An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 19(3), 2011, 27–50

Groupe de Galois de certains corps de classes

Abdelmalek Azizi, Mohammed Talbi

Abstract

Let $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$ where ε_0 is the fundamental unit of $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ with l a prime number congruent to 5 or 2 modulo 8, n is an integer prime to l, square free such that $C_{2,\mathbb{K}}$, the 2-class group of $\mathbb{K}$, is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the genus field $\mathbb{K}^{(*)}$ of $\mathbb{K}$ coincides with the first Hilbert 2-class field $\mathbb{K}_2^{(1)}$ of $\mathbb{K}$ and let $\mathbb{G}_2$ be the Galois group of $\mathbb{K}_2^{(2)}/\mathbb{K}$ where $\mathbb{K}_2^{(2)}$ is the second Hilbert 2-class field of $\mathbb{K}$.
In this paper, we are interested in the problem of capitulation of the classes of $C_{2,\mathbb{K}}$ in the quadratic sub-fields of $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{K}$ and to determine the structure of $\mathbb{G}_2$.

Soient $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$ o ε_0 est l'unit fondamentale de $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier congru 5 ou 2 modulo 8, n est un entier naturel premier l, sans facteur carr tels que $C_{2,\mathbb{K}}$, le 2-groupe de classes de $\mathbb{K}$, est isomorphe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le corps de genres $\mathbb{K}^{(*)}$ de $\mathbb{K}$ concide avec le premier 2-corps de classes de Hilbert $\mathbb{K}_2^{(1)}$ de $\mathbb{K}$ et soit $\mathbb{G}_2$ le groupe de Galois de $\mathbb{K}_2^{(2)}/\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}_2^{(2)}$ est le deuxime 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{K}$.
Dans ce papier, on s'intresse au problme de capitulation des classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ dans les sous-corps quadratiques de $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{K}$ et dterminer la structure de $\mathbb{G}_2$.

1 Notations

Dans tout ce travail on note par:

l : un nombre premier congru 5 ou 2 modulo 8;

Key Words: Corps quartique cyclique, groupe de classes, capitulation, corps de classes de Hilbert
Mathematics Subject Classification: Primary 11R27; Secondary 11R37

k	:	le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$;
ε_0	:	l'unité fondamentale de k;
$\mathbb{K}$	:	le corps quartique cyclique $\mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$;
n	:	un entier naturel premier à l, libre de carr et tel que $C_{2,\mathbb{K}}$ est de type $(2,2)$ et $\mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}_2^{(1)}$;
$\mathbb{G}_2$	:	le groupe de Galois de $\mathbb{K}_2^{(2)}/\mathbb{K}$;
$p,\ p'$	:	des nombres premiers congruent à 1 modulo 4;
$q,\ q'$	:	des nombres premiers congruent à -1 modulo 4;
$\left(\frac{\alpha,\beta}{P}\right)$	:	le symbole du reste normique;
$\left(\frac{a}{b}\right)$	:	le symbole de Legendre;
$\left(\frac{a}{b}\right)_4$	:	le symbole biquadratique rationnel, dfini si $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$.

Pour un corps de nombres $\mathbb{F}$, on note par:

$\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$	:	l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$;
$E_{\mathbb{F}}$	:	le groupe des units de $\mathbb{F}$;
$[\mathfrak{a}]$	:	la classe d'un idal $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{F}$;
$C_{\mathbb{F}}$	:	le groupe de classes de $\mathbb{F}$;
$C_{2,\mathbb{F}}$	:	le 2-groupe de classes de $\mathbb{F}$;
$h_2(\mathbb{F})$	:	le 2-nombre de classes de $\mathbb{F}$;
$\mathbb{F}^{(*)}$	:	le corps du genres de $\mathbb{F}$;
$\mathbb{F}_2^{(1)}$	:	le premier 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{F}$;
$\mathbb{F}_2^{(2)}$	:	le deuxième 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{F}$;
$h_2(m)$	:	le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$;
$q(\mathbb{F}/\mathbb{M})$	:	l'indice des unités d'une extension biquadratique normale $\mathbb{F}/\mathbb{M}$ de groupe de Galois de type $(2,2)$;
$Q_{\mathbb{F}}$	:	$= q(\mathbb{F}/\mathbb{M})$ avec $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$.

2 Introduction

Soit $\mathbb{F}/\mathbb{L}$ une extension finie de corps de nombres. On dit depuis Hilbert qu'un idal de l'anneau des entiers du corps $\mathbb{L}$ capitule dans $\mathbb{F}$, lorsqu'il devient principal par extension des scalaires l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$. Le problme de la capitulation consiste donc prcisment dcrire la partie du groupe de classes d'idaux de $\mathbb{L}$ forme de toutes les classes qui capitulent dans $\mathbb{F}$, lorsque $\mathbb{F}$ est une extension ablienne non ramifie de $\mathbb{L}$.
Dans le prsent papier, on va tendre les rsultats de [6] des nouvelles familles de corps. Ainsi, soit $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$, donc on va tudier la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{K}$ dans les sous-extensions quadratiques de $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{K}$ et

nous dterminons la structure du groupe $\mathbb{G}_2$.

Proposition 2.1 ([16]). *Soient $\mathbb{G}$ un 2-groupe fini d'ordre 2^m et $\mathbb{G}'$ son sous-groupe driv. Alors $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ est de type $(2,2)$ si et seulement si $\mathbb{G}$ est isomorphe l'un des 2-groupes suivants:*

$$\begin{array}{llllll}
Q_m & = & <\sigma,\tau> & o & \sigma^{2^{m-2}}=\tau^2=a, & a^2=1,\ \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{-1},\\
D_m & = & <\sigma,\tau> & o & \sigma^{2^{m-1}}=\tau^2=1, & \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{-1},\\
S_m & = & <\sigma,\tau> & o & \sigma^{2^{m-1}}=\tau^2=1, & \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{2^{m-2}-1},\\
(2,2) & = & <\sigma,\tau> & o & \sigma^2=\tau^2=1, & \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma,
\end{array}$$

o Q_m le groupe des quaternions, D_m le groupe didral, S_m le groupe semi-didral, d'ordre 2^m et $(2,2)$ est un groupe ablien isomorphe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Supposons que $\mathbb{G}$ est un 2-groupe fini d'ordre 2^m et tel que $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ est de type $(2,2)$, alors $\mathbb{G}$ est isomorphe Q_m, D_m, S_m ou $(2,2)$ dfinis dans la proposition 2.1, et soient $\{\sigma,\tau\}$ un systme gnrateur de $\mathbb{G}$ satisfaisant au relations cits dans la proposition 2.1. Par un simple calcul on peut voir que le sous-groupe driv $\mathbb{G}'=[\mathbb{G},\mathbb{G}]=<\sigma^2>$ et que $\mathbb{G}$ a trois sous-groupes d'indice 2 savoir $H_1=<\sigma>$, $H_2=<\sigma^2,\tau>$ et $H_3=<\sigma^2,\sigma\tau>$. De plus si $\mathbb{G}$ est de type $(2,2)$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 2, si $\mathbb{G}\simeq Q_3$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 4 et si $\mathbb{G}\simeq Q_m$ avec $m>3$ ou D_m ou S_m, alors H_1 est cyclique et H_2/H_2' et H_3/H_3' sont de type $(2,2)$ o H_2' (resp. H_3') est le sous-groupe driv de H_2 (resp. H_3).
Dans toute la suite de cette section on dsigne par $\mathbb{M}$ un corps de nombres, $\mathbb{G}$ le groupe de Galois de $\mathbb{M}_2^{(2)}/\mathbb{M}$ et $\mathbb{G}'$ son sous-groupe driv. Alors $\mathbb{G}'\simeq Gal(\mathbb{M}_2^{(2)}/\mathbb{M}_2^{(1)})$ et $\mathbb{G}/\mathbb{G}'\simeq Gal(\mathbb{M}_2^{(1)}/\mathbb{M})$, et on sait par la thorie des corps de classes que $Gal(\mathbb{M}_2^{(1)}/\mathbb{M})\simeq C_{2,\mathbb{M}}$, ainsi $\mathbb{G}/\mathbb{G}'\simeq C_{2,\mathbb{M}}$.

Dfinition 2.2 (Conditions de Taussky). *Soient $\mathbb{F}$ une extension cyclique non ramifie de $\mathbb{M}$ et j : l'application de $C_\mathbb{M}$ dans $C_\mathbb{F}$ qui fait correspondre la classe d'un idal $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{M}$, la classe de l'idal engendr par $\mathfrak{a}$ dans $\mathbb{F}$. Alors l'extension $\mathbb{F}/\mathbb{M}$ est dite:*

- *de type (A) si et seulement si $|\ker j\cap N_{\mathbb{F}/\mathbb{M}}(C_\mathbb{F})|>1$,*
- *de type (B) si et seulement si $|\ker j\cap N_{\mathbb{F}/\mathbb{M}}(C_\mathbb{F})|=1$.*

Supposons maintenant que $C_{2,\mathbb{M}}\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{G}/\mathbb{G}'\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ainsi $\mathbb{G}'$ est cyclique, ce qui donne que la tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{M}$ s'arrte en $\mathbb{M}_2^{(2)}$.
En plus on sait que si $\mathbb{G}$ est d'ordre 2^m et $\mathbb{G}/\mathbb{G}'\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors, $\mathbb{G}$ est isomorphe Q_m, D_m, S_m ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans tous ces cas, on a $\mathbb{G}'=<\sigma^2>$

et les trois sous-groupes d'indice 2 dans $\mathbb{G}$ sont: $H_1 =< \sigma >$, $H_2 =< \sigma^2, \tau >$ et $H_3 =< \sigma^2, \sigma\tau >$, et si $\mathbb{G}' \neq 1$, alors $\mathbb{M}_2^{(1)} \neq \mathbb{M}_2^{(2)}$ et $< \sigma^4 >$ est l'unique sous-groupe de $\mathbb{G}'$ d'indice 2.
Soient $\mathbb{L}$ le sous-corps de $\mathbb{M}_2^{(2)}$ laiss fixe par $< \sigma^4 >$, $\mathbb{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ le sous-corps de $\mathbb{M}_2^{(2)}$ laiss fixe par H_i et j_i l'application j dfinie pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}_i$.

Thorme 2.3 ([16]). *On suppose que $\mathbb{G}/\mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a:*

1. *Si $\mathbb{M}_2^{(1)} = \mathbb{M}_2^{(2)}$, alors les corps $\mathbb{F}_i$ sont de type (A), $|\ker j_i| = 4$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\mathbb{G} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;*

2. *Si $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{M}) \simeq Q_3$, alors les corps $\mathbb{F}_i$ sont de type (A), $|\ker j_i| = 2$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\mathbb{G} \simeq Q_3$;*

3. *Si $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{M}) \simeq D_3$, alors les corps $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ sont de type (B) et $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$. De plus; si $\mathbb{F}_1$ est de type (B) alors $|\ker j_1| = 2$ et $\mathbb{G} \simeq S_m$. Si $\mathbb{F}_1$ est de type (A) et $|\ker j_1| = 2$, alors $\mathbb{G} \simeq Q_m$. Enfin si $\mathbb{F}_1$ est de type (A) et $|\ker j_1| = 4$, alors $\mathbb{G} \simeq D_m$.*

$\|\ker\ j_1\|\ (A/B)$	$\|\ker\ j_2\|\ (A/B)$	$\|\ker\ j_3\|\ (A/B)$	$\mathbb{G}$
4	4	4	$(2, 2)$
$2A$	$2A$	$2A$	Q_3
4	$2B$	$2B$	$D_m, m \geq 3$
$2A$	$2B$	$2B$	$Q_m, m > 3$
$2B$	$2B$	$2B$	$S_m, m \geq 4$

Remarque 2.4. *Si $C_{2,\mathbb{M}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors les 2-groupes de classes des corps $\mathbb{F}_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont cycliques si et seulement si l'une des conditions suivantes est vrifie:*

1. $\mathbb{M}_2^{(2)} = \mathbb{M}_2^{(1)}$;

2. $\mathbb{M}_2^{(2)} \neq \mathbb{M}_2^{(1)}$ *et* $\mathbb{G} \simeq Q_3$.

On trouve plus d'informations sur le problme de capitulation des 2-classes d'idaux d'un corps de nombres $\mathbb{M}$ avec $C_{2,\mathbb{M}}$ est de type $(2, 2)$ dans [16].

3 Dtermination de n pour que $C_{2,\mathbb{K}}$ soit de type $(2,2)$ et $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)}$

Proposition 3.1 ([14]). *Soit $\mathbb{M}$ un corps de nombres ablien sur $\mathbb{Q}$ de degr r^s o r est un nombre premier et $s > 0$, alors:*

$$\mathbb{M}^{(*)} = (\prod_{p|D_{\mathbb{M}}, p \neq r} \mathbb{L}_p)\mathbb{M} = (\prod_{p|D_{\mathbb{M}}, p \neq r} \mathbb{L}_p)\mathbb{L}_r,$$

o $\mathbb{L}_p$ est l'unique sous-corps, de degr e_p (l'indice de ramification de p dans $\mathbb{M}$) sur $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}(\xi_p)$ le p-ime corps cyclotomique, $\mathbb{L}_r$ est un sous-corps de degr e_r (l'indice de ramification de r dans $\mathbb{M}$) sur $\mathbb{Q}$, d'un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\xi_{r^\nu})$ pour un certain $\nu \in \mathbb{N}$ et $D_{\mathbb{M}}$ le discriminant de $\mathbb{M}$.

Thorme 3.2. *Soit $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$, alors $C_{2,\mathbb{K}}$ est de type $(2,2)$ et $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)}$ si et seulement si on est dans l'une des situations suivantes:*

1. $l = 2$ *et* $n = pp'$ *avec* $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{p'}) = -1$;
2. $l = 2$ *et* $n = qq'$ *avec* $(\frac{2}{q}) = (\frac{2}{q'}) = -1$;
3. $l = 2$ *et* $n = pq$ *avec* $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$;
4. $l \equiv 5 \bmod 8$ *et* $n = pp'$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$;
5. $l \equiv 5 \bmod 8$ *et* $n = qq'$ *avec* $(\frac{q}{l}) = (\frac{q'}{l}) = -1$;
6. $l \equiv 5 \bmod 8$ *et* $n = 2p$ *avec* $(\frac{p}{l}) = -1$;
7. $l \equiv 5 \bmod 8$ *et* $n = 2q$ *avec* $(\frac{q}{l}) = -1$;
8. $l \equiv 5 \bmod 8$ *et* $n = q$ *avec* $(\frac{q}{l}) = -1$.

Proof. En utilisant la proposition 3.1, pour que $[\mathbb{K}^{(*)} : \mathbb{K}] = 4$ il faut et il suffit que exactement trois nombres premier de $\mathbb{Q}$ se ramifient dans $\mathbb{K}$ (l et deux autres), et en combinant ceci avec les rsultats de [8] et [9] on trouve que $C_{2,\mathbb{K}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)}$ si et seulement si n est de l'une des formes cites dans le théorème. □

Proposition 3.3. *Soient $\mathbb{L}/\mathbb{M}$ une CM-extension, Δ son groupe de Galois, et v_0 une place de $\mathbb{M}$ avec:*

1. $C_{2,\mathbb{M}} = 0$;
2. $\mathbb{L}$ *et* $\mathbb{M}$ *ont les mmes units* ($\sqrt{-1} \notin \mathbb{L}$);

3. $\mathbb{L} = \mathbb{M}(\sqrt{\beta})$ *avec* $\beta \in \mathbb{M}$, *et* $2 \nmid v_0(\beta)$.

Alors l'application naturelle

$$\bigoplus_{\substack{v \in Ram(\mathbb{L}/\mathbb{M}) \\ v \neq v_0}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad C_{2,\mathbb{L}}$$

(*qui associe une place ramifie de* $\mathbb{M}$ *avec la classe de sa racine carre dans* $\mathbb{L}$) *est injective.*

Proof. Soient $I_{2,\mathbb{L}}$ (resp. $I_{2,\mathbb{M}}$) le groupe des idaux fractionnaires de $\mathbb{L}$ tensoris par $\mathbb{Z}_2$, (resp. $\mathbb{M}$), et $P_{2,\mathbb{L}}$ (resp. $P_{2,\mathbb{M}}$) son sous $\mathbb{Z}_2$-module engendr par les idaux principaux. En utilisant (1), on trouve que l'application naturel $(I_{2,\mathbb{L}})^{\Delta} \rightarrow (C_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}$ se factorise en une application

$$\phi : (I_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}/I_{2,\mathbb{M}} \rightarrow (C_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}$$

(ici nous incrustons $I_{2,\mathbb{M}}$ en $I_{2,\mathbb{L}}$ par l'injection canonique) de noyau

$$(P_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}/I_{2,\mathbb{M}} = (P_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}/P_{2,\mathbb{M}} \simeq Coker((\mathbb{L}^{\times})^{\Delta} \rightarrow (P_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}) \simeq H^1(\Delta, \mathcal{O}_{\mathbb{L}}^{\times}).$$

Par (2), nous concluons que $\ker\phi$ est d'ordre 2. En utilisant (3), on trouve que $(\sqrt{\beta})$ donne un lment non trivial de $\ker\phi$, ainsi il l'engendre. Le rsultat nonc suit en crivant explicitement ϕ comme

$$\phi : \bigoplus_{v \in Ram(\mathbb{L}/\mathbb{M})} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad (C_{2,\mathbb{L}})^{\Delta}$$

En effet, $(\sqrt{\beta})$ correspond à l'élément $\bigoplus v(\beta)$ dans le groupe à gauche donc

$$\ker\phi \quad \cap \bigoplus_{\substack{v \in Ram(\mathbb{L}/\mathbb{M}) \\ v \neq v_0}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad = \quad 0.$$

$\square$

Corollaire 3.4. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *o* n *est de l'une des formes citées dans le théorème* 3.2, *alors* $C_{2,\mathbb{K}}$ *est engendré par* $[\mathcal{H}_1]$ *et* $[\mathcal{H}_2]$ *où* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *sont deux idéaux premiers de* $\mathbb{K}$ *au dessus des deux premiers* (*autre que* l) *de* $\mathbb{Q}$ *qui se ramifient dans* $\mathbb{K}$.

4 Units de certains corps de nombres de degr 4 ou 8 sur $\mathbb{Q}$

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrs et premiers entre eux, $d_3 = d_1 d_2$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unit fondamentale de $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ (resp. $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_3})$), $\mathbb{K}_0 = \mathrm{k}_1\mathrm{k}_2$ et N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de $\mathbb{K}_0/\mathrm{k}_1$ (resp. $\mathbb{K}_0/\mathrm{k}_2$, $\mathbb{K}_0/\mathrm{k}_3$).

On sait d'aprs [19] qu'un systme fondamental d'units (**SFU**) de $\mathbb{K}_0$ est, une permutation prs des indices, l'un des systmes suivants:

(i)	$\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3\}$;	
(ii)	$\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = 1)$;
(iii)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2},\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = 1)$;
(iv)	$\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_2},\, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_1(\varepsilon_2) = N_1(\varepsilon_3) = 1)$;
(v)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2},\, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = N_3(\varepsilon_j) = 1,\, j = 1, 2)$;
(vi)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3},\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = N_2(\varepsilon_3) = \pm 1)$.

Proposition 4.1 ([2])**.** *Soit $\mathbb{K}_0$ un corps de nombres, ablien rel et β un entier algbrique de $\mathbb{K}_0$, totalement positif, sans facteurs carrs. On suppose que $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_0$, ablienne sur $\mathbb{Q}$ et que $i = \sqrt{-1}$ n'appartient pas $\mathbb{F}$. Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r\}$ un* **SFU** *de $\mathbb{K}_0$. On choisit, sans restreindre la gnralit, les units ε_j positives. Alors on a:*

1. *S'il existe une unit de $\mathbb{K}_0$ de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}...\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ (une permutation prs), o les $j_k \in \{0, 1\}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{F}$;*

2. *Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{F}$.*

Corollaire 4.2. *Soit $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-n\varepsilon_0\sqrt{l}})$, alors $\{\varepsilon_0\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{K}$.*

Proof. On a $\{\varepsilon_0\}$ est un **SFU** de k et $n\sqrt{l}$ n'est pas un carr dans k, alors d'aprs la proposition 4.1, $\{\varepsilon_0\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}$. □

Remarque 4.3. *Soient $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ o d est un entier positif sans facteurs carrs. On suppose que ε est de norme 1, alors 2ε est un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ si et seulement si $(x \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{Q}$.*
En effet $2\varepsilon = (a + b\sqrt{d})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= a^2 + db^2 \\ 2y &= 2ab \end{cases}$.
Comme $x^2 - dy^2 = 1$, alors le dernier systme est rsoluble si et seulement si $(x \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{Q}$.

N. B: $(x \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{Q} \Longleftrightarrow \sqrt{x+1} \in \mathbb{Q}$ ou $\sqrt{x-1} \in \mathbb{Q}$.

Lemme 4.4 ([3]). *Soient d un entier positif sans facteurs carrs et $\varepsilon = x+y\sqrt{d}$ l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ o x et y sont des entiers ou bien des demi-entiers. On suppose que ε est de norme 1. Alors $2(x\pm 1)$ et $2d(x\pm 1)$ ne sont pas des carrs dans $\mathbb{Q}$.*

Lemme 4.5 ([3]). *Soient r un nombre premier impair et $\varepsilon = x + y\sqrt{2r}$ l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2r})$. On suppose que ε est de norme 1, alors $(x \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et 2ε est un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2r})$.*

Lemme 4.6 ([3]). *Soit $\varepsilon = x + y\sqrt{q}$ l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Alors x est un entier naturel pair, $(x \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et 2ε est un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$.*

Lemme 4.7 ([3]). *Soient $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q})$ et ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{2q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$). On pose $\varepsilon_3 = s + t\sqrt{2pq}$ et on suppose que $2\varepsilon_3$ n'est pas un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. Alors on a:*

1. *$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{K}_0 \Leftrightarrow 2p(s\pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$;*
2. *$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{K}_0 \Leftrightarrow 2q(s\pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$.*

Lemme 4.8. *Soit $\varepsilon = \frac{x+y\sqrt{d}}{2}$ l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \in \{pp', qq'\}$. On suppose que ε est de norme 1. Alors $p(x \pm 2)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et $p\varepsilon$ est un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ (resp. $q(x\pm 2)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et $q\varepsilon$ est un carr dans $\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})$).*

Proof. On a ε est de norme 1, ainsi $(x-2)(x+2) = dy^2$, donc ils existent m, m', y_1, y_2 des entiers tels que $mm' = d$ et $\begin{cases} x \pm 2 &= 2^j m{y_1}^2 \\ x \mp 2 &= 2^j m'{y_2}^2 \\ 2^j y_1 y_2 &= y \end{cases}$ où $j \in \{0, 1\}$.
En utilisant le lemme 4.4 et le fait que $2^j(m{y_1}^2 - m'{y_2}^2) = \pm 4$, on trouve que la seule forme possible est $\begin{cases} x \pm 2 &= d_1{y_1}^2 \\ x \mp 2 &= d_2{y_2}^2 \\ y_1 y_2 &= y \end{cases}$ avec $(d_1, d_2) \in \{(p, p'), (q, q')\}$, d'o le rsultat. $\square$

Thorme 4.9 ([6]). *Soient $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, ε_0 (resp. ε_2, ε_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$) et $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-m\varepsilon_0\sqrt{2}})$ o m est un entier naturel impair. Alors:*

1. *Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{K}_0$ et de $\mathbb{F}$;*
2. *Sinon, $\{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un* **SFU** *de $\mathbb{K}_0$ et de $\mathbb{F}$.*

Thorme 4.10 ([7]). *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'})$, ε_1 *(resp.* ε_2, ε_3*) l'unit fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *(resp.* $\mathbb{Q}(\sqrt{p'})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$*) et* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-m\varepsilon_1\sqrt{p}})$ *o* m *est entier naturel sans facteurs carrs. Alors on a:*

1. *Si* ε_3 *est de norme* 1*, alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$*;*
2. *Sinon,* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$*.*

Thorme 4.11. *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p'})$ *avec* $p \equiv 5 \bmod 8$ *et* $(\frac{p'}{p}) = -1$*,* ε_1 *(resp.* ε_2, ε_3*) l'unit fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *(resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'})$*,* $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$*) et* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{p}})$*. Alors:*

1. *Si* $N_{\mathrm{k}_2/\mathbb{Q}}(\varepsilon_2) = 1$*, alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$*;*
2. *Si* $N_{\mathrm{k}_2/\mathbb{Q}}(\varepsilon_2) = -1$*, alors* $\mathbb{K}_0$ *et* $\mathbb{F}$ *ont mme* **SFU** *qui est l'un des systmes* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$*.*

Proof. On a ε_1 est de norme -1 et comme $(\frac{2}{p}) = (\frac{p'}{p}) = -1$, alors ε_3 est aussi de norme -1, ainsi:
(1) Si ε_2 est de norme 1, alors, d'aprs le lemme 4.5, $\sqrt{2\varepsilon_2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$, ce qui donne que $\sqrt{2\varepsilon_2} \in \mathbb{K}_0$ et comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}_0$, alors $\sqrt{\varepsilon_2} \notin \mathbb{K}_0$, par suite, en utilisant les rsultats de [19], on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$.
(2) Si ε_2 est de norme -1, alors, d'aprs les rsultats de [19], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ si $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \notin \mathbb{K}_0$ et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ dans le cas contraire.
Montrons qu'un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. En effet, si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ (dans ce cas ε_1, ε_3 sont de norme -1 et ε_2 est de norme ± 1), alors d'aprs la proposition 4.1, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}$, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, pour $\eta = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ o $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Sinon, $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, alors, en utilisant la norme de $\mathbb{K}_0$ sur k_2 ou celle de $\mathbb{K}_0$ sur k_3, on trouve que $\pm p$ est un carr dans k_2 ou dans k_3, ce qui est impossible, par suite $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. Si $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ (dans ce cas ε_1, ε_2 et ε_3 sont de norme -1), alors d'aprs la proposition 4.1, pour montrer que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}$, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, pour $\eta = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ o $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Sinon, $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, alors, en utilisant la norme de $\mathbb{K}_0$ sur k_2, on trouve que $\pm p$ ou $\pm p\varepsilon_2$ est un carr dans k_2, ce qui est absurde, ainsi $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. □

Thorme 4.12. *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ *avec* $p \equiv 5 \bmod 8$ *et* $(\frac{q}{p}) = -1$*,* ε_1 *(resp.* ε_2, ε_3*) l'unit fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *(resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$*,* $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$*) et* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{p}})$*. Alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$*.*

Proof. Posons $\varepsilon_3 = s + t\sqrt{pq}$ o s et t sont des entiers naturels, comme ε_3 est de norme 1, alors $(s-1)(s+1) = pqt^2$, donc, d'aprs le lemme 4.4, il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels qu'on a l'une des formes suivantes:
$$\begin{cases} s \pm 1 & = 2pt_1{}^2 \\ s \mp 1 & = 2qt_2{}^2 \\ 2t_1t_2 & = t \end{cases}, \begin{cases} s \pm 1 & = t_1{}^2 \\ s \mp 1 & = pqt_2{}^2 \\ t_1t_2 & = t \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} s \pm 1 & = pt_1{}^2 \\ s \mp 1 & = qt_2{}^2 \\ t_1t_2 & = t \end{cases}.$$
Pour la premire forme on trouve que $pt_1^2 - qt_2^2 = \pm 1$, ainsi $(\frac{q}{p}) = (\frac{\pm 1}{p}) = 1$, ce qui n'est pas le cas puisque $(\frac{q}{p}) = -1$, Pour la deuxime forme on a $t_1^2 - pqt_2^2 = \pm 2$, ainsi $(\frac{\pm 2}{p}) = 1$, ce qui est absurde car $p \equiv 5 \bmod 8$, ainsi $\sqrt{2\varepsilon_3} = t_1\sqrt{p} + t_2\sqrt{q}$ et d'aprs le lemme 4.6, il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\sqrt{2\varepsilon_2} = y_1 + y_2\sqrt{q}$ et par suite $\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3} \in \mathbb{K}_0$ (ε_2 et ε_3 ne sont pas des carrs dans $\mathbb{K}_0$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}_0$), ainsi, d'aprs les rsultats de [19], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$.
Le systme $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$, en effet, d'aprs la proposition 4.1, il suffit de montrer que $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, pour $\eta = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ o $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Sinon, $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, donc, en utilisant la norme de $\mathbb{K}_0$ sur $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ on trouve que $\pm p$ ou $\pm p\varepsilon_2$ est un carr dans k_2, ce qui est impossible, ainsi $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}$. $\square$

Thorme 4.13. *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q})$ *avec* $p \equiv 5 \bmod 8$ *et* $(\frac{q}{p}) = -1$, ε_1 *(resp.* ε_2, ε_3*) l'unit fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *(resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2q})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$*),* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-m\varepsilon_1\sqrt{p}})$ *où* m *est un entier naturel. Alors,* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$.

Proof. On a que ε_1 est de norme -1, ε_2 et ε_3 sont de norme 1. D'aprs le lemme 4.5, $2\varepsilon_2$ est un carr dans k_2, ce qui donne que ε_2 n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, car sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{K}_0$. De plus, $2\varepsilon_3$ n'est pas un carr dans k_3, en effet, on a $\varepsilon_3 = s + t\sqrt{2pq}$ est de norme 1, ainsi $(s+1)(s-1) = 2pqt^2$, par suite, si $2\varepsilon_3$ est un carr dans k_3, alors il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $t_1t_2 = t$ et $\begin{cases} s \pm 1 & = & t_1{}^2 \\ s \pm 1 & = & 2pqt_2{}^2 \end{cases}$, ainsi $t_1{}^2 - 2pqt_2{}^2 = \pm 2$, ce qui donne que $(\frac{\pm 2}{p}) = 1$, ce qui n'est pas le cas puisque $p \equiv 5 \bmod 8$, d'o $2\varepsilon_3$ n'est pas un carr dans k_3, et en utilisant le lemme 4.7, on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ si et seulement si $2p(s \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ si et seulement si $2q(s \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$, or $2q(s \pm 1)$ ne peut tre un carr dans $\mathbb{N}$, en effet, on a $\sqrt{2q(s \pm 1)} \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $t_1t_2 = t$ et $\begin{cases} s \pm 1 & = & 2qt_1{}^2 \\ s \pm 1 & = & pt_2{}^2 \end{cases}$, ainsi $\pm 2 = 2qt_1{}^2 - pt_2{}^2$, ce qui donne que $-1 = (\frac{\pm 2}{p}) = (\frac{2q}{p})$, ce qui n'est pas le cas puisque $(\frac{2}{p}) = (\frac{q}{p}) = -1$, ainsi $2p(s \pm 1)$ est un carr dans $\mathbb{N}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$.

Le systme $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$, en effet, d'aprs la proposition 4.1, il suffit de montrer que $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, pour $\eta = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ o $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Sinon, $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, donc, en utilisant la norme de $\mathbb{K}_0$ sur $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2q})$ on trouve que $\pm p$ est un carr dans k_2, ce qui est impossible, ainsi $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}$. $\square$

Thorme 4.14. *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{qq'})$ *avec* $(\frac{q}{p}) = (\frac{q'}{p}) = -1$, ε_1 (*resp.* ε_2, ε_3) *l'unit fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ (*resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{qq'})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$) *et* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{p}})$. *Alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{K}_0$ *et de* $\mathbb{F}$.

Proof. Soient $\varepsilon_2 = \frac{x+y\sqrt{qq'}}{2}$ et $\varepsilon_3 = \frac{s+t\sqrt{pqq'}}{2}$, alors ε_1 est de norme -1 et ε_2, ε_3 sont de norme 1.

- ε_2 n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, en effet, comme ε_2 est de norme 1, alors $(x+2)(x-2) = qq'y^2$, ainsi il existe y_1, y_2, m et m' des entiers tels qu'on a l'une des formes suivantes:

$$\begin{cases} x \pm 2 &= 2m{y_1}^2 \\ x \mp 2 &= 2m'{y_2}^2 \\ 2y_1y_2 &= y \\ mm' &= qq' \end{cases}, \quad \begin{cases} x \pm 2 &= {y_1}^2 \\ x \mp 2 &= qq'{y_2}^2 \\ y_1y_2 &= y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \pm 2 &= q{y_1}^2 \\ x \mp 2 &= q'{y_2}^2 \\ y_1y_2 &= y \end{cases}.$$

Pour la premire forme on a $m{y_1}^2 - m'{y_2}^2 = \pm 2$, ce qui donne que y_1 et y_2 sont de mme parit, comme $q \equiv q' \equiv -1 \bmod 4$, alors $m{y_1}^2 - m'{y_2}^2 \equiv 0 \bmod 4$, ce qui est en contradiction. D'aprs le lemme 4.4, la deuxime forme est impossible. Donc il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que: $\begin{cases} x \pm 2 &= q{y_1}^2 \\ x \mp 2 &= q'{y_2}^2 \\ y_1y_2 &= y \end{cases}$, ainsi $\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{y_1\sqrt{q}+y_2\sqrt{q'}}{2} \notin \mathbb{K}_0$.

- ε_3 est un carr dans $\mathbb{K}_0$, en effet, comme ε_3 est de norme 1, alors $(s+2)(s-2) = pqq't^2$, ainsi:

S'il existe t_1, t_2, m et m' des entiers tels que: $\begin{cases} s \pm 2 &= 2m{t_1}^2 \\ s \mp 2 &= 2m'{t_2}^2 \\ 2t_1t_2 &= t \\ mm' &= pqq' \end{cases}$,

alors $m{t_1}^2 - m'{t_2}^2 = \pm 2$, ce qui implique que t_1 et t_2 sont de mme parit. Or, $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \bmod 4$, donc $m{t_1}^2 - m'{t_2}^2 \equiv 0 \bmod 4$, ce qui est en contradiction.

S'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que: $\begin{cases} s \pm 2 &= pq{t_1}^2 \\ s \mp 2 &= q'{t_2}^2 \\ t_1t_2 &= y \end{cases}$, alors $\pm 4 = pq{t_1}^2 - q'{t_2}^2$, ce qui donne que $(\frac{\pm 4}{p}) = (\frac{q'}{p})$, ainsi $(\frac{q'}{p}) = 1$, ce qui n'est pas le cas.

S'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que: $\begin{cases} s+2 &= pt_1{}^2 \\ s-2 &= qq't_2{}^2 \\ t_1t_2 &= t \end{cases}$, alors $4 = pt_1{}^2 - qq't_2{}^2$, ce qui donne que $(\frac{p}{q}) = (\frac{p}{q'}) = 1$, ce qui est en contradiction.
Donc il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que: $\begin{cases} s-2 &= pt_1{}^2 \\ s+2 &= qq't_2{}^2 \\ t_1t_2 &= t \end{cases}$.
Ainsi $\sqrt{\varepsilon_3} = \frac{t_1\sqrt{p}+t_2\sqrt{qq'}}{2} \in \mathbb{K}_0$, en utilisant les rsultats de [19], on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$.
Montrons que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. En effet, soient N_i la norme de $\mathbb{K}_0$ sur k_i $(i = 1, 2, 3)$, alors d'aprs la proposition 4.1, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}$, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ n'est pas un carr dans $\mathbb{K}_0$, pour $\eta = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ o $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$.
Si $\eta\varepsilon_1\sqrt{p}$ est un carr dans $\mathbb{K}_0$, alors en utilisant N_2 ou N_3 on trouve que $\sqrt{\pm p}$ est dans k_2 ou dans k_3, ce qui est absurde, ainsi $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. □

Thorme 4.15. *Soient* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'p''})$ *avec* p, p' *et* p'' *des nombres premiers diffrents deux à deux tels que* $p \equiv p' \equiv p'' \equiv 1 \bmod 4$ *et* $(\frac{p'}{p}) = (\frac{p''}{p}) = -1$, ε_1 *(resp.* ε_2, ε_3*) l'unit fondamentale de* $\mathrm{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *(resp.* $\mathrm{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p'p''})$, $\mathrm{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{pp'p''})$*) et* $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0(\sqrt{-m\varepsilon_1\sqrt{p}})$ *où* m *est un entier naturel. Alors* $\mathbb{K}_0$ *et* $\mathbb{F}$ *ont mme* **SFU** *qui est l'un des systmes* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Proof. Comme $(\frac{p'}{p}) = (\frac{p''}{p}) = -1$, alors ε_3 est de norme -1, et on a ε_1 est aussi de norme -1, ainsi:

1. Si ε_2 est de norme 1, alors on utilise la mme mthode que dans la preuve du thorme 4.14, pour montrer que $\sqrt{\varepsilon_2} \notin \mathbb{K}_0$, ainsi d'aprs les rsultats de [19], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$.

2. Si ε_2 est de norme -1, alors toujours d'aprs les rsultats de [19], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ si $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \notin \mathbb{K}_0$, et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ dans le cas contraire.

Pour montrer que $\mathbb{K}_0$ et $\mathbb{F}$ ont mme **SFU** il suffit d'utiliser la proposition 4.1. □

Thorme 4.16. *Soient* $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ *et* $\mathbb{F} = \mathbb{L}(\sqrt{-m})$ *où* m *est un entier naturel impair et sans facteur carré. Alors* $\{\xi_3, \xi_5, \xi_7\}$ *est un* **SFU** *de* $\mathbb{L}$ *et de* $\mathbb{F}$ *o* $\xi_3 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\xi_5 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}}$ *et* $\xi_7 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Proof. Il est connu dans la littrature que $\{\xi_3, \xi_5, \xi_7\}$ est un **SFU** de $\mathbb{L}$ (voir par exemple [23], p. 144-145). Comme $m\xi$ n'est pas un carr dans $\mathbb{L}$, pour $\xi = {\xi'_1}^{j_1}{\xi'_2}^{j_2}\xi'_3$ o $\{\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3\} = \{\xi_3, \xi_5, \xi_7\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$, alors, d'aprs la proposition 4.1, on trouve que le systme $\{\xi_3, \xi_5, \xi_7\}$ est aussi un **SFU** de $\mathbb{F}$. □

5 Capitulation des 2-classes d'idaux de $\mathbb{K}$ et structure de $\mathbb{G}_2$

Dans le reste de ce travail on est besoin des trois résultats suivants:

Thorme 5.1 ([13]). *Soit $\mathbb{L}/\mathbb{M}$ une extension cyclique non ramifie de degr un nombre premier, alors le nombre des classes qui capitulent dans $\mathbb{L}/\mathbb{M}$ est gal :*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{M}][E_{\mathbb{M}} : N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}}(E_{\mathbb{L}})].$$

Proposition 5.2 ([20]). *Soient $\mathbb{L}/\mathbb{M}$ une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2, 2)$, et $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ ses sous extensions quadratiques. Alors*

$$h(\mathbb{L}) = \frac{2^{d-\kappa-2-v} q(\mathbb{L}/\mathbb{M}) h(\mathbb{L}_1) h(\mathbb{L}_2) h(\mathbb{L}_3)}{h(\mathbb{M})^2},$$

o $q(\mathbb{L}/\mathbb{M}) = [E_{\mathbb{L}} : E_1E_2E_3]$ est l'indice des units de $\mathbb{L}/\mathbb{M}$, d le nombre des premiers infinis de $\mathbb{M}$ qui se ramifient dans $\mathbb{L}/\mathbb{M}$, κ est le $\mathbb{Z}$-rang du groupe $E_{\mathbb{M}}$ des units de $\mathbb{M}$, et $v = 0$, sauf si $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{M}(\sqrt{E_{\mathbb{M}}})$ o $v = 1$.

Proposition 5.3 ([12]). *Soient $\mathbb{M}$ un corps de nombres contenant les racines m-imes de l'unit, $\mathbb{L}$ une extension finie de $\mathbb{M}$, $\alpha \in \mathbb{M}^*$ et $\beta \in \mathbb{L}^*$. On note P un idal premier de $\mathbb{M}$, et $\mathcal{P}$ un idal premier de $\mathbb{L}$ au-dessus de P. Alors*

$$\prod_{\mathcal{P}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathcal{P}}\right)_m = \left(\frac{N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}}(\beta), \alpha}{P}\right)_m,$$

o le produit est pris sur tous les premiers de $\mathbb{L}$ qui sont au-dessus de P.

5.1 Cas où $l = 2$ et $n = qq'$ avec $(\frac{2}{q}) = (\frac{2}{q'}) = -1$

Dans ce cas on a $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{-q}, \sqrt{-q'})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{-q})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{-q'})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{qq'})$.

Thorme 5.4 ([6]). *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-qq'(2+\sqrt{2})})$ tel que $(\frac{2}{q}) = (\frac{2}{q'}) = -1$, alors $\mathbb{K}_2^{(2)} = \mathbb{K}_2^{(1)}$, $\mathbb{G}_2$ est ablien et les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbb{F}_i/\mathbb{K}$ $(i = 1, 2, 3)$.*

5.2 Cas où $l = 2$ et $n = pp'$ avec $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{p'}) = -1$

Dans ce cas on a $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{p}, \sqrt{p'})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{p'})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{pp'})$.

Thorme 5.5 ([6])**.** *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-pp'(2+\sqrt{2})})$ et $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'})$ tel que $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{p'}) = -1$, alors:*

1. *Si $Q_{\mathbb{K}_0} = 1$, alors les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_3$ et dans chaque $\mathbb{F}_i$, $i \in \{1, 2\}$, deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent et le groupe $\mathbb{G}_2$ est didral d'ordre 2^m $(m \geq 3)$;*

2. *Si $Q_{\mathbb{K}_0} = 2$, alors dans chaque extension $\mathbb{F}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ qui capitulent et le groupe $\mathbb{G}_2$ est quaternionique d'ordre 2^m $(m > 3)$.*

5.3 Cas où $l = 2$ et $n = pq$ avec $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$

Dans ce cas on a $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{p}, \sqrt{-q})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{-q})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{-pq})$.

Lemme 5.6. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ avec $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$, $\mathcal{P}$ l'idal premier au dessus de p dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{Q}$ celui au dessus de q. Alors la classe $[\mathcal{P}]$ (resp. $[\mathcal{Q}]$, $[\mathcal{P}Q]$) est d'ordre 2, $C_{2,\mathbb{K}}$ est engendr par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{Q}]$. De plus $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{F}_1$, $\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbb{F}_2$ et $\mathcal{P}Q$ capitule dans $\mathbb{F}_3$.*

Proof. Par application de la proposition 3.3, on trouve que $C_{2,\mathbb{K}}$ est engendr par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{Q}]$.
Pour montrer que $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{K}(\sqrt{p})$, il suffit de voir que $\sqrt{p} \in \mathbb{K}(\sqrt{p})$ et $(\sqrt{p}^2) = (p)$ dans $\mathbb{K}(\sqrt{p})$, donc $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$ et de mme $\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{-q})$ et $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{-pq})$. □

Thorme 5.7. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ avec $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$, alors dans chaque extension $\mathbb{F}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ qui capitulent et le groupe $\mathbb{G}_2$ est quaternionique d'ordre 2^m avec $m > 3$.*

Proof. Soient ε_0 (resp. ε_2, ε_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$), $\mathcal{P}$ l'idal premier de $\mathbb{K}$ au dessus de p, $\mathcal{Q}$ celui au dessus de q, alors, d'aprs le thorme 4.9, $\{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}_1$.
Comme $N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$ et $N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(\varepsilon_2) = N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(\varepsilon_3) = -1$, alors $E_{\mathbb{K}} =$

$N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{F}_1})$, ainsi, en utilisant le thorme 5.1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_1$, savoir $[\mathcal{P}]$ et son carr.
D'aprs le thorme 4.16, $\{\xi_3, \xi_5, \xi_7\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}_3$, et comme $N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(\xi_7) = -1$ et $N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(\xi_5) = -N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(\xi_3) = \varepsilon_1$, alors $E_{\mathbb{K}} = N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{F}_1})$, ainsi, en utilisant le thorme 5.1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_3$, savoir $[\mathcal{P}\mathcal{Q}]$ et son carr.
Les extension $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$ et $\mathbb{F}_2/\mathbb{K}$ sont de type (B) et l'extensions $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$ est de type (A). En effet, soit $\mathbb{K}' = \mathbb{Q}(\sqrt{-q(2+\sqrt{2})})$, alors on a $\mathbb{K}\mathbb{K}' = \mathbb{F}_1$ et comme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifi dans $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, alors pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (thorme de translation), pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-q\varepsilon_0\sqrt{2}}{p}\right)$. On a $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ et $-q\varepsilon_0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, donc en utilisant la proposition 5.3, on trouve $\left(\frac{p,-q\varepsilon_0\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(-q\varepsilon_0\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p,2q^2}{p}\right) = (\frac{2}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$ et comme $[\mathcal{P}]$ est la seule classe non triviale de $C_{2,\mathbb{K}}$ qui capitule dans $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$, alors $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$ est de type (B). De mme on montre que $\mathcal{Q}$ est inerte dans $\mathbb{F}_2/\mathbb{K}$, ce qui donne aussi que $\mathbb{F}_2/\mathbb{K}$ est de type (B), par suite, d'aprs le thorme 2.3, deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_2$ savoir $[\mathcal{Q}]$ et son carr. Pour $\mathbb{F}_3$, soit $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$, alors on a $\mathbb{K}\mathbb{L} = \mathbb{F}_3$, $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifi dans $\mathbb{L}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbb{L}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (thorme de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,\varepsilon_0\sqrt{2}}{p}\right)$. En utilisant la proposition 5.3, on a $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ et $\varepsilon_0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ainsi $\left(\frac{p,\varepsilon_0\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(\varepsilon_0\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p,2}{p}\right) = (\frac{2}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbb{L}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, et de mme on montre que $\mathcal{Q}$ est aussi inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$. Comme $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ capitule dans $\mathbb{F}_3$, alors par application de la loi de rciprocit d'Artin, on trouve que $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$ est de type (A). Par suite, en utilisant le thorme 2.3, le groupe $\mathbb{G}_2$ est isomorphe Q_m $(m > 3)$. $\square$

Remarque 5.8. *Soient* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ *et* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-pq})$ *avec* $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{q}) = -1$*, alors* $|\mathbb{G}_2| = 4h_2(\mathbb{K}_0)$.

Proof. On a $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{F}_3$ est une extension non ramifie et comme l'extension $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$ est de type (A), alors, d'aprs [16], $C_{2,\mathbb{F}_3}$ est cyclique, ainsi $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{K}_2^{(1)}$ ont mme 2-corps de classes de Hilbert, savoir $\mathbb{K}_2^{(2)}$, donc $|\mathbb{G}_2| = 2h_2(\mathbb{F}_3)$. De plus

$\mathbb{F}_3/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$ et de sous-extensios quadratiques $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_0$ et $\mathbb{L}=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$, ainsi, en utilisant la proposition 5.2, on trouve que

$$h_2(\mathbb{F}_3)=\frac{1}{2}q(\mathbb{F}_3/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))h_2(\mathbb{K})h_2(\mathbb{K}_0)h_2(\mathbb{L}),$$

et comme $h_2(\mathbb{K})=4$, $q(\mathbb{F}_3/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))=1$ et $h_2(\mathbb{L})=1$ (voir [23]), alors $h_2(\mathbb{F}_3)=2h_2(\mathbb{K}_0)$, ce qui donne que $|\mathbb{G}_2|=4h_2(\mathbb{K}_0)$. □

Corollaire 5.9. *Soit $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$ avec $(\frac{2}{p})=(\frac{2}{q})=-1$ et $(\frac{p}{q})=-1$, alors dans chacune des extensions $\mathbb{F}_i$, pour $i\in\{1,2,3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ qui capitulent et $\mathbb{G}_2\simeq Q_4$.*

Proof. Comme $p\equiv -q\equiv 5 \bmod 8$, alors, d'aprs le thorme 5.7, $\mathbb{G}_2$ est quaternionique d'ordre 2^m avec $m>3$. Soit $\mathbb{K}_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-pq})$, comme $(\frac{p}{q})=-1$, alors, d'aprs [21], on a $h_2(\mathbb{K}_0)=4$, ainsi, en utilisant la remarque 5.8, on trouve que $\mathbb{G}_2\simeq Q_4$. □

5.4 Cas où $l\equiv 5 \bmod 8$ et $n=qq'$ avec $(\frac{q}{l})=(\frac{q'}{l})=-1$

Dans ce cas on a $\mathbb{K}_2^{(1)}=\mathbb{K}^{(*)}=\mathbb{K}(\sqrt{-q},\sqrt{-q'})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1=\mathbb{K}(\sqrt{-q})$, $\mathbb{F}_2=\mathbb{K}(\sqrt{-q'})$ et $\mathbb{F}_3=\mathbb{K}(\sqrt{qq'})$.

Thorme 5.10. *Soit $\mathbb{K}=\mathrm{k}(\sqrt{-qq'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ avec $(\frac{q}{l})=(\frac{q'}{l})=-1$. Alors, les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbb{F}_i/\mathbb{K}$ $(i=1,2,3)$ et le groupe $\mathbb{G}_2$ est ablien.*

Proof. Comme $\mathbb{F}_3/\mathrm{k}$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, de sous-extensions quadratiques $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}=\mathrm{k}(\sqrt{-\varepsilon_0\sqrt{l}})$ et $\mathbb{K}_0=\mathbb{Q}(\sqrt{l},\sqrt{qq'})$, alors d'aprs la proposition 5.2 on a

$$h_2(\mathbb{F}_3)=\frac{2^{2-1-2-0}q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})h_2(\mathbb{K})h_2(\mathbb{L})h_2(\mathbb{K}_0)}{h_2(\mathrm{k})^2}.$$

D'aprs [15], on a $h_2(lqq')=2$ et comme $\mathbb{K}_0/\mathbb{Q}(\sqrt{lqq'})$ est une extension non ramifie et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lqq'})$ est cyclique, alors d'aprs [11] on a $h_2(\mathbb{K}_0)=h_2(lqq')/2=1$, aussi on a $h_2(\mathrm{k})=1$, $h_2(\mathbb{K})=4$ et d'aprs [8] $h_2(\mathbb{L})=1$, ainsi $h_2(\mathbb{F}_3)=2q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})$. Soient ε_2 (resp. ε_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{lqq'})$), d'aprs le thorme 4.14, $\{\varepsilon_0,\varepsilon_2,\sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ et de $\mathbb{F}_3$ et on a $\{\varepsilon_0\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{L}$, donc $q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})=1$, ce qui donne que $C_{2,\mathbb{F}_3}$ est cyclique d'ordre 2 et comme $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{F}_3$ est une extension non ramifie, alors $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{K}_2^{(1)}$ ont mme 2-corps de classes de Hilbert, savoir $\mathbb{K}_2^{(2)}$, or $h_2(\mathbb{F}_3) = 2$, donc $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}_2^{(2)}$, par suite $\mathbb{G}_2$ est ablien et les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbb{F}_i/\mathbb{K}$ $(i = 1, 2, 3)$. $\square$

5.5 Cas où $l \equiv 5 \bmod 8$ et $n = pp'$ avec $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$

Dans ce cas on a $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{p}, \sqrt{p'})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{p'})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{pp'})$.

Thorme 5.11. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-pp'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$, *alors:*

1. *Soit les quatre classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent dans* $\mathbb{F}_3$ *et dans chaque* $\mathbb{F}_i$, $i \in \{1, 2\}$, *deux classes seulement de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent;*
2. *Soit dans chaque extension* $\mathbb{F}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, *il existe exactement deux classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *qui capitulent.*

Proof. Soient $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{pp'})$, $\mathbb{K}_0' = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$, ε_0 (resp. ε_2, ε_3, η_2, η_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{lpp'})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$). Alors $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}_0(\sqrt{-\varepsilon_0\sqrt{l}})$ et $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}_0'(\sqrt{-p'\varepsilon_1\sqrt{l}})$.
D'aprs le thorme 4.15, $\{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ou $\{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}_3$. Ainsi, si $\{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est **SFU** de $\mathbb{F}_3$, alors $N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{F}_3}) \neq E_{\mathbb{K}}$, en utilisant le thorme 5.1, on trouve que les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_3$. Si $\{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}_3$, alors $N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$, ainsi $N_{\mathbb{F}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{F}_3}) = E_{\mathbb{K}}$, en utilisant le thorme 5.1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_3$.
D'aprs le thorme 4.10, $\{\sqrt{\varepsilon_0\eta_2\eta_3}, \eta_2, \eta_3\}$ est un **SFU** de $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$. On a $N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(\sqrt{\varepsilon_0\eta_2\eta_3}) = \pm\varepsilon_0$, donc $N_{\mathbb{F}_1/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{F}_1}) = E_{\mathbb{K}}$ et en utilisant le thorme 5.1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_1$, et de mme pour $\mathbb{F}_2$, car p et p' jouent des rles symtriques, ce qui achve la dmonstration. $\square$

Lemme 5.12. *Soient* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-pp'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$, $\mathcal{P}$ *l'idal premier au dessus de* p *dans* $\mathbb{K}$ *et* $\mathcal{P}'$ *celui au dessus de* p'. *Alors,* $C_{2,\mathbb{K}}$ *est engendr par les classes* $[\mathcal{P}]$ *et* $[\mathcal{P}']$, *de plus* $\mathcal{P}$ *capitule dans* $\mathbb{F}_1$, $\mathcal{P}'$ *capitule dans* $\mathbb{F}_2$ *et* $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ *capitule dans* $\mathbb{F}_3$.

Proof. Par application de la proposition 3.3, on trouve que $C_{2,\mathbb{K}}$ est engendr par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{P}']$.
Pour montrer que $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{K}(\sqrt{p})$, il suffit de voir que $\sqrt{p} \in \mathbb{K}(\sqrt{p})$

et $(\sqrt{p}^2) = (p)$ dans $\mathbb{K}(\sqrt{p})$, donc $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$ et de mme $\mathcal{P}'$ capitule dans $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{p'})$ et $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ capitule dans $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{pp'})$. □

Thorme 5.13. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-pp'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$*, alors* $\mathbb{G}_2$ *est didral ou quaternionique d'ordre* 2^m $(m \geq 3)$ *suivant que* $Q_{\mathbb{K}_0} = 1$ *ou* $Q_{\mathbb{K}_0} = 2$ *où* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{pp'})$.

Proof. Si $Q_{\mathbb{K}_0} = 1$, alors, en utilisant le théorème 5.11, les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans $\mathbb{F}_3$ et dans chaque $\mathbb{F}_i$ $(i = 1, 2)$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent, ainsi d'aprs le thorme 2.3, $\mathbb{G}_2$ est isomorphe D_m $(m \geq 3)$.
Si $Q_{\mathbb{K}_0} = 2$, alors, en utilisant le théorème 5.11, dans chaque $\mathbb{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ les idaux premiers de $\mathbb{K}$ au dessus de p et p' respectivement. Alors $\mathcal{P}$ capitule dans $\mathbb{F}_1$, $\mathcal{P}'$ capitule dans $\mathbb{F}_2$ et $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ capitule dans $\mathbb{F}_3$.
Montrons que $\mathbb{F}_3$ est de type (A) et que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont de type (B). En effet pour $\mathbb{F}_1$, soit $\mathbb{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-p'\varepsilon_0\sqrt{l}})$, alors on a $\mathbb{K}\mathbb{K}' = \mathbb{F}_1$, $N_{\mathbb{K}/\mathrm{k}}(\mathcal{P})=p$ et p est non ramifi dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$, ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$ (thorme de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-p'\varepsilon_0\sqrt{l}}{p}\right)$. On a $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $\mathrm{k}/\mathbb{Q}$ et $-p'\varepsilon_0\sqrt{l} \in \mathrm{k}$, donc en utilisant la proposition 5.3, on trouve $\left(\frac{p,-p'\varepsilon_0\sqrt{l}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathrm{k}/\mathbb{Q}}(-p'\varepsilon_0\sqrt{l})}{p}\right) = \left(\frac{p,lp'^2}{p}\right) = (\frac{l}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{F}_1/\mathbb{K}$ est de type (B), et de mme on montre que $\mathcal{Q}$ est inerte dans $\mathbb{F}_2/\mathbb{K}$, ce qui donne aussi que $\mathbb{F}_2/\mathbb{K}$ est de type (B). Pour $\mathbb{F}_3$, soit $\mathbb{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-\varepsilon_0\sqrt{l}})$, alors on a $\mathbb{K}\mathbb{K}' = \mathbb{F}_3$, $N_{\mathbb{K}/\mathrm{k}}(\mathcal{P})=p$ et p est non ramifi dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$, ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, il suffit de montrer que p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$ (thorme de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-\varepsilon_0\sqrt{l}}{p}\right)$. En utilisant la proposition 5.3, on a $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $\mathrm{k}/\mathbb{Q}$ et $\varepsilon_0\sqrt{l} \in \mathrm{k}$, ainsi $\left(\frac{p,-\varepsilon_0\sqrt{l}}{p}\right) = \left(\frac{p,N_{\mathrm{k}/\mathbb{Q}}(-\varepsilon_1\sqrt{l})}{p}\right) = \left(\frac{p,l}{p}\right) = (\frac{l}{p}) = -1$, ainsi p est inerte dans $\mathbb{K}'/\mathrm{k}$, ce qui donne que $\mathcal{P}$ est inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, et de mme on montre que $\mathcal{Q}$ est aussi inerte dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, d'o $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ est norme dans $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$ est de type (A), et en utilisant le thorme 2.3, le groupe $\mathbb{G}_2$ est isomorphe Q_m $(m > 3)$. □

Corollaire 5.14. *Soient* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-pp'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *et* $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{pp'})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$*, alors* $C_{2,\mathbb{F}_3}$ *est cyclique d'ordre* $h_2(\mathbb{F}_3) = 2Q_{K_0}h_2(pp')$ *où et* $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{pp'})$.

Proof. Comme l'extension $\mathbb{F}_3/\mathbb{K}$ est de type (A), alors, d'aprs [16], le 2-groupe de classes de $\mathbb{F}_3 = K(\sqrt{pp'})$ est cyclique. Comme $\mathbb{F}_3/\mathrm{k}$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, de sous-extensions quadratiques $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-\varepsilon_0\sqrt{l}})$ et $\mathbb{K}_0$, alors, d'aprs la proposition 5.2, on trouve que

$$h_2(\mathbb{F}_3) = \frac{1}{2}q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})h_2(\mathbb{K})h_2(\mathbb{K}')h_2(\mathbb{K}_0),$$

ceci car $d = 2$, $\kappa = 1$, $v = 0$. Or on a $h_2(\mathbb{K}) = 4$, $h_2(\mathbb{K}') = 1$ (voir [10]) d'aprs [22] $h_2(\mathbb{K}_0) = \frac{1}{4}Q_{\mathbb{K}_0}h_2(l)h_2(pp')h_2(lpp')$, et comme $h_2(2) = 1$ et $h_2(lpp') = 4$, donc $h_2(\mathbb{K}_0) = Q_{\mathbb{K}_0}h_2(pp')$, ainsi $h_2(\mathbb{F}_3) = 2q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})Q_{\mathbb{K}_0}h_2(pp')$ et d'aprs le thorme 4.15, $\mathbb{K}_0$ et $\mathbb{F}_3$ on mme **SFU** donc $q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k}) = 1$, d'o le rsultat. □

Remarque 5.15. *Soient* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-pp'\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$ *et* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{pp'})$*, alors* $|\mathbb{G}_2| = 4Q_{\mathbb{K}_0}h_2(pp')$.

5.6 Cas où $l \equiv 5 \bmod 8$, $n = 2p$ avec $(\frac{p}{l}) = -1$

Dans ce cas $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{p}, \sqrt{2})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{p})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{2p})$ et ce cas se traite de la même manière que le cas où $l \equiv 5 \bmod 8$, $n = pp'$ avec $(\frac{p}{l}) = (\frac{p'}{l}) = -1$ et on a

Thorme 5.16. *Soient* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-2p\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = -1$ *et* $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{2p})$. *Alors:*

1. *Si* $Q_{\mathbb{K}_0} = 1$*, alors les quatre classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent dans* $\mathbb{F}_3$ *et dans chaque* $\mathbb{F}_i$ *pour* $i \in \{1, 2\}$*, deux classes seulement de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent et* $\mathbb{G}_2$ *est didral d'ordre* 2^m $(m \geq 3)$.

2. *Si* $Q_{\mathbb{K}_0} = 2$*, alors dans chaque extension* $\mathbb{F}_i$*,* $i \in \{1, 2, 3\}$*, il existe exactement deux classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *qui capitulent et* $\mathbb{G}_2$ *est quaternionique d'ordre* 2^m *avec* $m > 3$.

Remarque 5.17. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-2p\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{p}{l}) = -1$*, alors* $|\mathbb{G}_2| = 4Q_{\mathbb{K}_0}h_2(2p)$ *o* $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{2p})$.

5.7 Cas où $l \equiv 5 \bmod 8$, $n = 2q$ avec $(\frac{q}{l}) = -1$

Dans ce cas $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{-q}, \sqrt{-2})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{-q})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{-2})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{2q})$.

Thorme 5.18. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-2q\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{q}{l}) = -1$*, alors, les quatre classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent dans chacune des extensions* $\mathbb{F}_i$ *pour* $i \in \{1,2,3\}$ *et* $\mathbb{G}_2$ *est ablien.*

Proof. Comme $\mathbb{F}_3/\mathrm{k}$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, de sous extensions quadratiques $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}' = \mathrm{k}(\sqrt{-\varepsilon_0\sqrt{l}})$ et $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{2q})$, alors d'aprs la proposition 5.2, on trouve que:

$$h_2(\mathbb{F}_3) = \frac{2^{2-1-2-0}q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})h_2(\mathbb{K})h_2(\mathbb{K}')h_2(\mathbb{K}_0)}{h_2(\mathrm{k})^2}.$$

D'aprs [22] on a $h_2(\mathbb{K}_0) = \frac{1}{4}Q_{\mathbb{K}_0}h_2(l)h_2(2q)h_2(2lq)$, suivant le thorme 4.13 on a $Q_{\mathbb{K}_0} = 2$ et d'aprs [15], on a $h_2(2q) = 1$ et $h_2(2lq) = 2$, donc $h_2(\mathbb{K}_0) = 1$. Puisque $h_2(\mathrm{k}) = 1$, $h_2(\mathbb{K}) = 4$, d'aprs [10], $h_2(\mathbb{K}') = 1$, alors $h_2(\mathbb{F}_3) = 2q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k})$.
Montrons que $q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k}) = 1$, en effet, soient ε_0 (resp. ε_2, ε_3) l'unit fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{2q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2lq})$), alors, d'aprs le thorme 4.13, $\{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}_0$ et de $\mathbb{F}_3$, et d'aprs le corolaire 4.2, $\{\varepsilon_0\}$ est un **SFU** de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}'$, alors $E_{\mathbb{K}}E_{\mathbb{K}'}E_{\mathbb{K}_0} = E_{\mathbb{K}_0}$, ainsi $q(\mathbb{F}_3/\mathrm{k}) = [E_{\mathbb{F}_3} : E_{\mathbb{K}_0}] = 1$, ce qui donne que $C_{2,\mathbb{F}_3}$ est cyclique d'ordre 2, et comme $\mathbb{K}_2^{(1)}/\mathbb{F}_3$ est une extension non ramifie, alors $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{K}_2^{(1)}$ ont mme 2-corps de classes de Hilbert savoir $\mathbb{K}_2^{(2)}$ or $h_2(\mathbb{F}_3) = 2$, donc $\mathbb{K}_2^{(2)} = \mathbb{K}_2^{(1)}$, ainsi $\mathbb{G}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les quatre classes de $C_{2,\mathbb{K}}$ capitulent dans chacune des extensions $\mathbb{F}_i/\mathbb{K}$ (i=1,2,3). □

5.8 Cas où $l \equiv 5 \bmod 8$, $n = q$ avec $(\frac{q}{l}) = -1$

Dans ce cas $\mathbb{K}_2^{(1)} = \mathbb{K}^{(*)} = \mathbb{K}(\sqrt{-q}, \sqrt{-1})$, donc ses sous-corps quadratiques sur $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{-q})$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\sqrt{-1})$ et $\mathbb{F}_3 = \mathbb{K}(\sqrt{q})$.

Thorme 5.19. *Soit* $\mathbb{K} = \mathrm{k}(\sqrt{-q\varepsilon_0\sqrt{l}})$ *avec* $(\frac{q}{l}) = -1$*, alors, les quatre classes de* $C_{2,\mathbb{K}}$ *capitulent dans chacune des extensions* $\mathbb{F}_i$*,* $(i = 1,2,3)$*, et* $\mathbb{G}_2$ *est ablien.*

Proof. Même raisonnement que dans la preuve du théorème 5.18. □

6 Exemples numériques

$\mathbb{K}$	$\lvert\ker\ j_1\rvert$	$\lvert\ker\ j_2\rvert$	$\lvert\ker\ j_3\rvert$	$\mathbb{G}_2$	
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3\cdot 11(2+\sqrt{2})})$	4	4	4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	Théorème 5.4
$\mathbb{Q}(\sqrt{-5\cdot 37(2+\sqrt{2})})$	2	2	4	D_3	Théorème 5.5
$\mathbb{Q}(\sqrt{-5\cdot 13(2+\sqrt{2})})$	2	2	2	Q_4	Théorème 5.5
$\mathbb{Q}(\sqrt{-5\cdot 11(2+\sqrt{2})})$	2	2	2	Q_m	Théorème 5.7
$\mathbb{Q}(\sqrt{-5\cdot 3(2+\sqrt{2})})$	2	2	2	Q_4	Corollaire 5.9
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3\cdot 7\varepsilon_0\sqrt{5}})$	4	4	4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	Théorème 5.10
$\mathbb{Q}(\sqrt{-13\cdot 53\varepsilon_0\sqrt{5}})$	2	2	4	D_m	Théorème 5.13
$\mathbb{Q}(\sqrt{-13\cdot 37\varepsilon_0\sqrt{5}})$	2	2	2	Q_m	Théorème 5.13
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2\cdot 17\varepsilon_0\sqrt{5}})$	2	2	4	D_m	Théorème 5.16
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2\cdot 13\varepsilon_0\sqrt{5}})$	2	2	2	Q_m	Théorème 5.16
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2\cdot 3\varepsilon_0\sqrt{5}})$	4	4	4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	Théorème 5.18
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3\varepsilon_0\sqrt{5}})$	4	4	4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	Théorème 5.19

Acknowledgment. This work is partially supported by the Academy Hassan II of Sciences and Technology (Morocco) and URAC 6. Nous remercions le rfr de cet article pour ses remarques et ses suggestions prcieuses.

References

[1] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, thse.* C.R.A.S. Paris, t. **325**, srie I, (1997), 127-130.

[2] A. Azizi, *Units de certains corps de nombres imaginaires et abliens sur $\mathbb{Q}$,* Ann. Sci. Math. Qubec **23** (1999), 87-93.

[3] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$,* Acta Arithmetica **94** (2000), 383-399.

[4] A. Azizi, *Sur une question de Capitulation,* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 2197-2002.

[5] A. Azizi, *Sur les units de certains corps de nombres de degr 8 sur $\mathbb{Q}$,* Ann. Sci. Math. Qubec **29** (2005), 111-129.

[6] A. Azizi et M. Talbi, *Capitulation des 2-classes d'idaux de certains corps biquadratiques cycliques,* Acta Arithmetica **127** (2007), 231-248.

[7] A. Azizi et M. Talbi, *Capitulation dans certaines extensions non ramifies de corps quartiques cycliques* , Arch. Math., Brno **44** (2008), 271-284.

[8] E. Brown and C. J. Parry, *The* 2*-class group of certain biquadratic number fields I,* J. reine und angew, Math. **295** (1977), 61-71.

[9] E. Brown and C. J. Parry, *The* 2*-class group of certain biquadratic number fields II,* Pacific Journal of Mathematics, Vol. **78**, **No**. 1, (1978), 11-26.

[10] P. E. Conner and J. Hurrelbrink, *Class number parity,* Series in Pure Mathematic, World Scientific, (1988).

[11] G. Gras, *Sur les l-classes d'idaux dans les extensions cycliques relatives de degr premier l,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, tome 23, (1973).

[12] H. Hasse, *Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols,* J. Reine Angew. Math. **162** (1930), 134-143.

[13] F. P. Heider, B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen,* J. Reine Angew. Math. **366** (1982), 1-25.

[14] M. Ishida, *The genus fields of algebraic number fields,* Lecture notes in mathematics 555, Springer-Verlag (1976)

[15] P. Kaplan, *Sur le* 2*-groupe des classes d'idaux des corps quadratiques,* J. Reine Angew. Math. **283/284** (1976), 313-363.

[16] H. Kisilevsky, *number fields with class number congruent to* 4 *modulo* 8 *and Hilbert's theorem* 94*,* J. Number Theory **8** (1976), 271-279.

[17] T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper,* Nagoya Math. J. **10** (1956), 65-85.

[18] R. Kučera, *On the parity of the class number of biquadratic field,* J. Number Theory **52** (1995), 43-52.

[19] S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Zahlkörper,* J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I, **4** (1943), 383-406.

[20] F. Lemmermeyer, *Kuroda's class number formula,* Acta Arith. **66** (3) (1994), 245-260.

[21] T. M. McCall, C. J. Parry and R. R. Ranalli *Imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic* 2*-class group,* Journal of Number Theory **53** (1995), 88-99.

[22] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields,* Tokyo U. Fac. of Sc. J., Serie I, **13** (1966), 201-209

[23] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields,* Graduate texts in mathematics **83** (1996).

Université Mohamed I, Département de Mathématiques et Informatique, Laboratoire ACSA, Faculté des Sciences, Oujda,
Maroc
e-mail:abdelmalekazizi@yahoo.fr

Université Mohamed I, Département de Mathématiques et Informatique, Laboratoire ACSA, Faculté des Sciences, Oujda,
Maroc
e-mail:talbimm@yahoo.fr