Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 38 (1997), No. 2, 385-398.

Teilverhältnisse in affinen Räumen über Moduln[1]

Andrea K. Bach

Fachbereich Mathematik, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
Staudingerweg 9, D-55128 Mainz
e-mail: BACH@MAT.Mathematik.Uni-Mainz.DE

Abstract. A generalization of the ratio of points in an affine space over a module and a general fundamental theorem for ratio-preserving mappings between affine spaces over modules is obtained. Also we give a new proof of the general fundamental theorem for affine mappings.

Keywords: ratio, affine space, module, affine mapping, ratio-preserving mapping, fundamental theorem

Einleitung

Im Klassischen lautet der Fundamentalsatz für affine Abbildungen (siehe [3]): Eine affine Abbildung, deren Bild eine Ebene enthält, wird von einer semilinearen Abbildung induziert und ist genau dann teilverhältnistreu, falls die induzierende Abbildung linear ist. Dabei ist eine semilineare Abbildung φ eine Funktion zwischen Vektorräumen, welche additiv ist und für die ein Automorphismus $\dot{\varphi}$ zwischen den zugrundeliegenden Schiefkörpern existiert, so daß $\varphi(\lambda w) = \dot{\varphi}(\lambda)\varphi(w)$ für alle λ aus dem entsprechenden Schiefkörper und w aus dem entsprechenden Vektorraum.

Simone Weller und Stefan E. Schmidt verallgemeinerten in [2] die erste Aussage des Fundamentalsatzes für den Fall eines affinen Raumes eines Moduls über einem allgemeinen unitären, assoziativen Ring. (W. Leißner bewies in [4] ein analoges Resultat für Barbilianebenen. Das Konzept der Barbilianebenen ist jedoch ein anderes als das der affinen Räume.)

[1]Diese Arbeit ist Teil einer zukünftigen Dissertation.

Die Bedingung, daß das Bild der affinen Abbildung eine Ebene enthält, mußte durch eine andere ersetzt werden, welche aber im Schiefkörperfalle genau der ursprünglichen entspricht.

In [3] wird der klassische Fundamentalsatz mit Hilfe der Teilverhältnisse von Punkten des affinen Raumes bewiesen. Dadurch ist eine Charakterisierung von teilverhältnistreuen Abbildungen möglich gewesen.

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff des Teilverhältnisses für Elemente eines Moduls definiert und eine Verallgemeinerung des Strahlensatzes und des Satzes von Pappos gegeben (für ein analoges Ergebnis im Falle einer Barbilianebene siehe [4]). Des weiteren wird der Fundamentalsatz von [2] mit Hilfe von Teilverhältnissen bewiesen. Anschließend werden teilverhältnistreue Abbildungen definiert und ein Fundamentalsatz für diese gezeigt. Er lautet: Enthält das Bild einer affinen Abbildung α, welche von einer semilinearen Abbildung φ induziert wird, zwei distante Punkte, so ist α genau dann teilverhältnistreu, falls der zu φ gehörige Ringhomomorphismus $\dot{\varphi}$ idempotent ist und der Kern von $\dot{\varphi}$ günstig zu allen Annullatoren der Urbildvektoren liegt. Ein Korollar hiervon ist die Aussage, daß α teilverhältnistreu ist, falls $\dot{\varphi}$ idempotent ist und für alle $\mu \in \mathrm{Kern}(\dot{\varphi})$ gilt, daß $(\mu + Ann({}_RM)) \cap Ann({}_R\mathrm{Bild}(\varphi)) \neq \emptyset$. Dabei bezeichnen $Ann({}_RM)$ und $Ann({}_R\mathrm{Bild}(\varphi))$ die Annullatoren der Moduln ${}_RM$ beziehungsweise ${}_R\mathrm{Bild}(\varphi)$ über dem Ring R.

Zunächst einige grundlegende Begriffe (vergleiche [1]) :

Einleitende Definitionen

Es bezeichne ${}_RM$ stets einen (unitären) Linksmodul über einem (unitären, assoziativen) Ring R. Für $v \in M$ sei $A(v)$ der Linksannullator von v. Dieser ist ein Linksideal von R, und es gilt immer $Rv_R \cong R/A(v)$. Ein $v \in M$ heißt *annullatorfrei*, falls $A(v) = 0$, also ist $Rv_R \cong R$. Es bezeichne $\mathrm{Ann}({}_RM)$ den Annullator von ${}_RM$.

Eine Familie $\{v_i \mid i \in I\} \subset M$ heiße *schwach linear unabhängig*, falls gilt: Ist $\lambda_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} v_{i_n} = 0$ für eine Wahl $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_{i_j} \in R$ für alle $j = 1, \ldots, n$, so gilt $\lambda_{i_j} \in A(v_{i_j})$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Eine Familie $\{v_i \mid i \in I\}$ von Elementen aus M ist genau dann schwach linear unabhängig, falls der von den v_i, $i \in I$, erzeugte Untermodul gleich $\bigoplus_{i \in I} Rv_i$ ist. Somit gilt für $w_i \in Rv_i$, $i \in I$, daß auch $\{w_i \mid i \in I\}$ schwach linear unabhängig ist.

Sind $v, w \in M$ schwach linear unabhängig, so gilt $A(v + w) = A(v) \cap A(w)$. In dem Fall ist also $v + w$ genau dann annullatorfrei, falls $A(v) \cap A(w) = 0$.

Eine Familie $\{v_i \mid i \in I\} \subset M$ ist genau dann *linear unabhängig*, falls $\{v_i \mid i \in I\}$ schwach linear unabhängig ist und alle v_i, $i \in I$, annullatorfrei sind.

Ein *affiner Raum* über ${}_RM$ ist eine Menge $\mathcal{A}$, auf der die additive Gruppe von ${}_RM$ scharf transitiv operiert, das heißt, für alle $p, q \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in M$, so daß q aus der Operation durch v auf p hervorgeht. Schreibe dafür $p + v = q$ und $q - p = v$. Die Elemente von $\mathcal{A}$ nennen wir *(affine) Punkte*.

Eine Punktmenge der Form $p + U := \{p + u \mid u \in U\}$, wobei ${}_RU$ ein Untermodul von ${}_RM$ ist, heißt *(affine) Linearmenge*. Zwei Linearmengen $p + U, q + V$ mit ${}_RU, {}_RV \leq {}_RM$ und $p, q \in \mathcal{A}$ heißen *teilparallel* — in Zeichen: $p + U \subseteq\parallel q + V$, falls $U \subseteq V$. Ist auch $q + V \subseteq\parallel p + U$, so heißen die beiden Linearmengen *parallel* — in Zeichen: $p + U \parallel q + V$. Gilt für zwei affine Linearmengen L_1 und L_2, daß $L_1 \subseteq \parallel L_2$ und $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, so ist $L_1 \subseteq L_2$.

Der Schnitt beliebiger affiner Linearmengen ist eine affine Linearmenge. Sind $p+U$ und $q+V$ zwei affine Linearmengen, so bezeichne $(p+U)\vee(q+V)$ die kleinste affine Linearmenge, welche $p+U$ und $q+V$ enthält. Es gilt dann $(p+U)\vee(q+V)=p+W=q+W$ mit $W=R(q-p)+U+V$. Statt $\{p_1\}\vee\ldots\vee\{p_n\}$ für $p_1,\ldots,p_n\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$, schreiben wir $p_1\vee\ldots\vee p_n$.

Die affine Linearmenge $p+Rv$ mit $p\in\mathcal{A}$ und $v\in M$ heißt *(affine) Gerade*. Durch zwei Punkte $p\neq q$ geht also eine kleinste Gerade $p\vee q$, nämlich die Gerade $p+R(q-p)$. Drei Punkte $p,q,r\in\mathcal{A}$ heißen *balanciert*, falls $p\vee r=r\vee q=q\vee p$.

Genau dann ist eine Gerade $p+Rv$ teilparallel zu einer Geraden $q+Rw$, falls ein $\lambda\in R$ mit $\lambda v=w$ existiert.

Zwei Punkte p und q heißen *distant* — in Zeichen: $p\ \%\ q$, falls $q-p$ annullatorfrei ist. Eine Gerade $p\vee q$ heißt *frei*, falls $p\ \%\ q$. Genau dann ist also eine Gerade $p+Rv$ frei, wenn v annullatorfrei ist.

Zwei affine Linearmengen $p+U$ und $q+V$ heißen *aparallel* — in Zeichen: $p+U\ \sharp\ q+V$, falls $z+U$ und $z+V$ mit beliebigem $z\in\mathcal{A}$ sich nur in dem Punkt z schneiden. Genau dann sind zwei Geraden $p+Rv$ und $q+Rw$ aparallel, wenn v und w schwach linear unabhängig sind.

Zwei affine Linearmengen L_1 und L_2 heißen *distant*, falls für alle $x\in L_1$ und $y\in L_2$ gilt, daß $x\ \%\ y$ und $L_1\ \sharp\ x\vee y\ \sharp\ L_2$. Genau dann sind zwei affine Linearmengen $p+U$ und $q+V$ distant, falls $q-p$ annullatorfrei sowie schwach linear unabhängig zu allen $u\in U$ und $v\in V$ ist. Zwei affine Linearmengen heißen *windschief*, falls sie distant und aparallel sind.

Ein Punktequadrupel (p,q,r,s) heißt *Parallelogramm*, falls $p\vee q\parallel r\vee s$ und $q\vee s\parallel p\vee r$. Sind vier Punkte $p,q,r,s\in\mathcal{A}$ mit $q-p=s-r$ gegeben, so ist (p,q,r,s) ein Parallelogramm. Ist (p,q,r,s) ein Parallelogramm, und ist $p\vee q\ \sharp\ p\vee r$, so ist $q-p=s-r$.

Teilverhältnisse

Sei ${}_RM$ Linksmodul über dem Ring R und $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über ${}_RM$.

Definition 1. *Für die Punkte $q,q',r,r'\in\mathcal{A}$ sei das Teilverhältnis*

$$\frac{q'-q}{r'-r}:=\{\lambda\in R\mid\lambda(r'-r)=q'-q\}.$$

Es gilt also $\frac{q'-q}{r'-r}\neq\emptyset\Leftrightarrow q\vee q'\subseteq\parallel r\vee r'$. Ist $\frac{q'-q}{r'-r}\neq\emptyset$, so ist $\frac{q'-q}{r'-r}\in R/A(r'-r)\cong R(r'-r)$.

Lemma 1.1. *Seien Punkte $p,r,s\in\mathcal{A}$ mit $p\vee r\subseteq p\vee s$ gegeben. Für die Komposition $\varphi_{\frac{r-p}{s-p}}$ der linearen Abbildungen*

$$R/A(r-p)\cong R(r-p)\hookrightarrow R(s-p)\cong R/A(s-p):\frac{q-p}{r-p}\longmapsto\frac{q-p}{s-p}$$

gilt dann

$$\varphi_{\frac{r-p}{s-p}}\left(\frac{q-p}{r-p}\right)=x\cdot\frac{r-p}{s-p}$$

für alle $x \in \frac{q-p}{r-p}$*, wobei* $q \in p \vee r$*. Schreibe deshalb*

$$\frac{q-p}{r-p} \odot \frac{r-p}{s-p} \quad \textit{für} \quad \varphi_{\frac{r-p}{s-p}}\left(\frac{q-p}{r-p}\right).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\cdot\lambda} & R \\ \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{r-p}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{s-p}} \\ R(r-p) & \xrightarrow{\iota} & R(s-p), \end{array}$$

wobei $\lambda \in \frac{r-p}{s-p}$, ε_{r-p} und ε_{s-p} die natürlichen Epimorphismen und ι die Einbettung sind. □

Bemerkung.

a) Seien $p, q, r \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq p \vee r$. Dann gilt $r \vee q \subseteq r \vee p$, und für alle $\mu \in \frac{q-p}{r-p}$ ist $1-\mu \in \frac{q-r}{p-r}$. Ebenso ist für $\lambda \in \frac{q-r}{p-r}$ auch $1-\lambda \in \frac{q-p}{r-p}$. Schreibe deshalb $\frac{q-r}{p-r} = 1 - \frac{q-p}{r-p}$.

b) Seien $p, q, r \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q = p \vee r$. Dann gilt für alle $\mu \in \frac{q-p}{r-p}$ und alle $\lambda \in \frac{r-p}{q-p}$, daß $\mu\lambda \in \frac{q-p}{q-p} = 1 + A(q-p)$ und $\lambda\mu \in \frac{r-p}{r-p} = 1 + A(r-p)$.

c) Seien $p, q, r \in \mathcal{A}$ balanciert. Dann gilt für alle $\mu \in \frac{q-p}{r-p}$ und alle $\varepsilon \in \frac{p-r}{q-r}$, daß $\varepsilon(1-\mu) \in \frac{r-p}{r-p} = 1 + A(r-p)$.

Satz 1.1 (Strahlensatz). *Seien* $p, q, r, q', r' \in \mathcal{A}$ *mit* $p \vee q \subseteq p \vee r$ *sowie* $p \vee q' \subseteq p \vee r'$ *gegeben, und es gelte* $p \vee r \sharp p \vee r'$*. Dann ist*

$$\frac{q'-p}{r'-p} \cap \frac{q-p}{r-p} = \frac{q'-q}{r'-r}\ .$$

Insbesondere gilt

$$q' \vee q \subseteq\parallel r' \vee r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{q'-p}{r'-p} \cap \frac{q-p}{r-p} \neq \emptyset.$$

Beweis. Sei zunächst $\lambda \in \frac{q'-p}{r'-p} \cap \frac{q-p}{r-p}$, also $\lambda(r'-p) = q'-p$ und $\lambda(r-p) = q-p$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(r'-r) &= \lambda(r'-p+p-r) = \lambda(r'-p) + \lambda(p-r) = (q'-p) + (p-q) \\ &= q'-q \end{aligned}$$

also $q' \vee q \subseteq\parallel r' \vee r$ und $\lambda \in \frac{q'-q}{r'-r}$.

Umgekehrt sei nun $q' \vee q \subseteq\parallel r' \vee r$, das heißt, es existiert ein $\lambda \in \frac{q'-q}{r'-r}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda(r'-p) &= \lambda(r'-r+r-p) = \lambda(r'-r) + \lambda(r-p) \\ &= (q'-q) + \lambda(r-p) = (q'-p) + (p-q) + \lambda(r-p), \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda(r'-p)-(q'-p)=\lambda(r-p)-(q-p).$$

Da $p\vee q\subseteq p\vee r$ und $p\vee q'\subseteq p\vee r'$ ist, existiert ein $x\in\frac{q'-p}{r'-p}$ und ein $y\in\frac{q-p}{r-p}$. So folgt

$$(\lambda-x)(r'-p)=(\lambda-y)(r-p).$$

Nach Voraussetzung sind aber $r-p$ und $r'-p$ schwach linear unabhängig, somit gilt $\lambda-x\in A(r'-p)$ und $\lambda-y\in A(r-p)$, also $\lambda\in\frac{q'-p}{r'-p}\cap\frac{q-p}{r-p}$. □

Axiom. Unter dem *Satz von Pappos* verstehen wir folgende Aussage für einen affinen Raum $\mathcal{A}$ über einem Linksmodul ${}_RM$:
Für alle Punkte $p,q,r,s,q',r',s'\in\mathcal{A}$ mit $p\vee s\,\sharp\,p\vee s'$ folgt aus $q\vee r'\subseteq\parallel r\vee s'$ und $q'\vee r\subseteq\parallel r'\vee s$, daß $q\vee q'\subseteq\parallel s\vee s'$.

Satz 1.2. *In $\mathcal{A}$ gilt der Satz von Pappos genau dann, wenn für alle schwach linear unabhängigen $v,w\in M$ und alle $\lambda,\mu\in R$ ein $\sigma\in R$ existiert, so daß*

$$\begin{aligned}\sigma &= \lambda\mu \ mod\ A(v)\\ \sigma &= \mu\lambda \ mod\ A(w).\end{aligned}$$

Beweis. Seien p,q,r,s,q',r',s' Punkte, welche die Voraussetzungen des Satzes von Pappos erfüllen. Nach dem Strahlensatz existieren dann

$$\begin{aligned}\lambda &\in \frac{q-r'}{r-s'}=\frac{q-p}{r-p}\cap\frac{r'-p}{s'-p} \quad\text{und}\\ \mu &\in \frac{r-q'}{s-r'}=\frac{r-p}{s-p}\cap\frac{q'-p}{r'-p}\ .\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\lambda\mu &\in \frac{q-p}{r-p}\odot\frac{r-p}{s-p}=\frac{q-p}{s-p} \quad\text{und}\\ \mu\lambda &\in \frac{q'-p}{r'-p}\odot\frac{r'-p}{s'-p}=\frac{q'-p}{s'-p}\ .\end{aligned}$$

Der Satz von Pappos gilt genau dann, falls

$$\sigma\in\frac{q-q'}{s-s'}=\frac{q-p}{s-p}\cap\frac{q'-p}{s'-p}\ ,$$

existiert. Aber genau dann ist $\sigma\in\frac{q-q'}{s-s'}=\frac{q-p}{s-p}\cap\frac{q'-p}{s'-p}$, falls $\lambda\mu-\sigma\in A(s-p)$ und $\mu\lambda-\sigma\in A(s'-p)$. □

Bemerkung. Ist R kommutativ, so gilt der Satz von Pappos in jedem affinen Raum über einem Modul ${}_RM$. (Wähle für σ immer $\lambda\mu=\mu\lambda$.) Enthält ${}_RM$ einen freien Modul vom Rang 2, so gilt der Satz von Pappos in $\mathcal{A}$ genau dann, wenn R kommutativ ist (vergleiche [4], Satz 12).

Affine Abbildungen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ affine Räume über den Linksmoduln ${}_RM$ beziehungsweise ${}_{R'}M'$.

Definition 2. *Eine Abbildung $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}', p \longmapsto p^\alpha$ heißt affin, falls für alle $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ aus $r \vee s \subseteq\parallel p \vee q$ folgt, daß $r^\alpha \vee s^\alpha \subseteq\parallel p^\alpha \vee q^\alpha$.*

Eine Abbildung $\varphi : M \longrightarrow M', v \longmapsto \varphi(v)$ heißt semilinear, falls sie additiv ist und ein (unitärer) Ringhomomorphismus $\dot\varphi : R \longrightarrow R', \lambda \longmapsto \dot\varphi(\lambda)$ existiert, so daß

$$\varphi(\lambda v) = \dot\varphi(\lambda)\varphi(v)$$

für alle $\lambda \in R$ und $v \in M$.

Jede semilineare Abbildung $\varphi : {}_RM \longrightarrow {}_{R'}M'$ induziert affine Abbildungen $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ durch $q \longmapsto o' + \varphi(q - o)$, wobei $o \in \mathcal{A}$, $o' \in \mathcal{A}'$.

Eine affine Abbildung, welche von einer semilinearen Abbildung induziert wird, heiße affin-semilinear.

Bemerkung. Sei $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ von der semilinearen Abbildung φ induziert.

a) Für alle $p \in \mathcal{A}$ gilt $q^\alpha = p^\alpha + \varphi(q - p)$ für alle $q \in \mathcal{A}$, also ist $q^\alpha - p^\alpha = \varphi(q - p)$ für alle $p, q \in \mathcal{A}$.

b) Aus $q - p = s - r$ folgt $q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$ für alle $p, q, r, s \in \mathcal{A}$.

c) Aus $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p'}{r'-p'} \neq \emptyset$ folgt $\frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - p'^\alpha}{r'^\alpha - p'^\alpha} \neq \emptyset$ für alle $p, q, r, p', q', r' \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq p \vee r$ und $p' \vee q' \subseteq p' \vee r'$.

Lemma 2.1. *Sei α eine affine Abbildung zwischen den affinen Räumen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$.*

a) Sind $p, q, r, s \in \mathcal{A}$, so daß $p^\alpha \vee q^\alpha \sharp p^\alpha \vee r^\alpha$, so folgt aus $q - p = s - r$, daß $q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$.

b) Sind $p, q, r, q', r' \in \mathcal{A}$, so daß $p^\alpha \vee r^\alpha \sharp p^\alpha \vee r'^\alpha$, so folgt aus $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p}{r'-p} \neq \emptyset$, daß $\frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - p^\alpha}{r'^\alpha - p^\alpha} \neq \emptyset$.

Beweis.

a) Ist $q - p = s - r$, so ist (p, q, r, s) ein Parallelogramm. Da α affin ist, ist auch $(p^\alpha, q^\alpha, r^\alpha, s^\alpha)$ ein Parallelogramm. Aus der Aparallelität von $p^\alpha \vee q^\alpha$ mit $p^\alpha \vee r^\alpha$ folgt dann $q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$.

b) Ist $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p}{r'-p} \neq \emptyset$, so ist $q \vee q' \subseteq\parallel r \vee r'$. Da α affin ist, folgt sofort $q^\alpha \vee q'^\alpha \subseteq\parallel r^\alpha \vee r'^\alpha$. Aus der Aparallelität von $p^\alpha \vee r^\alpha$ und $p^\alpha \vee r'^\alpha$ folgt mit dem Strahlensatz, daß $\frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - p^\alpha}{r'^\alpha - p^\alpha} \neq \emptyset$. □

Lemma 2.2. *Sei $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ affin, Bild(α) enthalte zwei distante Punkte o^α sowie t^α, und es gelte*

(1) *$q - p = s - r \Longrightarrow q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$ für alle $p, q, r, s \in \mathcal{A}$, sowie*

(2) *$\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p'}{r'-p'} \neq \emptyset \Longrightarrow \frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - p'^\alpha}{r'^\alpha - p'^\alpha} \neq \emptyset$ für alle $p, q, r, p', q', r' \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq\parallel p \vee r$ und $p' \vee q' \subseteq\parallel p' \vee r'$.*

Dann ist α affin-semilinear.

Beweis. Definiere

$$\dot{\varphi} : R \longrightarrow R' : \lambda \longmapsto \dot{\varphi}(\lambda) \in \frac{(o + \lambda(t-o))^\alpha - o^\alpha}{t^\alpha - o^\alpha} \ .$$

$\dot{\varphi}$ ist wohldefiniert, da $t^\alpha - o^\alpha$ annullatorfrei ist. Nach (2) ist

$$\dot{\varphi}(\lambda) \in \frac{(p + \lambda(q-p))^\alpha - p^\alpha}{q^\alpha - p^\alpha}$$

für alle $p, q \in \mathcal{A}$. Definiere

$$\varphi : M \longrightarrow M' : v \longmapsto (o+v)^\alpha - o^\alpha.$$

Nach (1) gilt

$$\varphi(v) = q^\alpha - p^\alpha$$

für alle $p, q \in \mathcal{A}$ mit $v = q - p$.

(i) Es gilt $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ für alle $v, w \in M$:
Sei $r := o + v$ und $s := r + w$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(v+w) &= \varphi(s-o) = s^\alpha - o^\alpha = (r^\alpha - o^\alpha) + (s^\alpha - r^\alpha) \\ &= \varphi(r-o) + \varphi(s-r) = \varphi(v) + \varphi(w). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\varphi(\lambda v) = \dot{\varphi}(\lambda)\varphi(v)$ für alle $v \in M$ und $\lambda \in R$:
Sei $r := o + v$, $q := o + \lambda(r - o) = o + \lambda v$. Dann ist

$$\varphi(\lambda v) = \varphi(q - o) = q^\alpha - o^\alpha = \dot{\varphi}(\lambda)\varphi(v),$$

da $\dot{\varphi}(\lambda) \in \frac{q^\alpha - o^\alpha}{r^\alpha - o^\alpha}$ und $\varphi(v) = r^\alpha - o^\alpha$.

(iii) Es gilt $\dot{\varphi}(\lambda + \mu) = \dot{\varphi}(\lambda) + \dot{\varphi}(\mu)$ für alle $\lambda, \mu \in R$:
Nach (i) und (ii) ist mit $v := t - o$

$$\dot{\varphi}(\lambda + \mu)\varphi(v) = \varphi((\lambda+\mu)v) = \varphi(\lambda v) + \varphi(\mu v) = (\dot{\varphi}(\lambda) + \dot{\varphi}(\mu))\varphi(v).$$

Da $\varphi(v)$ annullatorfrei ist, folgt die Behauptung.

(iv) Es gilt $\dot{\varphi}(\lambda_1\lambda_2) = \dot{\varphi}(\lambda_1)\dot{\varphi}(\lambda_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in R$:
Seien

$$\begin{aligned} t' &:= o + \lambda_2(t - o) \quad \text{und} \\ t'' &:= o + \lambda_1(t' - o). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\dot{\varphi}(\lambda_1) \in \frac{t''^\alpha - o^\alpha}{t'^\alpha - o^\alpha} \ ,$$

und damit

$$\dot{\varphi}(\lambda_1)\dot{\varphi}(\lambda_2) \in \frac{t''^\alpha - o^\alpha}{t'^\alpha - o^\alpha} \odot \frac{t'^\alpha - o^\alpha}{t^\alpha - o^\alpha} = \frac{t''^\alpha - o^\alpha}{t^\alpha - o^\alpha} = \{\dot{\varphi}(\lambda_1\lambda_2)\}.$$

Zudem ist

$$p^\alpha = o^\alpha + (p^\alpha - o^\alpha) = o^\alpha + \varphi(p - o)$$

für alle $p \in \mathcal{A}$. Insgesamt ist α eine von der semilinearen Abbildung φ induzierte affine Abbildung. □

Theorem 2.1 (Fundamentalsatz für affine Abbildungen).
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ affine Räume über den Linksmoduln ${}_RM$ beziehungsweise ${}_{R'}M'$, $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ eine Abbildung. Es mögen affine Linearmengen L_1 und L_2 von $\mathcal{A}$ durch einen Punkt o mit $L_1 \vee L_2 = \mathcal{A}$ derart existieren, daß gilt:

(1) *Für alle $x_i \in L_i$, $i = 1, 2$, ist $o^\alpha \vee x_1^\alpha \sharp o^\alpha \vee x_2^\alpha$.*

(2) *In L_j^α existiert ein Punkt t_j^α, der distant zu allen $o^\alpha \vee x_i^\alpha \vee y_i^\alpha$ $(x_i, y_i \in L_i,\ i \neq j)$ ist.*

Dann ist α genau dann affin, wenn α affin-semilinear ist.

Bemerkung. Im Falle, daß α von einer semilinearen Abbildung φ induziert wird, läßt sich die im Fundamentalsatz geforderte Reichhaltigkeitsbedingung in eine äquivalente algebraische Voraussetzung umformulieren:
Es mögen Untermoduln M_1 und M_2 von ${}_RM$ mit $M_1 + M_2 = M$ derart existieren, daß gilt:

(1) Für alle $v_i \in M_i$, $i = 1, 2$, ist $\varphi(v_1)$ schwach linear unabhängig zu $\varphi(v_2)$.

(2) In $\varphi(M_j)$ existiert ein Vektor $\varphi(t_j)$, der annullatorfrei und schwach linear unabhängig zu jedem $v \in R'\varphi(v_i) + R'\varphi(w_i)$ ist, wobei $v_i, w_i \in M_i$ $(i \neq j)$.

Beweis.

A) Für alle Punkte p, q, r, s mit $q - p = s - r$ gilt $q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$:

(i) Seien Punkte q_1, r_1, s_1 aus L_1 gegeben, so daß $q_1 - o = s_1 - r_1$. Nach Voraussetzung existiert ein $t_2 \in L_2$, so daß t_2^α distant zu $o^\alpha \vee q_1^\alpha \vee r_1^\alpha$ ist. Also ist $o^\alpha \vee t_2^\alpha \sharp o^\alpha \vee q_1^\alpha$ und $r_1^\alpha \vee t_2^\alpha \sharp r_1^\alpha \vee s_1^\alpha$. (Beachte dabei, daß $s_1^\alpha \in o^\alpha \vee q_1^\alpha \vee r_1^\alpha$, da α affin ist.) Sei nun $t_2' := t_2 + (q_1 - o)$, womit $t_2' - t_2 = q_1 - o = s_1 - r_1$. Dann folgt nach dem Lemma 2.1, daß $q_1^\alpha - o^\alpha = {t_2'}^\alpha - t_2^\alpha = s_1^\alpha - r_1^\alpha$ gilt.
Analoges gilt für Punkte q_2, r_2, s_2 aus L_2.

(ii) Seien nun Punkte q, r, s aus $\mathcal{A}$ mit $q - o = s - r$ gegeben. Nach Voraussetzung existieren nun $q_i, r_i \in L_i$ für $i = 1, 2$ mit

$$\begin{aligned} q - o &= (q_1 - o) + (q_2 - o) \quad \text{und} \\ r - o &= (r_1 - o) + (r_2 - o). \end{aligned}$$

Damit bilden die Punkte o, q_1, q_2, q ein Parallelogramm, und es folgt, da α affin ist, daß die Bildpunkte $o^\alpha, q_1^\alpha, q_2^\alpha, q^\alpha$ ein Parallelogramm bilden.
Da nach Voraussetzung $o^\alpha \vee q_1^\alpha \sharp o^\alpha \vee q_2^\alpha$ ist, folgt nach dem Lemma 2.1, daß $q_1^\alpha - o^\alpha = q^\alpha - q_2^\alpha$ und somit ist

$$q^\alpha - o^\alpha = (q_1^\alpha - o^\alpha) + (q_2^\alpha - o^\alpha).$$

Analog kann

$$\begin{aligned} r^\alpha - o^\alpha &= (r_1^\alpha - o^\alpha) + (r_2^\alpha - o^\alpha), \quad \text{und} \\ s^\alpha - o^\alpha &= (s_1^\alpha - o^\alpha) + (s_2^\alpha - o^\alpha) \end{aligned}$$

gefolgert werden, wobei $s_i := r_i + (q_i - o)$.
Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$q_1^\alpha - o^\alpha = s_1^\alpha - r_1^\alpha \quad \text{und} \quad q_2^\alpha - o^\alpha = s_2^\alpha - r_2^\alpha,$$

insgesamt also $q^\alpha - o^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$.

(iii) Seien nun beliebige Punkte $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ mit $q - p = s - r$ gegeben. Dann gilt

$$q^\alpha - p^\alpha = (o + (q - p))^\alpha - o^\alpha = (o + (s - r))^\alpha - o^\alpha = s^\alpha - r^\alpha.$$

Bemerkung. Aus A) folgt, daß die im Fundamentalsatz geforderten Reichhaltigkeitsbedingungen nicht nur für o, sondern für alle $p \in \mathcal{A}$ gelten, genauer:
Für $p \in \mathcal{A}$ und $i = 1, 2$ sei L_i^p die parallele Linearmenge zu L_i durch p. Dann folgt für $t_i^p := p + (t_i - o)$, daß:

a)) Für alle $x_i \in L_i^p$, $i = 1, 2$, ist $p^\alpha \vee x_1^\alpha \sharp\, p^\alpha \vee x_2^\alpha$.

b)) In $(L_j^p)^\alpha$ existiert der Punkt $(t_j^p)^\alpha$, der distant zu allen $p^\alpha \vee x_i^\alpha \vee y_i^\alpha$ $(x_i, y_i \in L_i^p,\ i \neq j)$ ist.

Ebenfalls aus A) folgt, daß $\frac{q^\alpha - p^\alpha}{s^\alpha - r^\alpha} = \frac{q'^\alpha - p'^\alpha}{s'^\alpha - r'^\alpha}$, falls $q - p = q' - p'$ und $s - r = s' - r'$, für alle $p, q, r, s, p', q', r', s' \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq\!\parallel r \vee s$ und $p' \vee q' \subseteq\!\parallel r' \vee s'$.

B) Für Punkte p, q, r, p', q', r' aus $\mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq\!\parallel p \vee r$ und $p' \vee q' \subseteq\!\parallel p' \vee r'$ folgt aus $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p'}{r'-p'} \neq \emptyset$, daß auch $\frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - p'^\alpha}{r'^\alpha - p'^\alpha} \neq \emptyset$:

(i) Seien $r, r' \in L_1$, $q, q' \in \mathcal{A}$ mit $o \vee q \subseteq o \vee r$ und $o \vee q' \subseteq o \vee r'$. Dann sind auch $q, q' \in L_1$. Nach den Voraussetzungen existiert ein $t_2 \in L_2$, so daß $t_2^\alpha \% o^\alpha$ und $t_2^\alpha \vee o^\alpha$ zu $o^\alpha \vee x_1^\alpha \vee y_1^\alpha$ für alle $x_1, y_1 \in L_1$ aparallel ist. Ist nun $\frac{q-o}{r-o} \cap \frac{q'-o}{r'-o} \neq \emptyset$, so wähle ein $\lambda \in \frac{q-o}{r-o} \cap \frac{q'-o}{r'-o}$ und definiere $t_2' := o + \lambda(t_2 - o)$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{t_2' - o}{t_2 - o} \cap \frac{q - o}{r - o} &\neq \emptyset \quad \text{und} \\ \frac{t_2' - o}{t_2 - o} \cap \frac{q' - o}{r' - o} &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Da $o^\alpha \vee t_2^\alpha$ zu $o^\alpha \vee r^\alpha$ und $o^\alpha \vee r'^\alpha$ apparallel ist, gilt nach dem Lemma 2.1, daß

$$\begin{aligned} \frac{t_2'^\alpha - o^\alpha}{t_2^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{q^\alpha - o^\alpha}{r^\alpha - o^\alpha} &\neq \emptyset \quad \text{und} \\ \frac{t_2'^\alpha - o^\alpha}{t_2^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - o^\alpha}{r'^\alpha - o^\alpha} &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Weil $t_2^\alpha - o^\alpha$ annullatorfrei ist, existiert genau ein $\mu \in \frac{t_2'^\alpha - o^\alpha}{t_2^\alpha - o^\alpha}$. Damit gilt

$$\mu \in \frac{q^\alpha - o^\alpha}{r^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{q'^\alpha - o^\alpha}{r'^\alpha - o^\alpha} \neq \emptyset.$$

Analoges gilt für Punkte $q, r, q', r' \in L_2$.

(ii) Seien nun beliebige Punkte q, r, q', r' aus $\mathcal{A}$ mit $o \vee q \subseteq o \vee r$ und $o \vee q' \subseteq o \vee r'$ gegeben. Nach Voraussetzung existieren $r_i, r_i' \in L_i$, $i = 1, 2$, mit

$$\begin{aligned} r - o &= (r_1 - o) + (r_2 - o) \quad \text{und} \\ r' - o &= (r_1' - o) + (r_2' - o). \end{aligned}$$

Da $r_1^\alpha - o^\alpha$ und $r_2^\alpha - o^\alpha$ schwach linear unabhängig sind, gilt

$$r^\alpha - o^\alpha = (r_1^\alpha - o^\alpha) + (r_2^\alpha - o^\alpha),$$

ebenso

$$r'^\alpha - o^\alpha = (r_1'^\alpha - o^\alpha) + (r_2'^\alpha - o^\alpha),$$

und damit $A(r^\alpha - o^\alpha) = A(r_1^\alpha - o^\alpha) \cap A(r_2^\alpha - o^\alpha)$ und $A(r'^\alpha - o^\alpha) = A(r_1'^\alpha - o^\alpha) \cap A(r_2'^\alpha - o^\alpha)$. Sei nun $\frac{q-o}{r-o} \cap \frac{q'-o}{r'-o} \neq \emptyset$, $\lambda \in \frac{q-o}{r-o} \cap \frac{q'-o}{r'-o}$. Setze $q_1 := o + \lambda(r_1 - o)$ und $q_2 := o + \lambda(r_2 - o)$. Dann gilt $q_i \in L_i$, $i = 1, 2$. Analog seien $q_1' \in L_1$ und $q_2' \in L_2$ definiert. Es ist dann

$$\begin{aligned} \lambda &\in \frac{q_1 - o}{r_1 - o} \cap \frac{q_1' - o}{r_1' - o} \quad \text{und} \\ \lambda &\in \frac{q_2 - o}{r_2 - o} \cap \frac{q_2' - o}{r_2' - o}. \end{aligned}$$

Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$\begin{aligned} \frac{q_1^\alpha - o^\alpha}{r_1^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{q_1'^\alpha - o^\alpha}{r_1'^\alpha - o^\alpha} &\supseteq \frac{t_2'^\alpha - o^\alpha}{t_2^\alpha - o^\alpha} \quad \text{und} \\ \frac{q_2^\alpha - o^\alpha}{r_2^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{q_2'^\alpha - o^\alpha}{r_2'^\alpha - o^\alpha} &\supseteq \frac{t_1'^\alpha - o^\alpha}{t_1^\alpha - o^\alpha}, \end{aligned}$$

wobei $t_1' := o + \lambda(t_1 - o)$ und $t_2' := o + \lambda(t_2 - o)$. Es ist dann

$$\frac{t_1' - o}{t_1 - o} \cap \frac{t_2' - o}{t_2 - o} \neq \emptyset.$$

Da $o^\alpha \vee t_1^\alpha \sharp o^\alpha \vee t_2^\alpha$, folgt nach dem Lemma 2.1, daß

$$\frac{t_1'^\alpha - o^\alpha}{t_1^\alpha - o^\alpha} \cap \frac{t_2'^\alpha - o^\alpha}{t_2^\alpha - o^\alpha} \neq \emptyset,$$

also

$$\frac{t_1'^{\alpha} - o^{\alpha}}{t_1^{\alpha} - o^{\alpha}} = \frac{t_2'^{\alpha} - o^{\alpha}}{t_2^{\alpha} - o^{\alpha}} \ ,$$

und damit

$$\frac{q_1^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_1^{\alpha} - o^{\alpha}} \cap \frac{q_1'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_1'^{\alpha} - o^{\alpha}} \quad \cap \quad \frac{q_2^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_2^{\alpha} - o^{\alpha}} \cap \frac{q_2'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_2'^{\alpha} - o^{\alpha}} \neq \emptyset.$$

Weil nun $A(r^{\alpha} - o^{\alpha}) = A(r_1^{\alpha} - o^{\alpha}) \cap A(r_2^{\alpha} - o^{\alpha})$ und $A(r'^{\alpha} - o^{\alpha}) = A(r_1'^{\alpha} - o^{\alpha}) \cap A(r_2'^{\alpha} - o^{\alpha})$, ist

$$\begin{aligned} \frac{q^{\alpha} - o^{\alpha}}{r^{\alpha} - o^{\alpha}} &= \frac{q_1^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_1^{\alpha} - o^{\alpha}} \cap \frac{q_2^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_2^{\alpha} - o^{\alpha}} \quad \text{und} \\ \frac{q'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r'^{\alpha} - o^{\alpha}} &= \frac{q_1'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_1'^{\alpha} - o^{\alpha}} \cap \frac{q_2'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r_2'^{\alpha} - o^{\alpha}} \ , \end{aligned}$$

womit folgt, daß $\frac{q^{\alpha} - o^{\alpha}}{r^{\alpha} - o^{\alpha}} \cap \frac{q'^{\alpha} - o^{\alpha}}{r'^{\alpha} - o^{\alpha}} \neq \emptyset$.

(iii) Da die entsprechenden Reichhaltigkeitsbedingungen für alle $p \in \mathcal{A}$ gelten, gilt für alle $p \in \mathcal{A}$, daß

$$\frac{q^{\alpha} - p^{\alpha}}{r^{\alpha} - p^{\alpha}} \cap \frac{q'^{\alpha} - p^{\alpha}}{r'^{\alpha} - p^{\alpha}} \neq \emptyset$$

für alle $q, r, q', r' \in \mathcal{A}$ mit $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p}{r'-p} \neq \emptyset$.

Seien $p, q, r, p', q', r' \in \mathcal{A}$ mit $\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q'-p'}{r'-p'} \neq \emptyset$ gegeben. Für $q'' := p + (q' - p')$ und $r'' := p + (r' - p')$ gilt nach A)

$$\frac{q''^{\alpha} - p^{\alpha}}{r''^{\alpha} - p^{\alpha}} = \frac{q'^{\alpha} - p'^{\alpha}}{r'^{\alpha} - p'^{\alpha}} \ .$$

Damit ist

$$\frac{q^{\alpha} - p^{\alpha}}{r^{\alpha} - p^{\alpha}} \cap \frac{q'^{\alpha} - p'^{\alpha}}{r'^{\alpha} - p'^{\alpha}} = \frac{q^{\alpha} - p^{\alpha}}{r^{\alpha} - p^{\alpha}} \cap \frac{q''^{\alpha} - p^{\alpha}}{r''^{\alpha} - p^{\alpha}} \neq \emptyset.$$

Nach dem Lemma 2.2 folgt, daß α von einer semilinearen Abbildung induziert wird. □

Teilverhältnistreue affine Abbildungen

Seien ${}_RM$ und ${}_RM'$ Linksmoduln über einem Ring R, sowie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ affine Räume über ${}_RM$ beziehungsweise ${}_RM'$.

Definition 3. *Eine affine Abbildung $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ heiße teilverhältnistreu, falls für alle $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq\parallel r \vee s$ gilt, daß*

$$\frac{q - p}{s - r} \cap \frac{q^{\alpha} - p^{\alpha}}{s^{\alpha} - r^{\alpha}} \neq \emptyset.$$

Bemerkung. Sei $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ eine affine Abbildung, welche von der semilinearen Abbildung φ induziert wird. Der zugehörige Ringhomomorphismus sei $\dot{\varphi}$.

a) Da für Punkte p, q, r, s mit $p \vee q \subseteq\parallel r \vee s$ gilt, daß $p \vee q \subseteq p \vee (p + (s - r))$ und

$$\frac{q-p}{s-r} = \frac{q-p}{((p+(s-r))-p)} ,$$

und da für α gilt, daß $q^\alpha - p^\alpha = s^\alpha - r^\alpha$ für Punkte $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ mit $q - p = s - r$, ist α genau dann teilverhältnistreu, falls für alle $p, q, r \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq p \vee r$ folgt, daß

$$\frac{q-p}{r-p} \cap \frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha} \neq \emptyset.$$

b) Die Abbildung φ ist genau dann linear, falls

$$\{\lambda - \dot{\varphi}(\lambda) \mid \lambda \in R\} \subseteq Ann({}_R\mathrm{Bild}(\varphi)).$$

Ist $\dot{\varphi}$ idempotent, so ist demnach φ genau dann linear, falls $\mathrm{Kern}(\dot{\varphi}) \subseteq Ann({}_R\mathrm{Bild}(\varphi))$. Insbesondere ist φ linear, falls $\dot{\varphi}$ die Identität auf R ist. Da gilt

$$\lambda \in \frac{q-p}{r-p} \implies \dot{\varphi}(\lambda) \in \frac{q^\alpha - p^\alpha}{r^\alpha - p^\alpha}$$

für alle $p, q, r \in \mathcal{A}$ mit $p \vee q \subseteq p \vee r$, ist α teilverhältnistreu, falls φ linear ist.

c) Die Abbildung α ist nach Definition genau dann teilverhältnistreu, falls für alle $\lambda \in R$ gilt, daß $(\lambda + A(w)) \cap (\dot{\varphi}(\lambda) + A(\varphi(w))) \neq \emptyset$ für alle $w \in M$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $\lambda \in R$ gilt, daß $((\lambda - \dot{\varphi}(\lambda)) + A(w)) \cap A(\varphi(w)) \neq \emptyset$ für alle $w \in M$ ist, was äquivalent zu $A(w) \cap ((\dot{\varphi}(\lambda) - \lambda) + A(\varphi(w))) \neq \emptyset$ für alle $w \in M$ ist.

Lemma 3.1. *Sei $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ affin-semilinear, φ die induzierende semilineare Abbildung und $\dot{\varphi}$ der zugehörige Ringhomomorphismus.*

a) *Ist $\dot{\varphi}$ idempotent, so ist die Abbildung α genau dann teilverhältnistreu, falls für alle $\mu \in Kern(\dot{\varphi})$ gilt, daß $(\mu + A(w)) \cap A(\varphi(w)) \neq \emptyset$ für alle $w \in M$. Dies gilt dann und nur dann, wenn $A(w) \cap (\mu + A(\varphi(w))) \neq \emptyset$ für alle $\mu \in Kern(\dot{\varphi})$ und $w \in M$ ist.*

b) *Existieren in Bild(α) zwei distante Punkte t^α und o^α, $o, t \in \mathcal{A}$, und ist α teilverhältnistreu, so ist $\dot{\varphi}$ idempotent.*

c) *Für alle $p, q \in \mathcal{A}$ mit $p^\alpha \% q^\alpha$ ist $A(q-p) \subseteq Kern(\dot{\varphi})$. Insbesondere gilt: Enthält Bild(α) zwei distante Punkte, so ist $Ann({}_RM) \subseteq Kern(\dot{\varphi})$.*

Beweis.
a) folgt aus Teil c) der vorangegangenen Bemerkung.
b) Sei $v := t - o$, $\lambda \in R$. Ist α teilverhältnistreu, so gilt

$$\frac{\lambda v}{v} \cap \frac{\dot{\varphi}(\lambda)\varphi(v)}{\varphi(v)} \neq \emptyset,$$

also $\dot{\varphi}(\lambda) \in \frac{\lambda v}{v}$, da $A(\varphi(v)) = \{0\}$. Damit ist $\dot{\varphi}(\lambda)v = \lambda v$ und

$$\dot{\varphi}(\dot{\varphi}(\lambda)) \in \frac{\varphi(\dot{\varphi}(\lambda)v)}{\varphi(v)} = \frac{\varphi(\lambda v)}{\varphi(v)} = \frac{\dot{\varphi}(\lambda)\varphi(v)}{\varphi(v)} = \{\dot{\varphi}(\lambda)\},$$

also $\dot{\varphi}(\dot{\varphi}(\lambda)) = \dot{\varphi}(\lambda)$ für alle $\lambda \in R$.

c) Seien $p, q \in \mathcal{A}$ mit $p^\alpha \% q^\alpha$ gegeben, das heißt, für $v := q - p$ ist $\varphi(v)$ annullatorfrei. Für $\mu \in A(v)$ ist $0 = \varphi(\mu v) = \dot{\varphi}(\mu)\varphi(v)$, also $\dot{\varphi}(\mu) = 0$. $\square$

Aus diesem Lemma erhält man direkt das

Korollar. *Ist $\dot{\varphi}$ idempotent und gilt für alle $\mu \in Kern(\dot{\varphi})$, daß*

$$(\mu + Ann({}_R M)) \cap Ann({}_R Bild(\varphi)) \neq \emptyset,$$

so ist α teilverhältnistreu. Insbesondere ist α teilverhältnistreu, falls $\dot{\varphi}$ idempotent mit $Kern(\dot{\varphi}) \subseteq Ann({}_R M)$ ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} Ann({}_R M) &\subseteq A(w) \quad \text{und} \\ Ann({}_R \mathrm{Bild}(\varphi)) &\subseteq A(\varphi(w)) \end{aligned}$$

für alle $w \in M$. Daraus folgt die erste Behauptung.

Ist $\mathrm{Kern}(\dot{\varphi}) \subseteq Ann({}_R M)$, so gilt für alle $\mu \in \mathrm{Kern}(\dot{\varphi})$, daß $\mu + Ann({}_R M) = Ann({}_R M)$ und damit
$0 \in Ann({}_R M) \cap Ann({}_R \mathrm{Bild}(\varphi)) = \mu + Ann({}_R M) \cap Ann({}_R \mathrm{Bild}(\varphi)) \neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung. Ist ${}_R M$ ein Modul mit $Ann({}_R M) = 0$ und erfüllt $\dot{\varphi}$ die Bedingungen des Korollars, so gilt $\mathrm{Kern}(\dot{\varphi}) \subseteq Ann({}_R \mathrm{Bild}(\varphi))$, und φ ist linear, das heißt, φ ist semilinear mit der Identität als zugehörigem Ringhomomorphismus.

Satz 3.1. *Sei $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ eine affine Abbildung, welche von einer semilinearen Abbildung φ induziert wird, und in $\mathcal{A}$ existieren zwei distante Punkte t und o, welche von α auf zwei distante Punkte t^α und o^α abgebildet werden. Dann gilt, daß α genau dann teilverhältnistreu ist, wenn φ linear ist.*[1]

Beweis. Ist φ linear, so ist α teilverhältnistreu. Ist α teilverhältnistreu, so gilt für $v := t - o$ und $\lambda \in R$, daß

$$\emptyset \neq \frac{\lambda v}{v} \cap \frac{\dot{\varphi}(\lambda)\varphi(v)}{\varphi(v)} = \{\lambda\} \cap \{\dot{\varphi}(\lambda)\},$$

da sowohl v als auch $\varphi(v)$ annullatorfrei sind. Also ist $\dot{\varphi}(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in R$, und damit ist $\dot{\varphi}$ die Identität und φ linear. $\square$

Satz 3.1 folgt auch aus dem

[1] Im bekannten Falle, daß R ein Schiefkörper ist, ist jede nicht von der Nullabbildung induzierte affin-semilineare Abbildung genau dann teilverhältnistreu, falls die induzierende Abbildung linear ist.

Theorem 3.1 (Fundamentalsatz für teilverhältnistreue Abbildungen).
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ affine Räume über den Moduln ${}_RM$ beziehungsweise ${}_RM'$, $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ affin-semilinear mit zugehöriger semilinearer Abbildung φ und zugehörigem Ringhomomorphismus $\dot{\varphi}$. Ferner enthalte Bild(α) zwei distante Punkte. Dann ist α genau dann teilverhältnistreu, falls $\dot{\varphi}$ idempotent ist und für alle $\mu \in$ Kern($\dot{\varphi}$) gilt, daß

$$(\mu + A(w)) \cap A(\varphi(w)) \neq \emptyset$$

für alle $w \in M$ ist.

Bemerkung. Die Bedingung, daß $(\mu + A(w)) \cap A(\varphi(w)) \neq \emptyset$ für alle $\mu \in \text{Kern}(\dot{\varphi})$ und $w \in M$ gilt, ist zu der Aussage, daß $A(w) \cap (\mu + A(\varphi(w))) \neq \emptyset$ für alle $\mu \in \text{Kern}(\dot{\varphi})$ und $w \in M$ ist, äquivalent.

Beweis: folgt sofort aus Lemma 3.1. □

Bemerkung. Ist $\dot{\varphi}$ idempotent, so gilt $R = \text{Kern}(\dot{\varphi}) \oplus \text{Bild}(\dot{\varphi})$, wobei Kern($\dot{\varphi}$) ein zweiseitiges Ideal und Bild($\dot{\varphi}$) ein Unterring von R ist. Ist also $\dot{\varphi}$ idempotent, so induziert φ bezüglich des Ringes $S := \text{Bild}(\dot{\varphi})$ eine S-lineare Abbildung ${}_SM \longrightarrow_S M'$.

References

[1] Schmidt, S. E.: *Grundlegungen zu einer allgemeinen affinen Geometrie.* Birkhäuser Verlag, Basel 1995.

[2] Weller, S.; Schmidt, S. E.: *Fundamentalsatz für affine Räume über Moduln.* Results Math. **30** (1996), 151–159.

[3] Herzer, A.: *Geometrie I.* Vorlesungsskript, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, SS 1991.

[4] Leißner, W.: *Affine Barbilian-Ebenen I,II.* J. Geom. **6** (1975), 31–57, 105–129.

Received August 29, 1996; revised version January 22, 1997