) tel que $a_{i,j} = 0$.
Considérons maintenant tous les couples (i, j) tels que $a_{ij} = -1$. Alors le lemme (2.7) implique $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -1$ ou 0. Mais si $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$, en appliquant ce qui précède avec σ^{-1}, on a $a_{ij} = 0$. Donc nécessairement, si $a_{ij} = -1$, on a $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = -1$.
On raisonne de même si $a_{ij} = -2$ ou -3. □

Corollaire 2.9. *Soit θ un automorphisme et σ sa permutation associée. Alors σ induit un automorphisme du graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. D'après le théorème (2.8), pour tous i, j, on a $a_{\sigma(i)\sigma(j)} a_{\sigma(j)\sigma(i)} = a_{ij} a_{ji}$. Par conséquent, le nombre d'arêtes joignant les sommets i et j est conservé par σ.
D'autre part, par définition des entiers d_i, on a: $\forall\ i, j,\ d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$. Donc, puisque $a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ (où $(.,.)$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$), alors:

$$\forall\ i, j,\ \frac{d_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{d_j}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

En particulier, d'après le lemme (2.5), pour tout i, $\frac{d_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{d_{\sigma(i)}}{(\alpha_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})} = \frac{d_i}{(\alpha_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})}$. D'où, pour tout i, $(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})$. Et par conséquent, le poids affecté au sommet i est lui aussi conservé par σ. □

Proposition 2.10. *Avec les notations de la proposition (2.4), on a:*

$$\forall i, j = 1, ..., n,\ d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}.$$

Démonstration. Si $a_{ij} = 2$, alors $i = j$, et on a évidemment $d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}$.

Si $a_{ij} = 0$, on a vu dans le 1^{er} cas de la démonstration du lemme (2.7) qu'alors:

$$x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)} = q^{d_{\sigma(i)} b_{\sigma(i)j} - d_{\sigma(j)} b_{\sigma(j)i}} x_{\sigma(j)} x_{\sigma(i)}. \tag{6}$$

D'autre part, d'après le théorème (2.8), l'égalité $a_{ij} = 0$ implique $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$, égalité qui elle-même donne l'équation de Serre (3): $x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}$.
D'où, puisque q n'est pas racine de l'unité, et avec (6), on a: $d_{\sigma(i)}b_{\sigma(i)j} = d_{\sigma(j)}b_{\sigma(j)i}$.

Si $a_{ij} = -1$, le 3^e cas de la démonstration du lemme (2.7) menait à l'égalité:

$$x^2_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} - (q^{d_i} + q^{-d_i})q^A x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)} + q^{2A}x_{\sigma(j)}x^2_{\sigma(i)} = 0 \qquad (7),$$

où $A = d_{\sigma(i)}b_{\sigma(i)j} - d_{\sigma(j)}b_{\sigma(j)i}$. D'autre part, puisque $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij} = -1$, l'équation (3) s'écrit:

$$x^2_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} - (q^{d_{\sigma(i)}} + q^{-d_{\sigma(i)}})x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)} + x_{\sigma(j)}x^2_{\sigma(i)} = 0 \qquad (3').$$

En soustrayant (3′) à (7) et en notant que $q^{d_i} + q^{-d_i} = q^{d_{\sigma(i)}} + q^{-d_{\sigma(i)}}$, on obtient:

$$(q^{d_i} + q^{-d_i})(1 - q^A)x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)} + (q^{2A} - 1)x_{\sigma(j)}x^2_{\sigma(i)} = 0,$$

d'où

$$(1 - q^A)\left[(q^{d_i} + q^{-d_i})x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} - (q^A + 1)x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}\right] = 0. \qquad (8)$$

Par ailleurs, en supposant $\alpha_{\sigma(i)} < \alpha_{\sigma(j)}$ et en notant $\beta_k = \alpha_{\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(j)}$, on obtient $E_{\beta_k} = cx_{\sigma(i)} + c'x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)}$, avec $c, c' \in \mathbb{C}$ et $c' \neq 0$.
D'où l'on tire $x_{\sigma(j)}x_{\sigma(i)} = c'^{-1}E_{\beta_k} - c'^{-1}cx_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}$ et on aboutit ainsi à une nouvelle écriture de l'égalité (8):

$$(1 - q^A)\left[(...)x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)} - (q^A + 1)c'^{-1}E_{\beta_k}\right] = 0.$$

Et comme $(q^A + 1)c'^{-1} \neq 0$, on a $1 - q^A = 0$ et donc $A = 0$.

Si $a_{ij} = -2$, les matrices de Cartan concernées sont celles des systèmes de racines de type B_n, C_n, F_4. Et dans tous ces cas, si $a_{ij} = -2$, alors $a_{ji} = -1$ et on est donc ramené au 2^e cas.

Si $a_{ij} = -3$, alors $a_{ji} = -1$ (le seul type concerné étant G_2) et on est encore ramené au 2^e cas.
Dans tous les cas, on a montré que, pour tous i et j, $d_{\sigma(i)}b_{\sigma(i)j} = d_{\sigma(j)}b_{\sigma(j)i}$; d'après le lemme (2.5), on a $d_{\sigma(i)} = d_i$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 2.11. *Soit* $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. *Alors:*

$$\forall i,\ \theta(\check{K}_i) = a_i\check{K}_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \theta(x_i) = \gamma_i\check{K}_1^{b_{1i}}...\check{K}_n^{b_{ni}}x_{\sigma(i)},$$

où $a_i,\ \gamma_i \in \mathbb{C}^\star$, σ *automorphisme du graphe de Dynkin,* $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *et pour tout* j, $d_ib_{\sigma(i)j} = d_jb_{\sigma(j)i}$.

Démonstration. En conséquence de tout ce qui précède, les automorphismes sont nécessairement de cette forme; et on vérifie aisément que les relations définissant $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ sont effectivement conservées par une telle transformation. □

Notations: Soit Γ le groupe des automorphismes du graphe de Dynkin.
Soit G le sous-groupe des automorphismes $\theta_{(\sigma,B)}$ de $Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ définis par:

$$\theta_{(\sigma,B)}(x_i) = \check{K}_1^{b_{1i}}...\check{K}_n^{b_{ni}}x_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \theta_{(\sigma,B)}(\check{K}_i) = \check{K}_{\sigma(i)},$$

où $\sigma \in \Gamma$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ avec pour tous $i, j,\ d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}$.
Soit aussi H le sous-groupe des automorphismes $\theta_{a,\gamma}$ de $Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ définis par:

$$\theta_{a,\gamma}(x_i) = \gamma_i x_i \quad \text{et} \quad \theta_{a,\gamma}(\check{K}_i) = a_i \check{K}_i, \quad \text{où } \gamma = (\gamma_i)_i,\ a = (a_i)_i \in (\mathbb{C}^\star)^n.$$

Remarque. Evidemment, $H \simeq (\mathbb{C}^\star)^{2n}$.

Lemme 2.12. *$Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \simeq G \ltimes ((\mathbb{C}^\star)^{2n}$*

Démonstration. Soit en effet l'application $\psi : G \longrightarrow Aut(H)$ qui à $\theta_{(\sigma,B)}$ associe $\psi(\theta_{(\sigma,B)})$: $\theta_{a,\gamma} \longmapsto \theta_{a_\sigma,\gamma_\sigma}$, où a_σ et γ_σ désignent respectivement $(a_{\sigma(i)})_i$ et $(\gamma_{\sigma(i)})_i$.
On vérifie facilement que ψ est un morphisme de groupes et le lemme est démontré avec la remarque. $\square$

Notations: Pour tous $\sigma \in \Gamma$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on notera dans la suite ${}^\sigma B$ la matrice $\left(b_{\sigma^{-1}(i)j}\right)_{ij}$ et B^σ la matrice $\left(b_{i\sigma(j)}\right)_{ij}$.

Lemme 2.13. *Soit $\mathcal{S}$ le sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ des matrices symétrisables par les entiers d_i, i.e. $\mathcal{S} = \{B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \forall i, j,\ d_i b_{ij} = d_j b_{ji}\}$. Alors*

$$G \simeq \Gamma \ltimes_\varphi \mathcal{S},$$

avec $\varphi : \Gamma \longrightarrow Aut(\mathcal{S})$ défini par $\varphi(\sigma)(B) = {}^\sigma B^{\sigma^{-1}}$.

Démonstration. Soient $\theta_{(\sigma,B)}$, $\theta_{(\sigma',B')}$ dans G. Alors un rapide calcul donne:

$$\theta_{(\sigma,B)}\theta_{(\sigma',B')}(x_i) = \check{K}_1^{b_{1\sigma'(i)}+b_{\sigma^{-1}(1)i}{}'} \ldots \check{K}_n^{b_{n\sigma'(i)}+b_{\sigma^{-1}(n)i}{}'} x_{\sigma\sigma'(i)} \quad \text{et} \quad \theta_{(\sigma,B)}\theta_{(\sigma',B')}(\check{K}_i) = \check{K}_{\sigma\sigma'(i)}.$$

D'où
$$\theta_{(\sigma,B)}\theta_{(\sigma',B')} = \theta_{(\sigma\sigma',{}^\sigma B' + B^{\sigma'})}. \qquad (*)$$

Soit $\mathcal{G} = \{(\sigma, B) \in \Gamma \times \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \forall i, j,\ d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}\}$
$\qquad = \{(\sigma, B) \in \Gamma \times \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid {}^{\sigma^{-1}}B \in \mathcal{S}\}$.

D'après $(*)$, $\mathcal{G}$ muni du produit $(\sigma, B)(\sigma', B') = (\sigma\sigma', {}^\sigma B' + B^{\sigma'})$, est un groupe et G et $\mathcal{G}$ sont clairement isomorphes via $\theta_{(\sigma,B)} \longmapsto (\sigma, B)$.
Attachons-nous à l'étude de $\mathcal{G}$. Montrons que $\Gamma \times \mathcal{S}$ est muni d'une structure de produit semi-direct, auquel $\mathcal{G}$, et donc G, est isomorphe.
Soit $\varphi : \Gamma \longrightarrow Aut(\mathcal{S})$ défini par $\varphi(\sigma)(B) = {}^\sigma B^{\sigma^{-1}}$. L'application φ est bien définie car

$$d_i({}^\sigma B^{\sigma^{-1}})_{ij} = d_i b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} = d_{\sigma^{-1}(i)} b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)},$$

puisque pour tous $\tau \in \Gamma,\ i \in [1, n]$, on a $d_i = d_{\tau(i)}$. Et comme $B \in \mathcal{S}$, on a $d_{\sigma^{-1}(i)} b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} = d_{\sigma^{-1}(j)} b_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(i)}$ et de nouveau, puisque $d_{\sigma^{-1}(j)} = d_j$, on obtient finalement $d_i b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} = d_j b_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(i)}$, ce qui signifie que ${}^\sigma B^{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.
En outre, φ est évidemment un morphisme de groupes, d'où la structure de produit semi-direct sur $\Gamma \times \mathcal{S}$.

Soit maintenant $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \Gamma \ltimes_{\varphi} \mathcal{S}$ défini par $(\sigma, B) \longmapsto (\sigma, {}^{\sigma^{-1}}B)$; ψ est évidemment bijectif et c'est un homomorphisme. En effet:

$$\psi((\sigma,B)(\sigma',B')) = \psi((\sigma\sigma', {}^{\sigma}B' + B^{\sigma'})) = (\sigma\sigma', {}^{\sigma'^{-1}}B' + {}^{\sigma'^{-1}\sigma^{-1}}B^{\sigma'})$$

et

$$\begin{aligned}\psi((\sigma,B))\psi((\sigma',B')) &= \Big(\sigma, {}^{\sigma^{-1}}B)(\sigma', {}^{\sigma'^{-1}}B'\Big) = \Big(\sigma\sigma', \varphi(\sigma'^{-1})({}^{\sigma^{-1}}B) + {}^{\sigma'^{-1}}B'\Big)\\ &= (\sigma\sigma', {}^{\sigma'^{-1}\sigma^{-1}}B^{\sigma'} + {}^{\sigma'^{-1}}B').\end{aligned}$$

D'où l'on a $\mathcal{G} \simeq \Gamma \ltimes_{\varphi} \mathcal{S}$. □

Théorème 2.14. *On a l'isomorphisme:*

$$Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \simeq (\Gamma \ltimes_{\varphi} \mathcal{S}) \ltimes (\mathbb{C}^{\star})^{2n}.$$

En particulier, $Aut_{\mathbb{C}}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ est un groupe résoluble.

Démonstration. C'est un simple corollaire des lemmes (2.12) et (2.13).

3. Automorphismes d'algèbre de Hopf de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$

Proposition 3.1. *Soient $\theta \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ et σ l'automorphisme du graphe de Dynkin qui lui est associé. Alors*

$$\theta(\check{K}_i) = \check{K}_{\sigma(i)} \text{ et } \theta(x_i) = \gamma_i x_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$, vérifiant les notations du théorème (2.11):

$$\forall i,\ \theta(\check{K}_i) = a_i \check{K}_{\sigma(i)} \ \text{ et } \ \theta(x_i) = \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)}.$$

$(\theta \otimes \theta)(\Delta(\check{K}_i)) = \Delta(\theta(\check{K}_i)) \Longleftrightarrow (\theta \otimes \theta)(\check{K}_i \otimes \check{K}_i) = \Delta(a_i \check{K}_{\sigma(i)})$.
Donc $a_i^2 \check{K}_{\sigma(i)} \otimes \check{K}_{\sigma(i)} = a_i \check{K}_{\sigma(i)} \otimes \check{K}_{\sigma(i)}$ soit encore $a_i = 1$. D'où, pour tout i, on a: $\theta(\check{K}_i) = \check{K}_{\sigma(i)}$ et aussi $\theta(K_i) = K_{\sigma(i)}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\theta(x_i)) &= \Delta(\gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}})\Delta(x_{\sigma(i)}) = \gamma_i(\check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} \otimes \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}})\Delta(x_{\sigma(i)})\\ &= \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} x_{\sigma(i)} \otimes \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} + \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} K_{\sigma(i)} \otimes \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} x_{\sigma(i)}\\ &= \theta(x_i) \otimes \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} + \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} K_{\sigma(i)} \otimes \theta(x_i).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\theta \otimes \theta)(\Delta(x_i)) &= (\theta \otimes \theta)(x_i \otimes 1 + K_i \otimes x_i)\\ &= \theta(x_i) \otimes 1 + \theta(K_i) \otimes \theta(x_i) = \theta(x_i) \otimes 1 + K_{\sigma(i)} \otimes \theta(x_i).\end{aligned}$$

Il vient: $\theta(x_i) \otimes 1 + K_{\sigma(i)} \otimes \theta(x_i) = \theta(x_i) \otimes \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{1n}} + \check{K}_1^{b_{1i}} ... \check{K}_n^{b_{ni}} K_{\sigma(i)} \otimes \theta(x_i)$. Et par conséquent, pour tout j, on a $b_{ji} = 0$; et ce, pour tout i.
On vérifie alors que toutes les autres conditions pour que θ soit un automorphisme d'algèbre de Hopf sont satisfaites. □

Théorème 3.2. *On a l'isomorphisme:*

$$Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \simeq \Gamma \ltimes (\mathbb{C}^\star)^n.$$

Démonstration. Soit $H_1 = \{\theta_\sigma \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \mid \theta_\sigma(\check{K}_i) = \check{K}_{\sigma(i)} \text{ et } \theta_\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}\,;\ \sigma \in \Gamma\}$.

Soit $H_2 = \left\{ \begin{array}{l} \theta_\delta \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \mid \theta_\delta(\check{K}_i) = \check{K}_i \text{ et } \theta_\delta(x_i) = \delta_i x_i\,; \\ \delta = (\delta_1, ..., \delta_n) \in (\mathbb{C}^\star)^n \end{array} \right\}$.

Evidemment, on a $H_1 \simeq \Gamma$ et $H_2 \simeq (\mathbb{C}^\star)^n$. Considérons $\psi : H_1 \longrightarrow Aut(H_2)$ défini par $\psi(\theta_\sigma)(\theta_\delta) = \theta_{\delta_\sigma}$, où $\delta_\sigma := (\delta_{\sigma(i)})_i$. On vérifie aisément que ψ est un morphisme de groupes.□

Additif aux épreuves:

1. P. Polo nous a communiqué une alternative concernant la mise en évidence du groupe des automorphismes Γ. Il s'agit de remarquer que l'action de $Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ sur $\check{U}_o$ induit un morphisme $\pi : Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \longrightarrow Aut(P)$. On montre alors que $Im\pi = \Gamma$, en considérant les dimensions des sous- espaces propres de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ (qui doivent être conservées par l'action de $Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)))$ vu comme $\check{U}_o$-module libre.
Cette méthode qui s'appuie essentiellement sur l'action du groupe $Aut(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$ sur $\check{U}_o$, explique la possibilité de le déterminer explicitement, en contraste avec le calcul probablement plus difficile du groupe des automorphismes de $\check{U}_q(\mathfrak{n}^+)$, partie positive de $\check{U}_q(\mathfrak{g})$.

2. En réponse à une question de P. Caldero, on indique ci-dessous des bases explicites de $\mathcal{S}$ pour chaque type d'algèbre de Lie simple ($\mathcal{S}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\frac{n(n+1)}{2}$).

Type	Base de $\mathcal{S}$
A_n	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le n),\ E_{ii}\ (1 \le i \le n)$
B_n	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j < n),\ E_{ii}\ (1 \le i \le n),\ E_{ni} + 2E_{in}\ (1 \le i < n)$
C_n	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j < n),\ E_{ii}\ (1 \le i \le n),\ 2E_{ni} + E_{in}\ (1 \le i < n)$
D_n	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le n),\ E_{ii}\ (1 \le i \le n)$
E_6	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le 6),\ E_{ii}\ (1 \le i \le 6)$
E_7	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le 7),\ E_{ii}\ (1 \le i \le 7)$
E_8	$E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le 8),\ E_{ii}\ (1 \le i \le 8)$
F_4	$E_{12} + E_{21},\ E_{34} + E_{43},\ E_{ii}\ (1 \le i \le 4),\ E_{ij} + 2E_{ji}\ (j = 1, 2 \text{ et } i = 3, 4)$
G_2	$E_{12} + 3E_{21},\ E_{11},\ E_{22}$

E_{ij} désigne la matrice élémentaire $(\delta_{ik}\delta_{jl})_{k,l}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Références

[1] Alev, J.; Chamarie, M.: *Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques.* Comm. Algebra **20** (1992), 1787–1802.

[2] Alev, J.; Dumas, F.: *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi.* Prépublication de l'Université de Reims, Département de Mathématiques, 94.7.

[3] Caldero, P.: *Algèbres enveloppantes quantifiées: Action adjointe et représentations.* Université de Paris VI, Thèse de Doctorat, 1993.

[4] De Concini, C.; Procesi, C.: *Quantum Groups.* Preprints di matematica–n.6 , Scuola Normale Superiore Pisa, **2** (1993).

[5] Jacobson, N.: *Lie algebras.* Tracts in Math. 10, Wiley Interscience Publishers, New York 1966.

[6] Joseph, A.: *A wild automorphism of* $U(sl(2))$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), 61–65.

[7] Lusztig, G.: *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized enveloping algebras.* J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257–296.

[8] Lusztig, G.: *Introduction to Quantum Groups.* Progr. Math. 110, Birkhäuser, Boston 1993.

[9] Nagata, M.: *On the automorphism group of* $k[X,Y]$. Kyoto Univ. Lectures in Math. 5, Kyoto University, Kinokuniya–Tokyo, 1972.

[10] Polo, P.: *Dynkin diagrams and enveloping algebras of semisimple Lie algebras.* Prépublication.

[11] Smith, M. K.: *Automorphisms of Enveloping algebras.* Comm. Algebra **11** (1983), No. 16.

[12] van der Kulk, W.: *On polynomial rings in two variables.* Nieuw Arch. Wisk. **3** (1953), No. 1, 33–41.

Received November 5, 1996