Applied Sciences * Monographs # 10**

Mohamed Badr BENBOUBKER

On Some Quasilinear Elliptic Nonhomogeneous Problems of Dirichlet or Neumann Type (in French)

[Sur certains problèmes elliptiques quasilinéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann]

Ph.D. Thesis, Sidi Mohamed Ben Abdellah University, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz, Fès, Morrocco.

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

= 2014 =

On Some Quasilinear Elliptic Nonhomogeneous Problems of Dirichlet or Neumann Type

[Sur certains problèmes elliptiques quasilinéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann] (in French)

APPS Monographs # 10

On Some Quasilinear Elliptic Nonhomogeneous Problems of Dirichlet or Neumann Type

[***Sur certains problèmes elliptiques quasilinéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann***] **(in French)**

Mohamed Badr BENBOUBKER

Bucharest: Applied Sciences * Monographs, 2014

Includes bibliographical references, 133 pp.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès
Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications

THÈSE

Prèsentée par

Mohamed Badr BENBOUBKER

Pour l'obtention de

Doctorat en Mathématiques

Spécialité : Equations aux Dérivées Partielles

****

SUR CERTAINS PROBLÈMES ELLIPTIQUES QUASILINÉAIRES NON HOMOGÈNES DE TYPE DIRICHLET OU NEUMANN

****

Thèse soutenue publiquement le **27 Juin 2013**,

devant le jury composé de

Pr. Abdelfattah Touzani	*Faculté des Sciences Dhar El Mahraz. Fès*	Président
Pr. Fatima Ezzaki	*Faculté des Sciences et Techniques. Fès*	Rapporteur
Pr. Hicham Redwane	*Université Hassan premier. Settat*	Rapporteur
Pr. Stanislas Ouaro	*Université Ouaga II. Burkina Faso*	Rapporteur
Pr. Mohamed Rhoudaf	*Faculté des Sciences et Techniques. Tanger*	Examinateur
Pr. Hassan Chaabi	*Faculté des Sciences. Meknès*	Examinateur
Pr. Mohamed El Fatini	*Faculté des Sciences. Kénitra*	Examinateur
Pr. Brahim Marzouki	*Faculté des Sciences. Oujda*	Examinateur
Pr. Elhoussine Azroul	*Faculté des Sciences Dhar El Mahraz. Fès*	Directeur de thèse

Dédicace

A mes très chers parents : Nadia Et Mohamed Fouad

A mes très chers grands-parents : Rabiaa et Abdellatif

A la mémoire de mes grands-parents : Meriem et Mhamed

Ce travail qui vous est dédié aujourd'hui n'est que le fruit de vos efforts continus. Votre affection et vos sacrifices ont représenté, pour moi, un soutien infaillible aux moments les plus difficiles.

Rien au monde ne pourrait compenser les sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et mon bien être.

A mon frère Hamza, ma soeur Fatima Zahra, son mari Youssef et ma très chère nièce Kenza :

Aucune expression ne saurait vous exprimer mes sentiments chaleureux.

Veuillez trouvez ici un bien modeste témoignage de ma profonde admiration et gratitude.

A tout membre de ma famille : Benboubker, Iraqi, Belkhayat, Kettani, Hjiaj, Squalli, Mikou, Harti, Filali, Benkirane, Laklalech...

Je vous remercie pour votre soutien,votre amour et votre affection qui me donne la force pour affronter les difficultés.

Remerciements

Au terme des quatres années de travail dont cette thèse marque l'accomplissement, je tiens à remercier toutes celles et tous ceux sans lesquels elle aurait été mission impossible.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Elhoussine AZROUL d'avoir accepté d'encadrer cette thèse ainsi que pour son enthousiasme, permanente source de motivation. Je le remercie aussi vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.

Je remercie ensuite Monsieur Mohamed RHOUDAF de l'Université Abdelmalek Essaadi et Monsieur Stanislas OUARO Président de l'Université Ouaga II (Burkina Faso) pour leur disponibilité, les échanges édifiants et les idées enrichissantes de nos multiples discussions, qui m'ont accompagné durant cette thèse.

Je remercie Monsieur Abdelmoujib BENKIRANE directeur du laboratoire (LAMA) un éminent spécialiste des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Celui-ci par ses cours de Licence et de Master ont joué un rôle considérable pour l'amour actuel que j'ai pour les EDP.

Je remercie chaleureusement l'homme de fer, le professeur, Monsieur Abdelfattah TOUZANI d'avoir accepté de présider mon jury.

Je suis très honoré que les professeurs Hassan CHAABI, Mohamed EL FATINI et Brahim MARZOUKI, aient accepté de faire partie de mon jury. C'est également un très grand honneur d'avoir comme membre du jury les professeurs Fatima EZZAKI et Hicham REDWANE, dont la gentillesse n'a d'égal que leurs immenses compétences mathématiques.

Merci à tous les membres du Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications (LAMA), qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions. Je remercie en particulier Madame Mekhtaria, les professeurs Jawad BENNOUNA, Abdelaziz TAJMOUATI et Youssef AKDIM.

Merci à Monsieur Alain MIRANVILLE et au Staff du laboratoire LMA de Poitiers pour toutes les facilités dont j'ai bénéficié pour mon séjour à Poitiers qui ont énormément contribué à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements vont amicalement à l'endroit de tous mes amis et collègues qu'ils soient matheux ou non : Sonia Abdelmoumni, Hassan Hjiaj, Meryem El Lekhlifi, Abdou Mohammed Housseine, Chihab Yazough, Yasser Alami, Mohamed Bennani, Abdellah El Fazziki, Faris Jdidi, Fouad El Mrabet, Nihad Daoudi, Mohameden Ould Mohamedhen Val, Mohamed Mekouar, Mohamed Idrissi Bedraoui, Mostapha El Moumni, Abdelkrim Barbara, Houssam Chrayteh, Abdelhak Boulaalam, Youssef Allioui, Othman.

Je souhaite bon courage aux actuels thésards qui commencent à entrevoir le bout du tunnel !

" Rendre clair l'obscur et simple le complexe "

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi,

Kitab al-muhtasar Hisab al-Jabr w'al-Muqabala,

Bagdad, début du IX ème siècle.

Les mathématiques sont une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, et où l'on ne sait jamais si ce que l'on dit est vrai. **Bertrand Russel**

Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenté d'innover.

Un problème sans solution est un problème mal posé. **Albert Einstein**

" Les mathématiques sont une science pour bien comprendre le monde "

Mohamed Badr Benboubker

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$.

$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω.

$d\sigma$: mesure de surface sur $\partial\Omega$, notée aussi $\mathcal{H}^{N-1}$.

∇u : gradient de u.

$supp(f)$: support d'une fonction f.

f^+ : $\max(f, 0)$, f^- : $\min(f, 0)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}_+(\Omega)$: espace des fonctions positives de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{C}_0(\Omega)$: espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω.

$\mathcal{M}_b(\Omega)$: espace des mesures de Radon bornées.

$\mathcal{M}_b^p(\Omega)$: espace des mesures de Radon bornées ne chargeant pas les ensembles de capacité nulle.

T_k : fonction troncature de niveau $k > 0$.

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure dx.

$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$.

$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$: espace de traces de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$.

$\mathcal{T}^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable : $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega), \forall k > 0\}$.

$\mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable : $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0\}$.

Soit $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]$ une fonction mesurable.

$L^{p(.)}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable : $\int_\Omega |u|^{p(x)} dx < +\infty\}$.

$\|u\|_{p(.)} := \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\}.$
$W^{1,p(.)}(\Omega) = \{u \in L^{p(.)}(\Omega); \nabla u \in (L^{p(.)}(\Omega))^N\}.$
$\|u\|_{1,p(.)} := \|u\|_{p(.)} + \|\nabla u\|_{p(.)}.$
$\rho_{p(.)}(u) = \int_\Omega |u|^{p(x)} dx$: module convexe.
$\rho_{1,p(.)}(u) = \int_\Omega |u|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx.$
$W_0^{1,p(.)}(\Omega)$: fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(.)}(\Omega)$.
$\mathcal{T}^{1,p(.)}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow I\!R$ mesurable : $T_k(u) \in W^{1,p(.)}(\Omega), \forall k > 0\}.$
$\mathcal{T}_0^{1,p(.)}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow I\!R$ mesurable : $T_k(u) \in W_0^{1,p(.)}(\Omega), \forall k > 0\}.$

Sur certains problèmes elliptiques quasilinéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann

Résumé : Les travaux présentés dans cette thèse, portent sur l'étude de quelques équations aux dérivées partielles quasilinéaires de type Dirichlet et Neumann. L'originalité dans ce travail, consiste en la présence d'une classe d'opérateurs étudiés, permettant de mettre en apparence le cadre fonctionnel des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable. La première partie concerne l'étude des problèmes de Dirichlet associés à des opérateurs elliptiques de type Leray-Lions. La seconde partie concerne l'étude des problèmes aux limites de Neumann impliquant un type d'opérateur p-Laplacien plus généralisé. Après une introduction, un bref exposé de quelques définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail, nous établissons dans le chapitre 2 un résultat d'existence de solutions pour un problème quasilinéaire elliptique en utilisant la théorie classique de Lions sur les opérateurs du type calcul des variations. Dans les chapitres 3 et 4, nous étudions les questions d'existence de solutions entropiques pour deux problèmes elliptiques. Dans le chapitre 5 nous nous intéressons à l'étude d'un problème d'obstacle en nous basant sur une approximation double afin de prouver le résultat d'existence. Dans la deuxième partie, le type de problème que nous abordons est un problème avec condition de Neumann sur le bord. Dans cet axe, nous présentons un résultat d'existence de solutions entropiques pour un problème elliptique.

Mots clés : Espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable, problème elliptique, donnée mesure, solution entropique, problème de Dirichlet, problème de Neumann.

AMS classification : 35D35, 35J60, 35J62, 35J65, 46E35.

On Some Quasilinear Elliptic Nonhomogeneous Problems of Dirichlet or Neumann Type

Abstract. The work presented in this thesis focuses on the study of some quasilinear partial differential equations with Dirichlet and Neumann type. The originality of this work consists of the presence of a class of studied operators allowing to look the importance of the functional framework involves Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent. The first part concerns the study of Dirichlet problems associated with Leray-Lions type elliptic operators. The second part concerns the study of Neumann boundary value problems involving a more generalized p-Laplacian operator. After the introduction and a brief presentation of some definitions and results necessary for the continuation of this work, we establish in Chapter 2 an existence result for a quasilinear elliptic problem by using a classical theorem of Lions on operators of the calculus of variations. In Chapters 3 and 4, we study the existence of an entropy solution for two elliptic problems. In Chapter 5 we are interested on the study of an obstacle problem based on a dual approximation to prove the existence result. The second part of problems that we discuss in this thesis are problems with Neumann boundary conditions. In this axis, we present an existence result of entropy solution for an elliptic problem.

Keywors : Lebesgue and Sobolev Spaces with variable exponent, elliptic problem, measure data, entropy solution, Dirichlet problem, Neumann problem.

AMS classification : 35D35, 35J60, 35J62, 35J65, 46E35.

Table des matières

Introduction Générale

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires ou par des Equations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

Les EDPs sont probablement apparues pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDPs s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDPs de la théorie de la relativité.

Cependant, l'étude systématique des EDPs est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est dû à Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDPs reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs, ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse.

L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

Par ailleurs, les travaux présentés dans cette thèse concernent quelques équations aux dérivées partielles du type elliptique faisant intervenir l'opérateur divergentiel

$$Au = -\text{div } a(x, u, \nabla u),$$

où $a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory, c'est à dire que pour tout (x, s, ξ) appartenant à $\Omega \times I\!R \times I\!R^N$, $a(x, s, \xi)$ est mesurable en $x \in I\!R^N$ pour tout $s \in I\!R$ et $\xi \in I\!R^N$ et continue en $\xi \in I\!R^N$ et $s \in I\!R$ pour presque tout $x \in \Omega$ et a vérifie aussi les hypothèses de type Leray-Lions [47].

Illustrons tout d'abord quelques difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de ces équations en considérant le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\text{div } a(x, \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $I\!R^N$ $(N \geq 2)$.
On se limite au cas où $1 < p < N$ car dans le cas $p > N$, on a l'inclusion $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ qui donne $(\mathcal{C}^0(\Omega))' \subset (W_0^{1,p}(\Omega))'$. Comme $(\mathcal{C}^0(\Omega))' = \mathcal{M}(\Omega)$, les mesures sont alors des éléments de $W^{-1,p'}(\Omega)$ et on est alors dans le cadre variationnel habituel.

Dans le cas $p > 2 - \frac{1}{N}$ avec f une mesure de Radon, Boccardo et Gallouët [23] montrent que la solution faible du problème (1) est dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ où $1 < q < p^* = \frac{N(p-1)}{N-1}$. Or, quand p est proche de 1, précisement pour $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$, p^* est inférieur ou égal à 1. Il est donc hors de question que la solution appartienne à l'espace $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, puisque le gradient de u au sens usuel n'existe pas et il n'est plus clair dans quel sens il faut résoudre le problème (1).

Pour surmonter cette difficulté, Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez ont introduit dans [21] un nouvel espace $\mathcal{T}_{loc}^{1,1}(\Omega)$ (qui est une extension de l'espace de Sobolev $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$) dans lequel on peut donner un sens au gradient de u, qui n'est pas en général localement intégrable. L'idée consiste à considérer la troncature $T_k(u)$ de la solution u et à travailler avec la dérivée $\nabla T_k(u)$ (qui est localement intégrable) au lieu de ∇u.

Une autre difficulté concerne l'unicité des solutions. Prignet [63] montre que, même dans le cas linéaire $a(x, \nabla u) = A(x)\nabla u$ où $A(x)$ est une matrice uniformément coercive et bornée, il n'y a pas en général unicité des solutions faibles du problème (1) dans l'espace $W_0^{1,1}(\Omega)$.

La notion de solution faible ne suffit donc pas à déterminer la solution physique observée car elle n'est pas unique. Il apparaît alors nécessaire de trouver un critère d'origine physique qui permet de sélectionner parmi toutes les solutions faibles, la solution physiquement admissible (celle qui est la plus proche de la solution physique) et qui permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité. Pour remédier à cela, trois approches ont été utilisées :

Dall'Aglio [31] a montré que, même pour un problème non-linéaire, la méthode par approximation conduit à une unique solution appelée SOLA (Solution Obtenue comme Limite d'Approximations).

Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez [21] définissent la notion de solution entropique (ici $p > 2 - 1/N$ pour simplifier) : Par exemple, pour le problème elliptique (1) la solution entropique u est une fonction mesurable sur Ω vérifiant

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0 \text{ et} \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_\Omega f T_k(u - \varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

où T_k est la fonction troncature au niveau k.
Enfin, Lions et Murat [50, 53] ont introduit une autre notion : celle de solution renormalisée (suite aux solutions du même nom, dûes à DiPerna et Lions, pour l'équation de Boltzmann). Elle vérifie (ici aussi, $p > 2 - 1/N$ pour simplifier) : la

solution renormalisée du problème (1) est définie par

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \lim\limits_{h\to+\infty} \displaystyle\int_{\{h\leq|u|\leq h+k\}} |\nabla u|^p = 0 \quad \forall k > 0 \text{ et} \\ \displaystyle\int_\Omega S(u)a(x,\nabla u)\nabla\varphi + \int_\Omega S'(u)\varphi a(x,\nabla u)\nabla u = \int_\Omega fS(u)\varphi \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

pour toute fonction régulière S à support compact.

D'autre part, en supposant vraies les hypothèses de Leray-Lions classiques sur a dans une partie Ω_1 de Ω avec un exposant p_1 et sur le complémentaire de Ω_1 avec un exposant p_2, l'étude devient très délicate pour définir l'espace dans lequel se trouvera la solution lorsque $p_1 \neq p_2$.

D'où la nécessité d'avoir une puissance variable dans les hypothèses de type Leray-Lions et donc de définir des espaces fonctionnels s'adaptant à cette situation (cf. [45]).

Sur ces espaces [35] il a été publié environ 15 articles avant 2000, environ 30 entre 2000 et 2004, environ 200 entre 2005 et 2010. Ces chiffres illustrent bien un regain d'intérêt pour ces types d'espaces dont l'étude avait été initiée en 1931 par Orlicz (cf. [62]).

Cette thèse qui a pour objectif de contribuer à l'étude de problèmes elliptiques avec des conditions au bord de type Dirichlet ou Neumann dans les espaces de Sobolev généralisés avec des données L^1 ou mesure, est composée de six chapitres. Nous allons présenter ici des résultats d'existence de solutions pour cinq problèmes non linéaires. Après avoir construit le point clé de notre étude "la motivation", nous allons présenter ici d'une manière détaillée le contenu de chacun d'eux.

Motivation

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) ont été largement utilisées dans le traitement des images dans ces dernières années. Des exemples incluent la morphologie mathématique, la segmentation d'images et la restauration d'images. D'où on assiste depuis quelques temps à un regain d'intérêt pour un certain nombre de problèmes liés au domaine du traitement d'images. Ce regain d'intérêt s'accompagne d'un renouveau de la problématique et se trouve concrétisé par l'émergence d'un nombre croissant de conférences internationales de qualité et à fort taux de participation dans ce domaine.

En étudiant les articles les plus récents qui illustrent cette nouvelle tendance, il s'avère qu'une grande partie de ces techniques nécessite l'utilisation d'équations aux dérivées partielles (EDPs). Si les scientifiques numériciens de la discipline de la mécanique des fluides, qui en font largement usage, connaissent déjà la puissance de tels outils, il faut dire toutefois que ce n'est que très récemment que l'emploi des EDPs en traitement d'image et en vision par ordinateur s'est concrétisé.

Les approches à base d'EDPs ont, en effet, pour intérêt qu'elles permettent d'obtenir dans de nombreux cas, des résultats d'existence et d'unicité pour la solution recherchée, et qu'elles peuvent se mettre en oeuvre à l'aide de puissants schémas numériques très étudiés à ce jour dans le domaine de la mécanique des fluides.

Classiquement, en restauration d'images à travers les EDPs, une image plane est modélisée par une surface constituée d'un ensemble discret de points (pixels). En considérant l'intensité en niveaux de gris (la luminance) comme une fonction des coordonnées spatiales (x, y) et du temps t, les propriétés de l'image restaurée que l'on cherche à obtenir sont obtenues par l'intermédiaire d'une EDP ayant comme arguments la fonction luminance et ses dérivées partielles ; la solution de cette EDP, à un certain instant t, représente l'image restaurée.

Ce chapitre constitut un état de l'art sur l'utilisation des EDPs dans le domaine du traitement des images. Nous allons présenter le modèle récemment proposé par Chen, Levine et Rao [30] où ils montrent l'intérêt dans la restauration d'images par les EDPs avec des puissances variables dans l'intervalle $[1, 2]$.

Pour comprendre le rôle de l'exposant variable dans le problème de la restauration d'images, nous rappelons brièvement certaines idées classiques des formulations variationnelles du lissage isotrope et de la variation totale impliquant des intégrales variationnelles de la forme :

$$\min \int_\Omega F(x, u, \nabla u). \tag{2}$$

Chambolle et Lions [29] ont proposé un modèle pour récupérer une image u, à partir d'une image observée I corrompue par un bruit additif $I = u + bruit$ par

$$\min \int_\Omega F(\nabla u) + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2,$$

où

$$F(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\beta}|r|^2 & \text{si } |r| \leq \beta, \\ |r| - \frac{1}{2\beta} & \text{si } |r| > \beta. \end{cases} \tag{3}$$

La diffusion de ce modèle de minimisation est strictement perpendiculaire au gradient lorsque $|\nabla u| > \beta$, où les contours sont susceptibles d'être présents et isotrope lorsque $|\nabla u| \leq \beta$. D'où, le modèle conserve les contours et élimine le bruit.

En outre, pour l'approche de la variation totale (TV) introduite par Rudin, Osher et Fatemi [65], on minimise l'énergie

$$\min \int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2, \tag{4}$$

avec $p = 1$, où λ est un paramètre indiquant la force du lissage. Cette méthode fait un bon travail de préservation des contours, mais malheureusement, elle ne conserve pas que les contours, elle crée également des faux contours où il n'y avait aucun dans l'image d'origine (que l'on appelle staircasing effect ou l'effet d'escalier). Une autre méthode est celle du lissage isotrope pour $p = 2$, il résout le problème de staircasing, mais malheureusement, ce lissage ne préserve ni les contours ni les petits détails de l'image. L'image restaurée perd certes son aspect bruitée, mais paraît trés floue. Cette procédure n'est pas très utile. Le premier problème de minimisation est résolu dans l'espace de fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$, tandis que le second est naturellement résolu dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. Comme nous souhaitons exploiter les avantages de ces deux approches, il est naturel d'améliorer le problème de minimisation (4) pour un exposant $p \equiv p(x)$ qui varie dans l'intervalle $[1, 2]$. C'est le point de départ du modèle proposé dans [30] par Chen, Levine et Rao

$$\min \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2. \tag{5}$$

En particulier, ils ont considéré le problème de minimisation (2) avec

$$F(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)}|r|^{q(x)} & \text{si } |r| \leq \beta, \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} & \text{si } |r| > \beta, \end{cases} \tag{6}$$

où $\beta > 0$ est fixé et $1 < \alpha \leq q(x) \leq 2$.
On peut choisir

$$q(x) = 1 + \frac{1}{1 + k|\nabla G_\sigma * I|^2}$$

où $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{|x|^2}{4\sigma^2})$ est le filtre Gaussien et $k, \sigma > 0$ sont fixés.
Ce modèle utilise plus de souplesse, certes la modification de la puissance du ∇u pour une fonction $p(x)$ qui dépend de ∇u nous permet de mieux contrôler le type de diffusion à chaque endroit dans l'image. Par exemple, il assure l'approche variation totale où le gradient est élevé (préservant ainsi les contours) et le lissage L^2 où le gradient est faible (ce qui élimine le bruit), et de manière anisotrope ($1 < p < 2$) dans les régions qui peuvent être lissées par morceaux ou dans lesquelles la différence entre le bruit et les contours est difficile à distinguer.

Rappels et Définitions

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Après avoir rappelé quelques résultats de base sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev classiques, nous abordons l'étude de quelques propriétés des espaces de Lebesgue et de Sobolev généralisés. La première étude fut l'oeuvre de Orlicz (cf. [62]) qui a introduit dès 1931 les espaces de Lebesgue généralisés $L^{p(x)}$. Dans les années 1950, l'étude de tels espaces prend de l'ampleur

avec les travaux de Nakano (cf. [56]). Par la suite, Kovacik et Rakosnik (cf. [45]) en 1991 ont approfondi l'analyse fonctionnelle des espaces de Lebesgue et de Sobolev à puissances variables. Ils montrent dans leurs travaux que les espaces de Lebesgue et de Sobolev à puissances constantes et ceux à puissances variables ont plusieurs propriétés communes, exceptée une : la notion de continuité. En effet l'espace $L^{p(x)}$ ($p(x)$ non constant) n'est pas stable par translation.
Nous présentons également d'autres types d'espaces fonctionnels : ce sont les espaces $\mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$ qui sont d'une grande utilité dans l'étude des solutions dites entropiques.
Nous terminons ce chapitre en énnonçant quelques résultats classiques d'intégrations (Théorème de convergence dominée de Lebesgue, Lemme de Fatou, Théorème de Vitali,...), et quelques propriétés des opérateurs monotones.

Etude de problèmes elliptiques quasilinéaires

Ce chapitre concerne l'étude d'existence de solutions du problème :

$$\begin{cases} Au = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $I\!R^N$ $(N \geq 2)$, $p \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ et $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$.
A est un opérateur de type Leray-Lions défini de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ par la formule :

$$Au = -\text{div}(a(x,u,\nabla u)); \tag{7}$$

$f : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance :

$$|f(x,r,\xi)| \leq g(x) + |r|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)}, \tag{8}$$

où $0 \leq \eta(x) < p(x) - 1$ et $0 \leq \delta(x) < (p(x)-1)/p'(x)$.
Ce problème a été étudié dans le cas de l'exposant classique par Boccardo, Murat et Puel dans [25], où f satisfait la condition

$$|f(x,r,\xi)| \leq h(|r|)(1 + |\xi|^p), \tag{9}$$

et h est une fonction croissante de $I\!R^+ \to I\!R^+$.

Kao et Tsai [42], ont montré l'existence de solutions sous la condition de croissance

$$|f(x,r,\xi)| \leq C(1+|r|^{\delta}+|\xi|^{p}).$$

Cependant, on peut même citer la travail de Fan et Zhang [37], où ils ont étudié le cas particulier

$$\begin{cases} -\text{div }(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) & = f(x,u) \quad x\in\Omega \\ u & = 0 \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f satisfait la condition de croissance

$$|f(x,r)| \leq C_1 + C_2|r|^{\beta(x)-1},$$

avec $1 \leq \beta < p^- := \text{ess} \inf_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$.

Rappelons que dans ce chapitre, le travail présenté peut être vu comme une généralisation de [37], [42] et [25] dans le sens que dans le 1er travail les auteurs ont considéré $Au = -\triangle_{p(x)}u$, $f = f(x,u)$, par la suite dans les deux derniers travaux ils ont pris $p = p(x)$. En outre, les résultats sont obtenus en utilisant un théorème classique de J. L. Lions [48] sur les opérateurs du type calcul des variations.

Etude d'un problème elliptique avec second membre mesure

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions entropiques du problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div }(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

où Ω est un domaine borné de $I\!R^N$ $(N \geq 2)$, la donnée μ est une mesure qui se décompose dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

En outre, la notion de donnée mesure pouvant être décomposée dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ est vérifiée par Boccardo, Gallouët et Orsina dans le cas de p constant

(voir[27]). Dans ce contexte ils ont considéré comme une mesure signée μ qui ne charge pas les ensembles de p-capacité nulle, plus precisément toute mesure qui ne charge pas les ensembles de p-capacité nulle peut être décomposée comme une fonction de $L^1(\Omega)$ et un élément dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ (l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$), et inversement, toute mesure signée dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ est de mesure zéro pour les ensembles de p-capacité nulle. Dans le cas de l'exposant variable, en utilisant les mêmes arguments que dans [27], nous nous basons sur le résultat de décomposition fait par Nyanquini, Ouaro et Soma [57]. En ce qui concerne les capacités à puissance variable, (voir [41, 57]).
Dans ce chapitre, on montre l'existence de la solution entropique du problème (10) dans le cas d'une puissance variable et d'une donnée mesure.

Etude de problèmes elliptiques fortement non linéaire avec second membre mesure

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

pour une donnée mesure μ qui admet une décomposition dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. Notons que $g(x,s,\xi)$ est un terme non-linéaire qui satisfait une condition de croissance par rapport à ξ et non par rapport à s, mais il satisfait une condition de signe par rapport à s.
Dans ce même axe, le problème étudié dans ce chapitre est une généralisation du problème étudié au chapitre 2, plus précisément étendre les résultats pour $a(x,s,\xi) = |\xi|^{p(x)-2}\xi$ et $g(x,u,\nabla u) = |u|^{p(x)-2}u$.

Etude de problèmes d'obstacle liés à un problème elliptique non linéaire

Dans ce chapitre, nous traitons le problème d'obstacle associé à l'équation elliptique quasi-linéaire suivante :

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = f \in L^1(\Omega), \tag{12}$$

Nous démontrons le résultat d'existence de la solution entropique sous l'hypothèse où g est de signe constant.

Récemment, certains travaux sont parus dans le cas de problèmes d'obstacle avec un exposant variable. Voir ([61],[64]) pour l'existence et l'unicité de la solution entropique, dans le cadre de l'inégalité de Lewy-Stampacchia et [36] pour le traitement des problèmes d'obstacle simple ou double associés aux équations elliptiques quasi-linéaires de la forme

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = 0, \tag{13}$$

avec des conditions non standard. L'étude du problème d'obstacle (12) dans le cas p constant a été fait dans [16] où les auteurs obtiennent dans le cadre des espaces de Orlicz-Sobolev une solution pour une donnée $f \in L^1(\Omega)$. Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au problème d'obstacle associé à l'équation (12), où les techniques utilisées pour étudier ce problème sont basées sur le problèmes approché suivant,

$$(\mathcal{P}_\epsilon)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon)) + g_\epsilon(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon) & = f_\epsilon \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $g_\epsilon(x,s,\xi) = \dfrac{g(x,s,\xi)}{1+\epsilon|g(x,s,\xi)|}$ et f_ϵ est une suite de fonctions régulières.
Cependant, cette approximation ne nous permet pas d'obtenir des estimations a priori pour notre cas, cela est dû au fait que $u_\epsilon g_\epsilon(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon)$ n'a pas un signe constant.

Pour surmonter cette difficulté, on introduit une approximation double ; c'est ainsi que nous pénalisons le problème $(\mathcal{P}_\epsilon)$ par,

$$(\mathcal{P}_\epsilon^\sigma)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)) + g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma) \; - \dfrac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma^-})|^{p(x)-1} & = f_\epsilon \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon^\sigma & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $g_\epsilon^\sigma(x,s,\xi) = \delta_\sigma(s) g_\epsilon(x,s,\xi)$ et $\delta_\sigma(s)$, est une fonction Lipschitzienne croissante.

Etude de problèmes elliptiques nonlinéaires avec des conditions au bord de Neumann

Dans ce chapitre, nous étudions une classe de problèmes $p(x)$-Laplace non-linéaires avec des conditions de Neumann non homogènes sur le bord et des données L^1 de la forme

$$\begin{cases} -\text{div } \Phi(\nabla u - \Theta(u)) + |u|^{p(x)-2}u + \alpha(u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \\ (\Phi(\nabla u - \Theta(u)).\eta + \gamma(u) = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

avec

$$\Phi(\xi) = |\xi|^{p(x)-2}\xi, \quad \forall \xi \in I\!R^N,$$

où $\Omega \subseteq I\!R^N (N \geq 3)$ est un domaine borné de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, η est la normale unitaire à $\partial\Omega$, α, γ, Θ sont des fonctions réelles définies sur $I\!R$ ou $I\!R^N$, $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.
Les problèmes avec conditions au bord de Neumann et avec second membre dans L^1 été étudiés dans [59, 58, 60] où les différents auteurs montrent l'existence et l'unicité de la solution entropique. Dans ces papiers, ils ont considéré un opérateur de type Leray- lions, qui leur permet d'exploiter la condition de croissance, de coercivité et de monotonie de l'opérateur pour obtenir leur résultats. Par contre, dans notre cas, en raison du terme Θ, nous n'avons pas ces conditions et nous ne pouvons pas faire appel aux techniques dans [59, 58, 60] pour montrer l'existence de solutions. Aussi, nous ne pouvons pas avoir l'unicité de cette solution. Pour surmonter cette difficulté, nous supposons que Θ est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz satisfait une condition reliée à l'exposant.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

Dans ce chapitre, nous collectons plusieurs outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Le lien commun entre tous les résultats de ce chapitre, c'est qu'ils sont préparatoires pour les principaux résultats, qui sont contenues dans les chapitres suivants. Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $I\!R^N$ et nous utiliserons la mesure de Lesbegue.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue et Sobolev classiques

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [43] et de Brezis [28], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra aussi voir Adams [2].
Soit Ω un domaine ouvert de $I\!R^N$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans Ω.
Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow I\!R \text{ mesurable; } \int_\Omega |u|^p dx < +\infty \right\}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour en faire un espace de Banach.

Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{u : \Omega \longrightarrow I\!R \text{ mesurable; } \operatorname{ess-sup}_\Omega |u| < +\infty\Big\},$$

avec

$$\operatorname{ess-sup}_\Omega |u| = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante : $\|u\|_\infty = \operatorname{ess-sup}_\Omega |u|$.

$L^p(\Omega)$ est reflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

$L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif, son dual est $L^\infty(\Omega)$ par contre le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\},$$

qui, munit de la norme

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{1,\infty} = \max(\|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty).$$

On note pour $1 \leq p < +\infty$, $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

Comme pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))', \quad \Big(p' = \frac{p}{p-1}\Big).$$

Dans la manipulation des espaces de Sobolev, très souvent on fait appel à certaines injections dites de Sobolev. Nous rappelons une de ces injections donnée par le Théorème de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.1.1 ***Rellich-Kondrachov*** *[28]*
On suppose Ω *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et* $p < N$. *Alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\ ,\ \forall q \in [1, p^*[\ \text{où}\ p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty)$.

Traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$
On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.2 *Soient* Ω *un ouvert régulier de* $I\!R^N$ $1 \leq p \leq \infty$. *Il existe un opérateur linéaire continu* $\tau : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$, *appelé opérateur trace, tel que*

$$\tau : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)\ \text{est compact.}$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ *on définit l'espace vectoriel* $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ *comme suit :*

$$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) = \{\tau(u); u \in W^{1,p}(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{p'},p} = \inf\{\|u\|_{1,p}; \tau(u) = f\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et très utiles pour nous sont les suivantes :
- *si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors* $\tau : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ *est linéaire surjectif et*

$$\|\tau(u)\|_{\frac{1}{p'},p} \leq C\|u\|_{1,p}.$$

- *Comme* Ω *est régulier, toute fonction* $u \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ *est la trace d'une fonction* $\widehat{u} \in W_0^{1,p}(G)$, *i.e.* $\widehat{u}_{|\partial\Omega} = u$ *où* G *est un ouvert de* $I\!R^N$ *contenant* $\overline{\Omega}$.

Pour plus de détails concernant les espaces traces, voir C. B. Jr. Morrey [52], J. Nečas [54], J. L. Lions et E. Magenes [49].

1.1.2 Espaces de Lebesgue et de Sobolev généralisés

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable (voir par exemple [45], [38] , [39], [33],

[34] pour les démonstrations et plus de détails et [55] pour la théorie générale des espaces d'Orlicz).

Pour un ouvert $\Omega \subset I\!R^N$, soit $p(x) : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]$ une fonction mesurable, appelée l'exposant variable. Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) = \{p | p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}),\ p(x) > 1 \text{ pour tout } \ x \in \bar{\Omega}\},$$

et

$$p^- := ess \inf_{x\in\Omega} p(x),\ p^+ := ess \sup_{x\in\Omega} p(x).$$

Pour deux fonctions mesurables bornées $p(.), q(.) : \Omega \to I\!R$, on a

$$q(.) \ll p(.) \quad \text{si } (p-q)^- > 0.$$

On définit l'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$, appelé aussi espace de Lebesque à exposant variable, comme l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow I\!R$ pour lesquelles le module convexe

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u|^{p(x)} dx$$

est fini.

Si $p^+ < +\infty$, alors l'expression

$$\|u\|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\},$$

définit une norme dans $L^{p(x)}(\Omega)$, appelée la norme de Luxembourg.

L'espace $(L^{p(x)}(\Omega), \|u\|_{p(x)})$ est un espace de Banach et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$. De plus, si $p^- > 1$, $L^{p(x)}(\Omega)$ est uniformément convexe donc réflexif et son dual est isomorphe à $L^{p'(x)}(\Omega)$, où $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$.

On a aussi l'inégalité suivante appelée inégalité de type Hölder :

$$\left|\int_\Omega uvd\,x\right| \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}$$

pour tous $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$.

On définit à présent l'espace de Sobolev généralisé aussi appelé espace de Sobolev à exposant variable

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega); \nabla u \in (L^{p(x)}(\Omega))^N\}$$

qui, munit de la norme

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$$

est un espace de Banach.

L'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Soit $p \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, $p^- \geq 1$ et $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)},$$

où C dépend de $p(x)$ et Ω.

En particulier, si $p^- > 1$, l'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif. Son espace dual est noté par $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

Dans l'écriture des formulations variationnelles apparaît en général le module convexe $\rho_{p(x)}$, ce qui nous amène à énoncer le résultat important suivant (cf. [39]) :

Proposition 1.1.1 *Si $u_n, u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $p^+ < +\infty$, les relations suivantes sont vraies :*

(i) $\|u\|_{p(x)} < 1 \quad (resp, = 1, > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 \quad (resp, = 1, > 1)$,

(ii) $\|u\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \quad \|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$,

(iii) $\|u\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \quad \|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$,

(iv) $\|u_n\|_{p(x)} \to 0$ *(respectivement* $\to +\infty$*)* $\Leftrightarrow$ $\rho(u_n) \to 0$ *(respectivement* $\to +\infty$*)*,

(v) $\rho_{p(x)}(u/\|u_n\|_{p(x)}) = 1$.

Proposition 1.1.2 *(cf [39])*

Si $q \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ et si pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) < p^*(x)$ alors $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ est continue et compacte, où

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)} & si\ p(x) < N, \\ \infty & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

En particulier, on a $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ est continue et compacte (pour plus de détails, voir Théorème 8.4.2 [35]).

Proposition 1.1.3 *(cf [71])*
On note

$$p^{\partial}(x) = \begin{cases} \dfrac{(N-1)p(x)}{N-p(x)} & si\ p(x) < N, \\ \infty & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Soit $q \in \mathcal{C}_+(\partial\Omega)$. *Si pour tout* $x \in \partial\Omega$, $q(x) < p^{\partial}(x)$ *alors* $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ *est continue et compacte.*

Définition 1.1.1 *La fonction continue* $p(x) : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, +\infty)$ *satisfait la condition de continuité Höldérienne, s'il existe une constante* C *tel que*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-log|x-y|} \quad \forall x, y \in \overline{\Omega} \ avec \ |x-y| < \frac{1}{2}.$$

Remarque 1.1.1 *Bien que cette condition de régularité n'est pas nécessaire pour définir les espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable, elle s'avère être très utile pour ces espaces pour introduire quelques propriétés, telle que* $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *et* $W_0^{1,p(x)}(\Omega) = W^{1,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. *De plus si* $1 < p^- \leq p^+ < N$, *alors l'injection de Sobolev reste vraie pour* $q(x) = p^*(x)$ *(pour plus de détails voir [33]).*

Remarque 1.1.2 *D'après l'inégalité de Poincaré, il est évident que les normes* $\|\nabla u\|_{p(x)}$ *et* $\|u\|_{1,p(x)}$ *sont équivalentes sur* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

1.1.3 Autres espaces fonctionnels

Pour tout $k > 0$, la fonction troncature de niveau k est la fonction définie sur $I\!R$ par :

$$T_k(s) := \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k, \\ k\ sign(s) & \text{si} \quad |s| > k, \end{cases}$$

où

$$sign(s) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s > 0, \\ 0 & \text{si} \quad s = 0, \\ -1 & \text{si} \quad s < 0. \end{cases}$$

Il est clair que :

1) $T_k(-s) = -T_k(s)$,

2) $|T_k(s)| = \min\{|s|, k\}$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(s) = s$,

4) $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1}{k} T_k(s) = sign(s)$.

Soit $p \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, on définit $\mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow I\!R$, tel que la fonction troncature $T_k(u) \in W_0^{1,p(x)}$ pour tout $k > 0$.

Par la suite nous avons besoin de définir la notion du gradient au sens faible de la fonction mesurable $u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proposition 1.1.4 *Pour tout $u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$, il existe une fonction mesurable unique $v : \Omega \to I\!R^N$ tel que,*

$$\nabla T_k(u) = v\chi_{\{|u|<k\}}, \;\; p.p. \; dans \; \Omega, \;\; pour \; tout \; k > 0,$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable E. De plus, si $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, alors v coïncide avec le gradient classique de u et on la note par $v = \nabla u$.

Preuve

Le résultat provient de ([21], Lemme 2.1) dû au fait que

$$T_k(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega), \quad \text{pour tout } k > 0.$$

Lemme 1.1.1 *Soient $\lambda \in I\!R$, u et v finies presque partout et appartenant à $\mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$ introduits,*

$$\nabla(u + \lambda v) = \nabla u + \lambda \nabla v \;\; p.p. \; dans \; \Omega,$$

où ∇u, ∇v et $\nabla(u+\lambda v)$ sont respectivement les gradients de u, v et $u+\lambda v$ introduit dans la propostion 1.1.4.

1.2 Résultats d'intégration

Lemme de Fatou

Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_\Omega \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega f_n dx\Big).$$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue :

Soit f_n une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Définition de l'équi-intégrabilité :

On dit qu'une suite f_n de fonctions de $L^1(\Omega)$ est équi-intégrable si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall E \subset \Omega$ mesurable avec $\text{mes}(E) < \delta$ on ait

$$\int_\Omega |f_n| dx < \varepsilon.$$

Un théorème important permettant de montrer la convergence forte d'une suite à partir d'une convergence presque partout est le Théorème de Vitali.

Théorème de Vitali :

Soit $1 \leq p < +\infty$, $\Omega \subset I\!R^N$ mesurable et $(f_n)_{n\in I\!N}$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction f. Alors

$$f_n \longrightarrow f \text{ fortement dans } L^p(\Omega) \Longleftrightarrow (f_n)_n \text{ est } p-\text{équi-intégrable.}$$

Théorème de Stampacchia

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ et $1 \leq p < +\infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : I\!R \to I\!R$ une fonction continue, C^1 par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' est borné sur $I\!R$. Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$ presque partout dans Ω.

Définition 1.2.1 *Soient Ω un ouvert de $I\!R^N$, $u : \Omega \to I\!R$ et $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I\!R)$. L'opérateur N_f défini par*

$$N_f u(x) = f(x, u(x))$$

est appelé opérateur de Nemytskii relatif à f.

Lemme 1.2.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. On considère la fonction mesurable $\gamma : X \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que*

$$\mu(\{x \in X : \gamma(x) = 0\}) = 0.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\mu(A) < \epsilon \quad \forall A \in \mathcal{M} \text{ avec } \int_A \gamma d\mu < \delta.$$

Proposition 1.2.1 *[28] Soit* V *un espace de Banach uniformément convexe. Soit* (x_n) *une suite dans* V *telle que* $x_n \to x$ *pour la topologie faible* $\sigma(V, V')$ *et*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Alors $x_n \to x$ *fortement.*

1.3 Opérateurs monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V'.

Définition 1.3.1 *On dit que*
i) A *est monotone si :*

$$\forall u, v \in V, \quad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

ii) A *est hémicontinue si : pour tous* $u, v, w \in V$, *l'application*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle \text{ est continue de } I\!R \text{ dans } I\!R.$$

iii) A *est coercif si :*

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} \frac{\langle A(u), v \rangle}{\|u\|_V} = +\infty.$$

Théorème 1.3.1 *([48]) Soit* A *un opérateur vérifiant :*
1. A *est borné,*
2. A *est hémi-continu,*
3. A *est monotone,*
4. A *est coercif.*
Alors A *est surjectif de* $V \to V'$, *i.e. pour* $f \in V'$, *il existe* $u \in V$ *tel que* $A(u) = f$.

Remarque 1.3.1 *([48]) Le résultat du Théorème 1.3.1 reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de monotonie par la Propriété de type (M) :*
5. A est de type (M) si :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ A(u_n) \rightharpoonup \chi \text{ dans } V' \text{ faible} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \chi = A(u).$$

Définition 1.3.2 *i) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 1) si :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ A(u_n) \rightharpoonup \chi \text{ dans } V' \text{ faible} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \chi = Au \text{ et } \langle A(u_n), u_n\rangle \to \langle A(u), u\rangle.$$

ii) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 2) si :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \forall v \in V,\ \liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Les deux définitions de pseudo-monotonie sont essentiellement équivalentes. Plus précisément :

Proposition 1.3.1 *Si A est borné, alors A est pseudo-monotone au sens 1 si et seulement si il est pseudo-monotone au sens 2.*

Remarque 1.3.2 *Si A est pseudo-monotone au sens 1, alors A est trivialement de type (M). De plus, la pseudo-monotonie est une généralisation de la monotonie.*

Définition 1.3.3 Soit V un espace de Banach séparable réflexif. Un opérateur A de $V \to V'$ est dit du type du "Calcul des Variations", s'il est borné et si on peut le représenter par

$$A(v) = A(v, v), \tag{1.1}$$

où $(u, v) \mapsto A(u, v)$ est un opérateur défini de $V \times V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall\ u \in V, v \mapsto A(u, v) \quad \text{est hémicontinue bornée de } V \to V', \\ \text{et} \quad (A(u, u) - A(u, v), u - v) \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$\forall\ v \in V, u \mapsto A(u,v)$ est borné hémicontinue de $V \to V'$,

$$\begin{cases} \text{si } \ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible et si } \ (A(u_n,u_n) - A(u_n,u), u_n - u) \to 0 \\ \text{alors, } \forall v \in V, \ A(u_n,v) \to A(u,v) \text{ dans } V' \text{ faible,} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \text{si } \ u_n \rightharpoonup u \text{ dans V faible et si } \ A(u_n,v) \rightharpoonup \psi \quad \text{dans } V' \text{ faible,} \\ \text{alors } \ (A(u_n,v), u_n) \to (\psi, u). \end{cases} \tag{1.4}$$

Le symbole $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.

Proposition 1.3.2 *[48]*
A est du calcul des variations $\Rightarrow$ A pseudo-monotone.

Théorème 1.3.2 *[48] Soit A un opérateur pseudo-monotone coercif. Alors $\forall f \in V'$, l'équation A(u)=f admet au moins une solution.*

1.4 Résultats Fondamentaux

Lemme 1.4.1 *Soit $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ une fonction de Carathéodory vérifiant $|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{p_1(x)/p_2(x)}$; $\forall x \in \Omega$ et $s \in I\!R$, p_1, p_2 sont dans $\mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$, $a \in L^{p_2(x)}(\Omega)$, $a(x) \geq 0$ et $b \geq 0$, alors l'opérateur de Nemytskii de $L^{p_1(x)}(\Omega)$ vers $L^{p_2(x)}(\Omega)$ est un opérateur continu et borné.*

Lemme 1.4.2 *Soit $\xi, \eta \in I\!R^N$ et soit $1 \leq p < \infty$. On a*

$$\frac{1}{p}|\xi|^p - \frac{1}{p}|\eta|^p \leq |\xi|^{p-2}\xi(\xi - \eta).$$

Preuve
On considère la fonction $f : I\!R^+ \to I\!R$ définie par $x \mapsto x^p - px + (p-1)$.
On a

$$f(x) \geq \min_{y \in I\!R^+} f(y) = f(1) = 0 \ \forall x \in I\!R^+.$$

On prend $x = \frac{|\eta|}{|\xi|}$ (si $|\xi| = 0$, le résultat est trivial) dans la fonction ci-dessus pour obtenir le résultat du lemme en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.4.3 *Soient* $a \geq 0, b \geq 0$ *et soit* $1 \leq p < +\infty$. *On a*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Preuve

Si $a = 0$, le résultat est trivial.

Si $a > 0$, on peut écrire l'inégalité sous la forme

$$(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p),$$

avec $0 \leq x = \dfrac{b}{a}$.
la fonction

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p},$$

satisfait

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

et

$$f(x) > 0, \text{ pour tout } 0 < x < +\infty.$$

Donc, pour $x \geq 0$, f atteint son maximum seulement au point $x = 1$.

Comme

$$f(1) = 2^{p-1},$$

le résultat s'ensuit.

Remarque 1.4.1 *Il est clair de voir que sous la condition* $1 \leq p^- \leq p^+ < +\infty$, *on a*

$$(a+b)^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}(a^{p(x)} + b^{p(x)}).$$

Chapitre 2

Etude de problèmes elliptiques quasilinéaires

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre [1] est l'étude de l'existence de solutions du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} Au = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $p \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ et $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$.
A est un opérateur de type Leray-Lions définie de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ par la formule :

$$Au = -\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u)). \tag{2.2}$$

$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance :

$$|f(x, r, \xi)| \leq g(x) + |r|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)}, \tag{2.3}$$

où $0 \leq \eta(x) < p(x) - 1$ et $0 \leq \delta(x) < (p(x) - 1)/p'(x)$.
Ce problème a été étudié dans le cas d'un exposant constant par Boccardo, Murat

[1] Ce chapitre est l'objet de l'article [19], publié à Elec. J. Diff. Equ (EJDE).

et Puel dans [25], où f satisfait la condition :

$$|f(x,r,\xi)| \leq h(|r|)(1+|\xi|^p), \tag{2.4}$$

et h est une fonction croissante de $I\!R^+ \to I\!R^+$.
Kao et Tsai [42], ont montré l'existence du résultat sous la condition de croissance :

$$|f(x,r,\xi)| \leq C(1+|r|^\delta + |\xi|^p). \tag{2.5}$$

Cependant, on peut aussi citer la travail de Fan et Zhang [37], où ils ont étudié le cas particulier

$$\begin{cases} -\text{div } (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) & = f(x,u) \quad x \in \Omega \\ u & = 0 \qquad\quad\ \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

avec f satisfaisant la condition de croissance :

$$|f(x,r)| \leq C_1 + C_2|r|^{\beta(x)-1}, \tag{2.7}$$

où $1 \leq \beta < p^-$.
Le taravail de ce chapitre peut être vu comme une généralisation [25], car dans [37] les auteurs ont considéré $f = f(x,u)$ et dans [25, 42], ils ont pris $p(x) = p$.

Le plan de ce chapitre est comme suit : A la section 2, nous introduisons les hypothèses de base et nous démontrons quelques lemmes. Dans la section 3, on fait la démonstration du résultat d'existence de solutions.

2.2 Hypothèses de base et quelques lemmes

Pour exposer nos résultats, on rappelle en premier lieu les hypothèses et les lemmes de base dont on va faire usage dans ce chapitre. Pour $p \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ tel que $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$, on note

$$Au = -\text{div}(a(x,u,\nabla u)),$$

où $a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe $k(x) \in L^{p'(x)}(\Omega)$ et $\beta > 0$ tels que pour tout r et ξ et pour presque tout x on ait

$$|a(x,r,\xi)| \leq \beta[k(x) + |r|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}]$$

(H2) Pour tout r, ξ et η et pour presque tout x on a

$$[a(x,r,\xi) - a(x,r,\eta)](\xi - \eta) > 0 \text{ pour } \xi \neq \eta \in I\!R^N$$

(H3) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $r \in I\!R^N$, $\xi \in I\!R^N$ et pour presque tout $x \in \Omega$ on ait

$$a(x,r,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^{p(x)}.$$

soit f est une fonction de Carathéodory définie sur $\Omega \times I\!R \times I\!R^N$ telle que

(H4) Pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(r,\xi) \in I\!R \times I\!R^N$, on a

$$|f(x,r,\xi)| \leq g(x) + |r|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)},$$

où $g : \Omega \to I\!R^+$, $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ et $0 \leq \eta(x) < p(x) - 1$, $0 \leq \delta(x) < \frac{p(x)-1}{p'(x)}$.

Lemme 2.2.1 *Supposons que* (H1)–(H4) *sont satisfaits et soient* $(u_n)_{n\in I\!N}$ *une suite de* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*. Si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*, alors*

$$a(x,u_n,\nabla v) \to a(x,u,\nabla v) \quad \textit{dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N, \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Preuve

D'après (H1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|a(x,u_n,\nabla v)|^{p'(x)} &\leq \beta^{p'(x)}[k(x) + |u_n|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}]^{p'(x)} \\
&\leq (\beta+1)^{p'^+} 2^{p'^+-1}\,[\,k(x)^{p'(x)} + 2^{p'^+-1}\,(\,|u_n|^{(p(x)-1)\,p'(x)} + |\nabla v|^{(p(x)-1)\,p'(x)})\,] \\
&\leq (\beta+1)^{p'^+} 2^{2(p'^+-1)}[\,k(x)^{p'(x)} + |u_n|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}\,].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dans la seconde inégalité ci-dessus, nous avons utilisé la Remarque 1.4.1. Puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et comme d'après la Proposition 1.1.2, l'injection $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}$ est continue et compacte alors, il existe une suite qui sera encore notée (u_n) tel que, $u_n \to u$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, et p.p. dans Ω. Par conséquent,

$$|a(x,u_n,\nabla v)|^{p'(x)} \to |a(x,u,\nabla v)|^{p'(x)} \quad \text{p.p. dans } \Omega \tag{2.9}$$

et

$$(\beta+1)^{p'^+}2^{2(p'^+-1)}[\, k(x)^{p'(x)} + |u_n|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}\,]$$
$$\longrightarrow (\beta+1)^{p'^+}2^{2(p'^+-1)}[k(x)^{p'(x)} + |u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}] \text{ p.p dans } \Omega. \tag{2.10}$$

Pour tout sous-ensemble mesurable E, on a

$$\int_E |a(x,u_n,\nabla v)|^{p'(x)}dx \leq (\beta+1)^{p'^+}2^{2(p'^+-1)}\Big[\int_E k(x)^{p'(x)}dx + \int_E |u_n|^{p(x)}dx + \int_E |\nabla v|^{p(x)}dx\Big]. \tag{2.11}$$

De (2.10) et (2.11), on déduit qu'il existe $\eta(\varepsilon)$ tel que

$$\int_E |a(x,u_n,\nabla v)|^{p'(x)}dx < \varepsilon,$$

pour tout E avec $\text{mes}(E) < \eta(\varepsilon)$; ce qui implique l'équi-integrabilité de $a(x,u_n,\nabla v)$. Finallement, d'après le théorème de Vitali on aura,

$$a(x,u_n,\nabla v) \to a(x,u,\nabla v) \quad \text{dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N. \tag{2.12}$$

Lemme 2.2.2 *Pour $1 < r(x) < \infty$, soient $g \in L^{r(x)}(\Omega)$ et $g_n \in L^{r(x)}(\Omega)$ avec $\|g_n\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq C$. Si $g_n(x) \to g(x)$ p.p. dans Ω, alors $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^{r(x)}(\Omega)$.*

Preuve

Soit

$$E(N) = \{x \in \Omega : |g_n(x) - g(x)| \leq 1, \, \forall n \geq N\}.$$

$\text{mes}(E(N)) \to \text{mes}(\Omega)$ quand $N \to \infty$.

Posons

$$\mathcal{F} = \{\varphi_N \in L^{r'(x)}(\Omega) : \varphi_N \equiv 0 \text{ p.p. dans } \Omega\backslash E(N)\}.$$

Montrons que $\mathcal{F}$ est dense dans $L^{r'(x)}(\Omega)$.

Soit $f \in L^{r'(x)}(\Omega)$, on prend

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in E(N), \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega\backslash E(N). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\rho_{r'(x)}(f_N - f) &= \int_\Omega |f_N(x) - f(x)|^{r'(x)} dx \\
&= \int_{E(N)} |f_N(x) - f(x)|^{r'(x)} dx + \int_{\Omega\setminus E(N)} |f_N(x) - f(x)|^{r'(x)} dx \\
&= \int_{\Omega\setminus E(N)} |f(x)|^{r'(x)} dx \\
&= \int_\Omega |f(x)|^{r'(x)} \chi_{\Omega\setminus E(N)} dx.
\end{aligned}$$

Si on prend $\psi_N(x) = |f(x)|^{r'(x)}\chi_{\Omega\setminus E(N)}$ pour presque tout x dans Ω, on obtient

$$\psi_N \to 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \quad |\psi_N| \leq |f|^{r'(x)}.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit $\rho_{r'(x)}(f_N - f) \to 0$ quand $N \to \infty$; par la suite $f_N \to f$ dans $L^{r'(x)}(\Omega)$.

Aussi $\mathcal{F}$ est dense dans $L^{r'(x)}(\Omega)$.

Maintenant, montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(x)(g_n(x) - g(x))dx = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{F}.$$

Puisque $\varphi \equiv 0$ dans $\Omega \setminus E(N)$, il suffit de prouver que

$$\int_{E(N)} \varphi(x)(g_n(x) - g(x))dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On pose $\phi_n = \varphi(g_n - g)$.

Comme $|\varphi(x)||g_n(x)-g(x)| \leq |\varphi(x)|$ p.p. dans $E(N)$ et $\phi_n \to 0$ p.p. dans Ω, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que $\phi_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$.

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(x)(g_n(x) - g(x))dx = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{F}.$$

Par la densité de $\mathcal{F}$ dans $L^{r'(x)}(\Omega)$, on peut conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi g_n dx = \int_\Omega \varphi g dx, \quad \forall \varphi \in L^{r'(x)}(\Omega).$$

Finalement, $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^{r(x)}(\Omega)$.

Lemme 2.2.3 *Supposons que* (H1)–(H4) *ont lieu et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)]\nabla(u_n - u)\, dx \to 0. \tag{2.13}$$

Alors, $u_n \to u$ *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Preuve

Soit $D_n = [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)]\nabla(u_n - u)$.

D'après (H2), D_n est une fonction positive et selon (2.13) $D_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. On peut extraire une sous-suite, encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, ce qui donne $u_n \to u$ p.p. dans Ω. De même, $D_n \to 0$ p.p. dans Ω.

Alors, il existe un sous-ensemble B de Ω, de mesure nulle, tel que pour $x \in \Omega \setminus B$, $|u(x)| < \infty$, $|\nabla u(x)| < \infty$, $k(x) < \infty$, $u_n(x) \to u(x)$, $D_n(x) \to 0$.

Définissons $\xi_n = \nabla u_n(x)$ et $\xi = \nabla u(x)$, on a

$$\begin{aligned} D_n(x) &= [a(x, u_n, \xi_n) - a(x, u_n, \xi)](\xi_n - \xi) \\ &= a(x, u_n, \xi_n)\xi_n + a(x, u_n, \xi)\xi - a(x, u_n, \xi_n)\xi - a(x, u_n, \xi)\xi_n \\ &\geq \alpha|\xi_n|^{p(x)} + \alpha|\xi|^{p(x)} \\ &\quad -\beta(k(x) + |u_n|^{p(x)-1} + |\xi_n|^{p(x)-1}\ )\,|\xi| \\ &\quad -\beta(k(x) + |u_n|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}\ )\,|\xi_n| \\ &\geq \alpha|\xi_n|^{p(x)} - C_x[1 + |\xi_n|^{p(x)-1} + |\xi_n|], \end{aligned} \tag{2.14}$$

où C_x est une constante qui ne dépend que de x.

Or, $u_n(x) \to u(x)$, et on a $|u_n(x)| \leq M_x$, où M_x est une constante positive.

Par conséquent par un argument standard, $|\xi_n|$ est uniformément bornée par rapport à n. En effet (2.14) devient

$$D_n(x) \geq |\xi_n|^{p(x)}(\alpha - \frac{C_x}{|\xi_n|^{p(x)}} - \frac{C_x}{|\xi_n|} - \frac{C_x}{|\xi_n|^{p(x)-1}}). \tag{2.15}$$

Si $|\xi_n| \to \infty$ (pour une sous-suite), alors $D_n(x) \to \infty$ ce qui est absurde. Posons ξ^* un point d'adhérence de ξ_n. On a $|\xi^*| < \infty$ et par la continuité de a, on obtient

$$[a(x, u(x), \xi^*) - a(x, u(x), \xi)](\xi^* - \xi) = 0. \tag{2.16}$$

Grâce à l'hypothèse (H2), on a $\xi^* = \xi$.

L'unicité du point d'adhérence implique que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.17}$$

Puisque la suite $a(x, u_n, \nabla u_n)$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$

et $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ p.p. dans Ω, le Lemme 2.2.2 donne

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup a(x, u, \nabla u) \text{ dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N \ \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.18}$$

Posons $\bar{y}_n = a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n$ et $\bar{y} = a(x, u, \nabla u)\nabla u$.

Comme dans [25], on peut écrire

$$\bar{y}_n \to \bar{y} \text{ dans } L^1(\Omega).$$

D'après (H3), on a

$$\alpha|\nabla u_n|^{p(x)} \leq a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n.$$

Soient $z_n = |\nabla u_n|^{p(x)}$, $z = |\nabla u|^{p(x)}$, $y_n = \frac{\bar{y}_n}{\alpha}$ et $y = \frac{\bar{y}}{\alpha}$.

Alors, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_\Omega 2y\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (y + y_n) - |z_n - z|\, dx; \tag{2.19}$$

i.e., $0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx$.

Alors

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq 0, \tag{2.20}$$

cela implique que

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } (L^{p(x)}(\Omega))^N. \tag{2.21}$$

Ainsi $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, ce qui achève la démonstration.

Pour $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on définit l'opérateur de Nemytskii F par rapport à f, par

$$F(v, \nabla v)(x) = f(x, v, \nabla v); \quad \text{p.p. } x \text{ dans } \Omega. \tag{2.22}$$

Lemme 2.2.4 *L'opérateur $v \mapsto F(v, \nabla v)$ est continu de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$.*

Preuve

D'après (H4), on a

$$|f(x, r, \xi)| \leq g(x) + |r|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)}, \tag{2.23}$$

ainsi, d'après la remarque 1.4.1,

$$|f(x, r, \xi)|^{p'(x)} \leq 2^{2(p'^+-1)}\Big(g(x)^{p'(x)} + |r|^{p'(x)\eta(x)} + |\xi|^{p'(x)\delta(x)}\Big). \tag{2.24}$$

Soit E un sous-ensemble mesurable de Ω. Alors

$$\int_E |f(x,v,\nabla v)|^{p'(x)}dx \leq C\Big(\int_E g(x)^{p'(x)}dx + \int_E |v|^{p'(x)\eta(x)}dx + \int_E |\nabla v|^{p'(x)\delta(x)}dx\Big), \tag{2.25}$$

avec $0 \leq \eta(x) < p(x)-1$, $0 \leq p'(x)\eta(x) < p(x)$ et

$$0 \leq \delta(x) < \frac{p(x)-1}{p'(x)} \Rightarrow 0 \leq p'(x)\delta(x) < p(x)-1. \tag{2.26}$$

Pour toute suite $(v_n)_{n\in I\!N}$ telle que $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, démontrons que $F(v_n, \nabla v_n) \to F(v,\nabla v)$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
On a $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, ce qui implique que

$$\begin{cases} v_n & \to v \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \nabla v_n & \to \nabla v \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory vérifiant l'inégalité (2.3), alors

$$|f(x,v_n,\nabla v_n)|^{p'(x)} \longrightarrow |f(x,v,\nabla v)|^{p'(x)} \text{ p.p. dans } \Omega, \tag{2.27}$$

$$|f(x,v_n,\nabla v_n)|^{p'(x)} \leq C\left(g(x)^{p'(x)} + |v_n|^{p'(x)\,\eta(x)} + |\nabla v_n|^{p'(x)\,\delta(x)}\right) \tag{2.28}$$

et

$$C\left(g(x)^{p'(x)} + |v_n|^{p'(x)\,\eta(x)} + |\nabla v_n|^{p'(x)\,\delta(x)}\right) \longrightarrow C\left(g(x)^{p'(x)} + |v|^{p'(x)\,\eta(x)} + |\nabla v|^{p'(x)\,\delta(x)}\right). \tag{2.29}$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Vitali, on déduit que

$$f(x,v_n,\nabla v_n) \to f(x,v,\nabla v) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega); \tag{2.30}$$

i.e., $v \mapsto F(v,\nabla v)$ est continu.

2.3 Résultats d'existence

Considérons le problème

$$\begin{cases} -\text{div } a(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.31}$$

Le résultat principal du chapitre est le suivant.

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (H1)–(H4), il existe au moins une solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ du problème (2.31).*

Preuve d'existence de la solution

Cette preuve se fait en deux étapes.

Etape 1 L'opérateur $B : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ défini par

$$B(v) := A(v) - f(x, v, \nabla v)$$

est du type du Calcul des Variations.

Assertion 1. Soit

$$B(u, v) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \nabla v) - f(x, u, \nabla u).$$

Alors $B(v) = B(v, v)\ \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Assertion 2. L'opérateur $v \mapsto B(u, v)$ est borné pour tout $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Soit $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a

$$\langle B(u, v), \psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla v)\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx - \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\psi(x) dx. \tag{2.32}$$

D'après l'inégalité de type Hölder, la condition de croissance (H1) et comme dans (2.8), on déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla v)\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx &= \int_\Omega a(x, u, \nabla v)\nabla\psi\, dx \\
&\le (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\, \|a(x, u, \nabla v)\|_{(L^{p'(x)}(\Omega))^N}\, \|\nabla\psi\|_{(L^{p(x)}(\Omega))^N} \\
&\le (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\, \Big(\int_\Omega |a(x, u, \nabla v)|^{p'(x)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \|\psi\|_{1,p(x)} \\
&\le (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\Big(\int_\Omega [\beta(k(x) + |u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1})]^{p'(x)} dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \|\psi\|_{1,p(x)} \\
&\le C'\Big(\int_\Omega k(x)^{p'(x)}\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \|\psi\|_{1,p(x)},
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} p'^- & \text{si } \|a(x, u, \nabla v)\|_{(L^{p'(x)}(\Omega))^N} > 1, \\ p'^+ & \text{si } \|a(x, u, \nabla v)\|_{(L^{p'(x)}(\Omega))^N} \le 1. \end{cases}$$

Rappelons que $\|\psi\|_{1,p(x)}$ est une norme équivalente à la norme $\|\nabla\psi\|_{p(x)}$ sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (voir remarque 1.1.2).

On a, $k \in L^{p'(x)}(\Omega)$, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x,u,\nabla v)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \leq C\|\psi\|_{1,p(x)}. \tag{2.33}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\psi\,dx &\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\,\|f(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\,\|\psi\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})(\int_\Omega |f(x,u,\nabla u)|^{p'(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\,\|\psi\|_{1,p(x)},
\end{aligned}$$

où

$$\alpha = \begin{cases} p'^- & \text{si } \|f(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} > 1,\\ p'^+ & \text{si } \|f(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \leq 1.\end{cases}$$

Alors, (H4) entraîne

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\psi\,dx &\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|\psi\|_{1,p(x)}[\int_\Omega (g(x)+|u|^{\eta(x)}+|\nabla u|^{\delta(x)})^{p'(x)}\,dx]^{\frac{1}{\alpha}}\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|\psi\|_{1,p(x)}2^{2\,(p'^+-1)\frac{1}{\alpha}}[\int_\Omega (g(x)^{p'(x)}+|u|^{\eta(x)\,p'(x)}+|\nabla u|^{\delta(x)p'(x)})dx]^{\frac{1}{\alpha}}\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|\psi\|_{1,p(x)}2^{\frac{2(p'^+-1)}{\alpha}}[\int_\Omega g(x)^{p'(x)}+\int_\Omega |u|^{\eta(x)p'(x)}dx\\
&\quad+\int_\Omega |\nabla u|^{\delta(x)p'(x)})dx]^{\frac{1}{\alpha}}\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|\psi\|_{1,p(x)}2^{\frac{2(p'^+-1)}{\alpha}}[\int_\Omega g(x)^{p'(x)}dx+|u|^{\beta}_{L^{p'\eta}}+|\nabla u|^{\theta}_{L^{p'\delta}}]^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

où

$$\beta = \begin{cases} (\eta p'\,)^+ & \text{si } \|u\|_{L^{p'\eta}} > 1\\ (\eta p'\,)^- & \text{si } \|u\|_{L^{p'\eta}} \leq 1\end{cases}$$

et

$$\theta = \begin{cases} (\delta p'\,)^+ & \text{si } \|\nabla u\|_{L^{p'\delta}} > 1\\ (\delta p'\,)^- & \text{si } \|\nabla u\|_{L^{p'\delta}} \leq 1.\end{cases}$$

Puisque $0 \leq \eta(x) < p(x)-1$, cela implique que $0 \leq \eta(x)p'(x) < p(x)$.

Par conséquent il existe une constance $C_1 > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{p'\eta}} \leq C_1\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \tag{2.34}$$

et de même $0 \leq \delta(x) < (p(x)-1)/p'(x)$, implique que $0 \leq \delta(x)p'(x) < p(x)-1 < p(x)$.

Ainsi il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^{p'\delta}} \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} . \tag{2.35}$$

Comme $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\psi dx \leq C_3 \|\psi\|_{1,p(x)}. \tag{2.36}$$

Par conséquent, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$|\langle B(u,v),\psi\rangle| \leq C_0 \|\psi\|_{1,p(x)} \quad \forall u,v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); \tag{2.37}$$

i.e., $\langle B(u,v),\psi\rangle$ est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Pour tout $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $v \mapsto B(u,v)$ est hemicontinu.
i.e., l'opérateur $\lambda \mapsto \langle B(u, v_1 + \lambda v_2),\psi\rangle$ est continu pour tout $v_1, v_2, \psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Par la suite nous avons besoin du lemme 2.2.2.

$$a_i(x,u,\nabla(v_1 + \lambda v_2)) \to a_i(x,u,\nabla v_1) \text{ p.p. dans } \Omega \text{ lorsque } \lambda \mapsto 0. \tag{2.38}$$

et, d'après (H1),

$$|a(x,u,\nabla(v_1 + \lambda v_2))| \leq \beta(k(x) + |u|^{p(x)-1} + |\nabla(v_1 + \lambda v_2)|^{p(x)-1}) . \tag{2.39}$$

De plus, $(a(x,u,\nabla(v_1 + \lambda v_2)))_\lambda$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$; donc, le lemme 2.2.2, entraîne

$$a(x,u,\nabla(v_1 + \lambda v_2)) \rightharpoonup a(x,u,\nabla v_1) \text{ dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{2.40}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} < B(u, v_1 + \lambda v_2),\psi > &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u,\nabla(v_1 + \lambda v_2)\,)\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx - \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\psi\,dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u,\nabla v_1)\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\psi\,dx \\
&= < B(u,v_1),\psi > \quad \forall\ v_1,\ v_2,\ \psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

De la même façon, nous montrons que pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $u \mapsto B(u,v)$ est bornée et hemicontinue.

En effet, en utilisant (H4), on a $(f(x, u_1 + \lambda u_2, \nabla(u_1 + \lambda u_2)))_\lambda$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et puisque f est une fonction de Carathéodory,

$$f(x, u_1 + \lambda u_2, \nabla(u_1 + \lambda u_2)) \to f(x, u_1, \nabla u_1) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0, \tag{2.42}$$

Par conséquent, le Lemme 2.2.2 donne

$$f(x, u_1 + \lambda u_2, \nabla(u_1 + \lambda u_2)) \rightharpoonup f(x, u_1, \nabla u_1) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega) \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{2.43}$$

D'autre part, comme dans (2.40), on a

$$a(x, u_1 + \lambda u_2, \nabla v) \rightharpoonup a(x, u_1, \nabla v) \quad \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega) \text{ quand } \lambda \to 0. \tag{2.44}$$

La combinaison (2.43) et (2.44), nous permet de conclure que $u \mapsto B(u, v)$ est bornée et hemicontinue.

Assertion 3.

$$\langle B(u, u) - B(u, v), u - v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (a_i(x, u, \nabla u) - a_i(x, u, \nabla v))(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i})dx \geq 0 \tag{2.45}$$

En effet, le résultat est une conséquence de l'hypothèse (H2).

Assertion 4. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

Prouvons que $B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v)$ dans $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

On a $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$,

$$\langle \sum_{i=1}^{N} -[\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u_n, \nabla u_n) + a_i(x, u_n, \nabla u)], u_n - u\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega [a_i(x, u_n, \nabla u_n) - a_i(x, u_n, \nabla u)] \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Par conséquent du Lemme 2.2.3, on déduit que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et grâce au Lemme 2.2.4,

$$f(x, u_n, \nabla u_n) \to f(x, u, \nabla u) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega). \tag{2.46}$$

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, par le Lemme 2.2.1, on a $a_i(x, u_n, \nabla v) \to a_i(x, u, \nabla v)$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$.

Par conséquent,

$$\int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla v)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx \to \int_\Omega a_i(x, u, \nabla v)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx. \tag{2.47}$$

D'autre part, on a $f(x,u_n,\nabla u_n) \to f(x,u,\nabla u)$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, donc faiblement. Puisque $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a $\psi \in L^{p(x)}(\Omega)$. Alors,

$$\int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)\psi dx \to \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\psi dx \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle B(u_n,v),\psi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega f(x,u_n,\nabla v_n)\, \psi\, dx \Big) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u,\nabla v)\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, \psi\, dx \\
&= \langle B(u,v),\psi\rangle \quad \text{pour tout } \ \psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).
\end{aligned}$$

Assertion 5. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $B(u_n,v) \rightharpoonup \psi$ dans $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. Montrons que $\langle B(u_n,v),u_n\rangle \to \langle \psi,u\rangle$.

Comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, le Lemme 2.2.1 entraine que,

$$a_i(x,u_n,\nabla v) \to a_i(x,u,\nabla v) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.48}$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx \to \int_\Omega a_i(x,u,\nabla v)\frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \tag{2.49}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n) u dx \to \langle \psi,u\rangle, \tag{2.50}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\langle B(u_n,v),u_n\rangle &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)\, u_n\, dx \\
&= \sum_{i=1}^N [\int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\, (\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i})\, dx + \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx] \\
&\quad - \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)\, u\, dx - \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)\, (u_n - u)\, dx.
\end{aligned}$$

Au regard de (2.48) et (2.49), on déduit que

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla v)(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx \to 0. \tag{2.51}$$

D'autre part, l'inégalité de type Hölder nous amène,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-u)|\, dx &\le (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}) |f(x,u_n,\nabla u_n)|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\, |u_n - u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\le C\, |u_n - u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

i.e.,

$$\int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-u)dx \to 0 \quad \text{quand } n\to\infty. \tag{2.53}$$

Tenant compte de (2.50), (2.51) et (2.53), on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}\langle B(u_n,v),u_n\rangle = \langle \psi,u\rangle. \tag{2.54}$$

ETAPE 2 L'opérateur B satisfait la condition de coercivité :

$$\lim_{\|v\|_{1,p(x)}\to\infty} \frac{\langle B(v),v\rangle}{\|v\|_{1,p(x)}} = +\infty. \tag{2.55}$$

En effet,

$$\langle B(v),v\rangle = \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,v,\nabla v)\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega f(x,v,\nabla v)v\,dx. \tag{2.56}$$

Alors de (H3), on a

$$\langle B(v),v\rangle \geq \alpha\|v\|_{1,p(x)}^{p(x)} - \int_\Omega f(x,v,\nabla v)v\,dx \tag{2.57}$$

D'après (H4), on a

$$\int_\Omega f(x,v,\nabla v)vdx \leq \int_\Omega g(x)|v|\,dx + \int_\Omega |v|^{\eta(x)+1}dx + \int_\Omega |\nabla v|^{\delta(x)}|v|dx. \tag{2.58}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega g(x)|v|dx \leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|g\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C_0\|v\|_{1,p(x)}. \tag{2.59}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega |v|^{\eta(x)+1}\,dx \ \leq \begin{cases} \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)}^{\eta^+ +1} \text{ si } \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)} > 1, \\ \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)}^{\eta^- +1} \text{ si } \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega |v|^{\eta(x)+1} \leq \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)}^{\beta}, \tag{2.60}$$

où

$$\beta = \begin{cases} \eta^+ \ +1 \text{ si } \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)} > 1, \\ \eta^- \ +1 \text{ si } \|v\|_{L^{\eta(x)+1}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

Comme $0 \leq \eta(x) < p(x) - 1$ alors $1 \leq \eta(x) + 1 < p(x)$

et par conséquent, de (2.60), on déduit que

$$\int_\Omega |v|^{\eta(x)+1}\, dx \leq C_1 \, \|v\|^{\beta}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \; C_1 \, ||v||^{\beta}_{1,p(x)} \quad \text{avec } \beta < p^-. \tag{2.61}$$

En outre, tenant compte de l'inégalité de type Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v|^{\delta(x)} \, |v| \, dx \;&\leq\; (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}) \, \||\nabla v|^{\delta(x)}\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \, \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\leq\; (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}) \, (\int_\Omega |\nabla v|^{\delta(x)\, p'(x)} \, dx)^{\frac{1}{\gamma}} \, \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\leq\; (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}) \, (\int_\Omega |\nabla v|^{\theta} \, dx)^{\frac{1}{\gamma}} \, \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} p'^- \;\text{ si } \||\nabla v|^{\delta(x)}\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} > 1, \\ p'^+ \;\text{ si } \||\nabla v|^{\delta(x)}\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \leq 1 \end{cases}$$

et

$$\theta = \begin{cases} \delta^+ \, p'^+ \;\text{ si } |\nabla v| > 1, \\ \delta^- \, p'^- \;\text{ si } |\nabla v| \leq 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{\delta(x)} \, |v| \, dx \leq C \, (\|v\|_{W_0^{1,\theta}(\Omega)})^{\frac{\theta}{\gamma}} \, \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \tag{2.62}$$

puisque $0 \leq \delta(x) < (p(x) - 1)/p'(x) \Longrightarrow 0 \leq \delta(x) \, p'(x) < p(x) - 1$,

$$0 \leq \delta^+ < (\frac{p-1}{p'})^- = \frac{p^- - 1}{p'^+} \Longrightarrow 0 \leq \delta^+ \, p'^+ < p^- - 1,$$

et

$$0 \leq \delta^- \, p'^- < \frac{(p^- - 1)}{p'^+} p'^- \leq p^- - 1.$$

Il en résulte que, $\quad 0 \leq \theta < p^- - 1 < p(x)$.

D'autre part,

$$0 \leq \frac{\theta}{p'^+} < \frac{p^- - 1}{p'^+} \;\text{ et }\; 0 \leq \frac{\theta}{p'^-} < \frac{p^- - 1}{p'^-}$$

donc,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{\delta(x)} \, |v| \, dx \leq C_2 \, ||v||^{\frac{\theta}{\gamma}}_{1,p(x)} \, ||v||_{1,p(x)} \tag{2.63}$$

De (2.57), (2.59), (2.61) et (2.63), on déduit que

$$\frac{\langle B(v), v\rangle}{||v||_{1,p(x)}} \geq \alpha \, ||v||^{p(x)-1}_{1,p(x)} - C_0 - C_1 \, ||v||^{\beta-1}_{1,p(x)} - C_2 \, ||v||^{\frac{\theta}{\gamma}}_{1,p(x)} \tag{2.64}$$

et comme,

$$0 \leq \frac{\theta}{p'^{+}} < \frac{p^{-}\ -1}{p'^{+}},\ \ 0 \leq \frac{\theta}{p'^{-}} < \frac{p^{-}\ -1}{p'^{-}}\ \ \text{et}\ \ \frac{p^{-}\ -1}{p'^{+}} \leq \frac{p^{-}\ -1}{p'^{-}}$$

alors,

$$0 \leq \frac{\theta}{\gamma} < \frac{p^{-}\ -1}{p'^{-}} < p^{-}\ -1. \tag{2.65}$$

De plus pour $\beta - 1 < p^{-} - 1$, on conclut que

$$\frac{\langle B(v), v\rangle}{||v||_{1,p(x)}} \geq \alpha ||v||_{1,p(x)}^{p(x)-1} - C_0 - C_1 ||v||_{1,p(x)}^{\beta-1} - C_2 ||v||_{1,p(x)}^{\frac{\theta}{\gamma}} \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } ||v||_{1,p(x)} \rightarrow +\infty.$$

Finalement, en appliquant le théorème classique de Lions [48] (voir la section 1.3), le problème (2.31) admet une solution.

Chapitre 3

Etude d'un problème elliptique avec second membre mesure

3.1 Introduction

Dans ce chapitre [1] nous nous intéressons à l'étude d'existence le la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div } (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $I\!R^N$ $(N \geq 2)$, la donnée μ est une mesure qui se décompose dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

En outre, la notion de donnée mesure pouvant être décomposée dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ est vérifiée par Boccardo, Gallouët et Orsina dans le cas de p constant (voir[27]). Dans ce contexte ils ont considéré comme une mesure signée μ qui ne charge pas les ensembles de p-capacité nulle, plus precisément toute mesure qui ne charge pas les ensembles de p-capacité nulle peut être décomposée comme une fonction de $L^1(\Omega)$ et un élément dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ (l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$), et inversement, toute mesure signée dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ est de mesure zéro pour les ensembles de p-capacité nulle. Dans le cas de l'exposant variable, en utilisant les

[1] Ce chapitre est l'objet de l'article [15], accepté pour publication à Math. Comput. Simul.

mêmes arguments que dans [27], nous nous basons sur le résultat de décomposition fait par Nyanquini, Ouaro et Soma [57]. En ce qui concerne les propriétés relatives aux $p(x)$-capacité, (voir [41, 57]).
Dans ce chapitre, on montre l'existence de la solution entropique du problème (3.1) dans le cas d'une puissance variable et d'une donnée mesure. Le plan est le suivant : A la section 2, nous rappelons et définissons quelques résultats et lemmes préparatoires pour la présentation de nos résultats. A la section 3, on définit la notion de solution entropique et on montre que le problème (3.1) admet au moins une solution entropique.

3.2 Lemmes de base

Lemme 3.2.1 *(voir [19]) Pour* $1 < r(x) < \infty$, *soient* $g \in L^{r(x)}(\Omega)$ *et* $g_n \in L^{r(x)}(\Omega)$ *avec* $|g_n|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq C$. *Si* $g_n(x) \to g(x)$ *p.p. dans* Ω, *alors* $g_n \rightharpoonup g$ *dans* $L^{r(x)}(\Omega)$.

Lemme 3.2.2 *Soit* $F : I\!R \longrightarrow I\!R$ *une fonction uniformément lipschitzienne avec* $F(0) = 0$. *Soit* $p \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$ *et* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. *Alors* $F(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. *De plus, si l'ensemble* D *des points de discontinuité de* F' *est fini, alors*

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x_i} = \begin{cases} F'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} & p.p. \text{ dans } \quad \{x \in \Omega : \ u(x) \notin D\}, \\ \\ 0 & p.p. \text{ dans } \quad \{x \in \Omega : \ u(x) \in D\}. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1 *Le lemme ci-dessus est une généralisation de celui cité dans ([40], pp. 151-152), où* $p(x) = p = cte$, $F \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ *et* $F' \in L^\infty(I\!R)$, *et son analogue dans [22], où* $p(x) = p = cte$, $w \equiv w_1 \equiv w_2 \equiv \cdots \equiv w_N \equiv 1$ *est une fonction poids,* $F \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ *et* $F' \in L^\infty(I\!R)$. *A noter également que le lemme précédent implique que les fonctions de* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *peuvent être tronquées.*

Preuve.

Rappelons que la preuve de la deuxième partie du lemme 3.2.2 est identique à sa

correspondante dans le cas d'exposant classique cité dans [40]. Maintenant on considère le cas où $F \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ et $F' \in L^\infty(I\!R)$.
Soit u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Comme $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$, il existe alors une suite $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, tel que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Passant à une sous-suite, on suppose que $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω.
Par conséquent,

$$F(u_n) \to F(u) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.2}$$

Aussi, par la relation

$$|F(u_n)| = |F(u_n) - F(0)| \leq \|F'\|_\infty |u_n|, \tag{3.3}$$

on obtient

$$|F(u_n)|^{p(x)} \leq (1+\|F'\|_\infty)^{p^+}|u_n|^{p(x)} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}(u_n)\right|^{p(x)} = \left|F'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p(x)} \leq M\left|\frac{\partial u_n}{\partial xi}\right|^{p(x)}, \tag{3.4}$$

pour une constante M qui dépend pas de $p(x)$.
Par conséquent, on déduit que $F(u_n)$ demeure bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Ainsi, passant à une sous suite, on obtient

$$F(u_n) \rightharpoonup v \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{3.5}$$

D'après la Proposition 1.1.2, $F(u_n) \to v$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$,

$$F(u_n) \to v \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.6}$$

Grâce aux relations (3.2), (3.5) et (3.6) on peut conclure que

$$v = F(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Nous tournons maintenant notre attention vers le cas général.
Soit $F : I\!R \to I\!R$ uniformément lipschitzienne. Considérons la convolution avec une suite régularisante ρ_n dans $I\!R$, on a $F_n = F * \rho_n$, $F_n \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ et $F_n' \in L^\infty(I\!R)$.
Par conséquent, selon le premier cas, on a $F_n(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Puisque $F_n \to F$ uniformément dans tout compact, on a $F_n(u) \to F(u)$ p.p. dans Ω.

Aussi, $F_n(u)$ est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$; d'où $F_n(u) \rightharpoonup \overline{v}$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et p.p. dans Ω (en raison de la Proposition 1.1.2). Par conséquent,

$$\overline{v} = F(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Le résultat suivant découle du lemme ci-dessus.

Lemme 3.2.3 *Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Alors $T_k(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, avec $k > 0$. Par ailleurs, on a*

$$T_k(u) \to u \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

Preuve.

Comme T_k est une fonction uniformément lipschitzienne et $T_k(0) = 0$, on déduit par le Lemme 3.2.2 que $T_k(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |T_k(u) - u|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u) - \nabla u|^{p(x)} dx \\
&= \int_{\{|u| \le k\}} |T_k(u) - u|^{p(x)} dx + \int_{\{|u| > k\}} |T_k(u) - u|^{p(x)} dx \\
&\quad + \int_{\{|u| \le k\}} |\nabla T_k(u) - \nabla u|^{p(x)} + \int_{\{|u| > k\}} |\nabla T_k(u) - \nabla u|^{p(x)} dx \\
&= \int_{\{|u| > k\}} |T_k(u) - u|^{p(x)} dx + \int_{\{|u| > k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx.
\end{aligned}$$

Or $T_k(u) \to u$ p.p. dans Ω lorsque $k \to +\infty$. On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$\int_{\{|u| > k\}} |T_k(u) - u|^{p(x)} dx + \int_{\{|u| > k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

Par conséquent, $\|T_k(u) - u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} \longrightarrow 0$ lorsque $k \to +\infty$.

3.3 Existence de solutions entropiques

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que $p(x) \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ avec $1 < p^- \le p^+ < N$, satisfait la condition de continuité Höldérienne et μ est une mesure signée dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ à savoir que

$$\mu = f - \text{div} F, \tag{3.7}$$

où $f \in L^1(\Omega)$ et $F \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$.

Une solution entropique du problème (3.1) est définie de la façon suivante :

Définition 3.3.1 *Une fonction mesurable $u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est une solution entropique du problème (3.1) si, $|u|^{p(x)-2}u \in L^1(\Omega)$ et pour tout $k > 0$,*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla T_k(u-v)\,dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uT_k(u-v)\,dx \\ \leq \int_\Omega fT_k(u-v)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u-v)\,dx,\end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3.3.1 *Sous l'hypothèse (3.7). Le problème (3.1) admet au moins une solution entropique.*

Preuve d'existence de la solution entropique

ETAPE 1. Problème Approché.

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonction définie par $f_n = T_n(f)$ pour tout n entier naturel non nul.

$$T_n(f) = \begin{cases} -n \text{ si } f < -n, \\ f \text{ si } |f| \leq n, \\ n \text{ si } f > n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Il est clair que $f_n \in L^\infty(\Omega)$.

On a aussi

$$|f_n| = |T_n(f)| \leq |f| \in L^1(\Omega).$$

Par définition, (f_n) converge presque partout vers f et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

On a aussi

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f_n| dx \leq \int_\Omega |f| dx = \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

En récapitulant, on a construit une suite (f_n) de fonctions dans $L^\infty(\Omega)$ convergeant fortement vers $f \in L^1(\Omega)$ et telle que

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On considère maintenant le problème approché suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla v\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n v\,dx = \int_\Omega f_n v\,dx + \int_\Omega F\nabla v\,dx, \\ \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.10}$$

On définit l'opérateur $G : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ par

$$\langle Gu, v\rangle = \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\,dx$$

et l'opérateur $p(x)$-Laplacien $-\triangle_{p(x)}(u) = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ qui est la dérivation de la fonctionnelle J au sens faible définie par

$$J = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx, \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Par conséquent, nous notons $L = J' : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'(x)}(\Omega)$, alors

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\,dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Grâce à l'inégalité de type Hölder, on a pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\,dx\right| &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\||u|^{p(x)-1}\|_{p'(x)}\|v\|_{p(x)}, \\ &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx + 1)^{\frac{1}{p'^-}}\|v\|_{p(x)}, \\ &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})(\|u\|^\gamma_{p(x)} + 1)^{\frac{1}{p'^-}}\|v\|_{p(x)}, \\ &\leq C\|v\|_{1,p(x)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec

$$\gamma = \left\{\begin{array}{ll} p^+ & \text{si } \|u\|_{p(x)} > 1, \\ p^- & \text{si } \|u\|_{p(x)} \leq 1. \end{array}\right.$$

Lemme 3.3.1 *L'opératuer $B = L + G$ de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ est pseudo-monotone. De plus, B est coércif, dans le sens suivant :*

$$\frac{\langle Bv, v\rangle}{\|v\|_{1,p(x)}} \longrightarrow +\infty \quad si \quad \|v\|_{1,p(x)} \longrightarrow +\infty, \qquad \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Démonstration du Lemme 3.3.1

Il est évident que L est un opérateur continu et borné et par (3.11) nous obtenons que B est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Pour la coercivité, on a pour tout $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu, u\rangle}{\|u\|_{1,p(x)}} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx}{\|u\|_{1,p(x)}}, \\ &\geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx}{\|u\|_{1,p(x)}}.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{\|u\|_{1,p(x)}\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx}{\|u\|_{1,p(x)}} = +\infty$, alors

$$\frac{\langle Bu, u\rangle}{\|u\|_{1,p(x)}} \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } \|u\|_{1,p(x)} \longrightarrow +\infty,$$

Il reste à montrer que B est pseudo-monotone.

Soit $(u_k)_k$ une suite dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ Bu_k \rightharpoonup \chi \text{ dans } W^{-1,p'(x)}(\Omega), \\ \displaystyle\limsup_{k\to+\infty} \langle Bu_k, u_k\rangle \leq \langle \chi, u\rangle. \end{cases} \tag{3.12}$$

Nous allons montrer que

$$\chi = Bu \text{ et } \langle Bu_k, u_k\rangle \longrightarrow \langle \chi, u\rangle \text{ quand } k \to +\infty.$$

Puisque $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, alors

$$u_k \to u \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \text{ pour une sous-suite extraite } (u_k)_k. \tag{3.13}$$

Or, $(u_k)_k$ est une suite bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, par conséquent $(|\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k)_k$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$, et donc

$$|\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k \rightharpoonup |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \text{ dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N \text{ quand } k \to +\infty. \tag{3.14}$$

Comme $u_k \to u$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, alors

$$|u_k|^{p(x)-2}u_k \longrightarrow |u|^{p(x)-2}u \quad \text{dans} \quad L^{p'(x)}(\Omega) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty. \tag{3.15}$$

Il est clair que, pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \chi, v\rangle &= \lim_{k\to+\infty} \langle Bu_k, v\rangle \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k \nabla v\, dx + \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |u_k|^{p(x)-2} u_k v\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u v\, dx \\
&= \langle Bu, v\rangle.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On conclut que $\chi = Bu$.

D'une part, de (3.13) on déduit que

$$\int_\Omega |u_k|^{p(x)}\, dx \longrightarrow \int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx \quad \text{quand} \quad k \to +\infty, \tag{3.17}$$

et en utilisant (3.12) et (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to+\infty} \langle B(u_k), u_k\rangle &= \limsup_{k+\to\infty} \left\{ \int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega |u_k|^{p(x)}\, dx \right\} \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Par conséquent

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)}\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx. \tag{3.19}$$

D'autre part, pour tout $\xi, \eta \in I\!R^N$, les inégalités suivantes ont lieu (voir [44, 68]) :

$$[(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi-\eta)](|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{p}} \geq (p-1)|\xi-\eta|^p, \quad 1 < p < 2,$$

et

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi-\eta) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi-\eta|^p, \quad p \geq 2.$$

Des deux inégalités ci-dessus, on déduit que

$$\int_\Omega (|\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_k - \nabla u)\, dx \geq 0, \tag{3.20}$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)} dx \geq -\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)-2}\nabla u_k \nabla u dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla u_k dx.$$

Par (3.14), on obtient

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)}\,dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx,$$

ce qui donne en utilisant (3.19),

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(x)}\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,dx. \tag{3.21}$$

Des relations (3.16), (3.17) et (3.21), il résulte que

$$\langle Bu_k, u_k\rangle \longrightarrow \langle \chi, u\rangle \ \text{ lorsque } \ k\to+\infty.$$

Enfin, d'après le théorème classique de Lions[48] (voir la section 1.3) et le Lemme (3.3.1), il existe au moins une solution $u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de (3.10).

ETAPE 2. Estimations sur les séquences $\{\nabla T_k(u_n)\}$,$\{u_n\}$.

Assertion 1. $\nabla T_k(u_n)$ est bornée dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$.

Prenons $T_k(u_n)$ comme une fonction test dans (3.10), pour obtenir

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_nT_k(u_n)\,dx = \int_\Omega f_nT_k(u_n)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u_n)\,dx.$$

Sachant que $|u_n|^{p(x)-2}u_nT_k(u_n)\geq 0$ et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx &\leq \int_\Omega f_nT_k(u_n)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u_n)\,dx\\ &\leq k\|f_n\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega \frac{p(x)-1}{p(x)}|F|^{p'(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx\\ &\leq k\|f_n\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega \frac{p^+-1}{p^+}|F|^{p'(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p^-}|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{p^--1}{p^-}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx \leq k\|f\|_{L^1(\Omega)} + C_1.$$

La Proposition 1.1.1 entraîne que

$$\begin{aligned}\frac{p^--1}{p^-}\|\nabla T_k(u_n)\|^{\gamma}_{p(x)} &\leq k\|f\|_{L^1(\Omega)} + C_1\\ &\leq C_2k \quad \forall k>1,\end{aligned} \tag{3.22}$$

avec

$$\gamma = \begin{cases} p^+ & \text{si} \quad \|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} \leq 1, \\ p^- & \text{si} \quad \|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} > 1. \end{cases}$$

Assertion 2. u_n converge en mesure vers une fonction u. Cela consiste à montre que $(u_n)_{n\in I\!N^*}$ est une suite de Cauchy en mesure.

Soit k est assez grand. En utilisant l'inégalité de type Hölder, l'inégalité de Poincaré et (3.22), on obtient

$$\begin{aligned} k \text{ mes}(\{|u_n| > k\}) &= \int_{\{|u_n|>k\}} |T_k(u_n)|\, dx \leq \int_\Omega |T_k(u_n)|\, dx \\ &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})(\text{mes}(\Omega) + 1)^{\frac{1}{p'^-}} \|T_k(u_n)\|_{p(x)} \\ &\leq C_2' \|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} \\ &\leq C_3 k^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ce qui donne,

$$\text{mes}(\{|u_n| > k\}) \leq \frac{C_3}{k^{1-\frac{1}{\gamma}}} \quad \forall k > 1. \tag{3.24}$$

En outre, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{mes } (\{|u_n - u_m| > \delta\}) \leq \text{mes } (\{|u_n| > k\}) + \text{mes } (\{|u_m| > k\}) \\ + \text{mes } (\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\}). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme $(T_k(u_n))_{n\in I\!N^*}$ est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, il existe $v_k \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$T_k(u_n) \rightharpoonup v_k \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

et de l'injection compacte, on a

$$T_k(u_n) \longrightarrow v_k \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \qquad \text{et p.p. dans } \Omega.$$

Par conséquent, on peut supposer que $T_k(u_n)$ est une suite de Cauchy en mesure.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après les relations (3.24) et (3.25), certaine constante $k(\varepsilon) > 0$ telle que $\text{mes}(\{|u_n - u_m| > \delta\}) < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq n_0(k(\varepsilon), \delta)$.

Ce qui montre que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure, et converge donc presque partout vers une fonction mesurable u. Par conséquent

$$\begin{aligned} &T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ &T_k(u_n) \rightarrow T_k(u) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \;\text{ et p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Etape 3. Convergence forte des tronquées.

Pour $k > 0$ fixé et pour $h > k$, on choisit

$$\omega_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)), \tag{3.27}$$

comme fonction test dans (3.10). Il s'ensuit que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\omega_n\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n\omega_n\,dx = \int_\Omega f_n\omega_n\,dx + \int_\Omega F\nabla\omega_n\,dx. \tag{3.28}$$

Puisque u_n et ω_n ont le même signe sur le sous-ensemble $\{x \in \Omega,\ \ |u_n(x)| > k\}$, par (3.28), on déduit que,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\omega_n\,dx + \int_{\{|u_n|\le k\}} |u_n|^{p(x)-2}u_n\omega_n\,dx \le \int_\Omega f_n\omega_n\,dx + \int_\Omega F\nabla\omega_n\,dx. \tag{3.29}$$

Notons par $\varepsilon_h^1(n), \varepsilon_h^2(n), ...$ les différentes séquences de nombres réels qui convergent vers zéro lorsque n tend vers l'infini pour toute valeur fixée de h.
Observons que,

$$\int_\Omega f_n\omega_n\,dx = \int_\Omega fT_{2k}(u - T_h(u))\,dx + \varepsilon_h^1(n), \tag{3.30}$$

et

$$\int_\Omega F\nabla\omega_n\,dx = \int_\Omega F\nabla T_{2k}(u - T_h(u))\,dx + \varepsilon_h^2(n). \tag{3.31}$$

En séparant la première intégrale sur le côté gauche de (3.29), où $|u_n| \le k$ et $|u_n| > k$ on peut écrire,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\omega_n\,dx &= \int_{\{|u_n|\le k\}} |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\,dx \\ &\quad + \int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\omega_n\,dx.\end{aligned} \tag{3.32}$$

En choisissant $M = 4k + h$, il est clair que $\nabla\omega_n = 0$ sur l'ensemble $\{|u_n| > M\}$. Par conséquent

$$\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\omega_n\,dx \ge -\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)|\nabla T_k(u)|\,dx, \tag{3.33}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|\leq k\}} &|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &= \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx.\end{aligned} \tag{3.34}$$

En utilisant (3.33) et (3.34), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\omega_n\,dx \ &\geq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\quad -\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)|\nabla T_k(u)|\,dx.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Le deuxième terme de la partie droite de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

En effet, puisque $(|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n))_n$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$ lorsque $\nabla T_k(u)\chi_{|u_n|>k}$ converge fortement vers 0 dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, ceci donne

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\omega_n dx \geq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]dx+\varepsilon_h^3(n). \tag{3.36}$$

D'autre part, le terme de la partie droite de (3.36) peut être écrit comme,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\quad= \int_\Omega [|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\quad\quad+\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))\,dx.\end{aligned} \tag{3.37}$$

or $\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))\,dx \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n\to+\infty.$$

alors, nous pouvons prendre

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u))\,dx = \varepsilon_h^4(n). \tag{3.38}$$

De (3.36)-(3.38), il devient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\omega_n\,dx\\ &\geq \int_\Omega [|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx+\varepsilon_h^5(n).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le second terme du membre de gauche de (3.29) peut être estimé comme suit,

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|\leq k\}} |u_n|^{p(x)-2}u_n\omega_n\,dx &= \int_{\{|u_n|\leq k\}} |T_k(u_n)|^{p(x)-2}T_k(u_n)(T_k(u_n)-T_k(u))\,dx,\\ &\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\||T_k(u_n)|^{p(x)-1}\|_{p'(x)}\|T_k(u_n)-T_k(u)\|_{p(x)}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Comme $|T_k(u_n)|^{p(x)-1}$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et $T_k(u_n)\to T_k(u)$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, on déduit que

$$\int_{\{|u_n|\leq k\}} |u_n|^{p(x)-2}u_n\omega_n\,dx = \varepsilon_h^6(n). \tag{3.41}$$

La combinaison de (3.29) – (3.31), (3.39) et (3.41), nous donne

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\qquad\leq \int_\Omega fT_{2k}(u-T_h(u))\,dx+\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\,dx+\varepsilon_h^7(n).\end{aligned} \tag{3.42}$$

On passe ensuite à la limite lorsque $n\to+\infty$ dans (3.42) pour obtenir,

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega [|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\qquad\leq \int_\Omega fT_{2k}(u-T_h(u))\,dx+\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\,dx.\end{aligned} \tag{3.43}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le premier terme du membre de droit de (3.43) converge vers 0 lorsque h tend vers l'infini.
Maintenant, nous prouvons que le deuxième terme du membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers l'infini, nous prenons $(T_{2k}(u_n-T_h(u_n))$ comme fonction test dans (3.10), ceci devient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla T_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx+\int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_nT_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx\\ &\qquad\leq \int_\Omega f_nT_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx+\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx,\end{aligned} \tag{3.44}$$

et comme $|u_n|^{p(x)-2}u_nT_{2k}(u_n-T_h(u_n))\geq 0$, alors

$$\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}} |\nabla u_n|^{p(x)}\,dx \leq \int_\Omega f_nT_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx+\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}} F\nabla u_n\,dx. \tag{3.45}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}} F\nabla u_n\,dx &\leq \frac{p(x)-1}{p(x)}\int_{\{h\leq|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx+\frac{1}{p(x)}\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\,dx,\\ &\leq \frac{p^+-1}{p^+}\int_{\{h\leq|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx+\frac{1}{p^-}\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\,dx,\end{aligned} \tag{3.46}$$

et de (3.45), on déduit

$$\frac{p^- -1}{p^-}\int_{\{h\leq|u_n|\leq 2k+h\}}|\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega f_n T_{2k}(u_n-T_h(u_n))dx+\frac{p^+-1}{p^+}\int_{\{h\leq|u_n|\}}|F|^{p'(x)}dx. \tag{3.47}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u-T_h(u))|^{p(x)}\,dx &\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u_n-T_h(u_n))|^{p(x)}\,dx,\\ &\leq \frac{p^-}{p^- -1}\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_nT_{2k}(u_n-T_h(u_n))\,dx\\ &+\frac{p^-(p^+-1)}{p^+(p^- -1)}\liminf_{n\to+\infty}\int_{\{h\leq|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Comme $f_n\to f$ dans $L^1(\Omega)$, alors on fait tendre successivement n puis h vers l'infini pour obtenir,

$$\limsup_{h\to+\infty}\int_{\{h\leq|u|\leq 2k+h\}}|\nabla u|^{p(x)}\,dx=0.$$

Par conséquent, de (3.46), on déduit que

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\,dx=0.$$

par conséquent, d'après (3.43), on fait tendre h vers l'infini, pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega[|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)-|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]dx=0.$$

Prenons $a(x,u,\nabla u)=|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ comme cas particulier du résultat de [19, Lemme 3.3], et en plus de (3.20), on déduit que

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \ \text{ p.p. dans } \ \Omega. \tag{3.49}$$

Par conséquent, on conclut que

$$\nabla T_k(u_n)\longrightarrow \nabla T_k(u) \ \text{ p.p. dans } \ \Omega.$$

En outre,

$$T_k(u_n)\longrightarrow T_k(u) \ \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \ \ \forall k>0. \tag{3.50}$$

ETAPE 4. Passage à la limite lorsque $n \to +\infty$.

En prenant $T_k(u_n - \psi)$ comme fonction test dans (3.10), avec $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on obtient,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_k(u_n-\psi)\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n T_k(u_n-\psi)\,dx \\ = \int_\Omega f_n T_k(u_n-\psi)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u_n-\psi)\,dx,\end{aligned} \tag{3.51}$$

où $M = k + ||\psi||_\infty$.
Comme,

$$|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n) \rightharpoonup |\nabla T_M(u)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u) \quad \text{dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N.$$

d'après le lemme de Fatou , on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_M(u)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u)\nabla T_k(u-\psi)\,dx \\ \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega |\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_k(u_n-\psi)\,dx.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Pour le deuxième terme de la partie droite de (3.51), on a

$$\int_\Omega F\nabla T_k(u_n-\psi)\,dx \longrightarrow \int_\Omega F\nabla T_k(u-\psi)\,dx \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty, \tag{3.53}$$

or $\nabla T_k(u_n - \psi) \rightharpoonup \nabla T_k(u-\psi)$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, pour $F \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$.
D'autre part, on a

$$\int_\Omega f_n T_k(u_n-\psi)\,dx \longrightarrow \int_\Omega f T_k(u-\psi)\,dx \ \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty. \tag{3.54}$$

Afin de passer à la limite dans le problème approché, nous allons montrer que

$$|u_n|^{p(x)-2}u_n \longrightarrow |u|^{p(x)-2}u \qquad \text{dans } \ L^1(\Omega). \tag{3.55}$$

On a $u_n \to u$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, et par suite $|u_n|^{p(x)-2}u_n \longrightarrow |u|^{p(x)-2}u$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$. Grâce à l'injection continue, on déduit que $|u_n|^{p(x)-2}u_n \longrightarrow |u|^{p(x)-2}u$ dans $L^1(\Omega)$. Grâce aux relations (3.52) – (3.55) on peut passer à la limite dans (3.51), ce qui donne que u est une solution entropique de (3.1).

Chapitre 4

Etude de problèmes elliptiques fortement non linéaire avec second membre mesure

4.1 Introduction

Ce chapitre [1] est consacré à l'étude des problèmes elliptiques de la forme :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

pour une certaine donnée mesure μ qui admet une décomposition dans $L^1(\Omega) + W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ (voir [57]). Notons que $g(x,s,\xi)$ est un terme non-linéaire qui satisfait une condition de croissance par rapport à ξ et une condition de signe par rapport à s.

Ce chapitre à pour objectif de généraliser le travail déjà fait dans le chapitre précédent, pour de opérateurs plus généraux que $|\xi|^{p(x)-2}\xi$.

[1] Ce chapitre est l'objet de l'article [14], publié à Afr. diaspora J. Math (ADJM).

4.2 Préliminaires mathématiques

Les hypothèses ci-dessous sont nécessaires à l'étude du problème (4.1) :
$a : \Omega \times I\!\!R \times I\!\!R^N \to I\!\!R^N$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions de coercitivité, de monotonie stricte et de croissance de type Leray-Lions [47]. Plus précisement,
Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout r et ξ et pour presque tout $x \in \Omega$, on ait

$$a(x, r, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^{p(x)}. \tag{4.2}$$

Pour tout s, ξ et η et presque tout $x \in \Omega$, on a

$$[a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)](\xi - \eta) > 0 \text{ pour } \xi \neq \eta \in I\!\!R^N. \tag{4.3}$$

Il existe $k(x) \in L^{p'(x)}(\Omega)$ et $\beta > 0$ tels que pour tout r et ξ et pour presque tout $x \in \Omega$, on ait

$$|a(x, r, \xi)| \leq \beta[k(x) + |r|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}]. \tag{4.4}$$

Nous étudions le problème (4.1) avec une hypothèse supplémentaire qui portent sur la non linéarité g.
Plus précisement, nous supposons que $g : \Omega \times I\!\!R \times I\!\!R^N \longmapsto I\!\!R$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant :

$$g(x, s, \xi).s \geq 0 \tag{4.5}$$

et

$$|g(x, s, \xi)| \leq b(|s|)(c(x) + |\xi|^{p(x)}) \tag{4.6}$$

où $b : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ est une fonction positive croissante et $c(.)$ est une fonction positive qui appartient à $L^1(\Omega)$.
En outre, nous supposons que

$$\mu = f - \mathrm{div} F, \tag{4.7}$$

où $f \in L^1(\Omega)$ et $F \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$.

4.3 Existence de solutions entropiques

Définition 4.3.1 *Une fonction mesurable $u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est une solution entropique du problème (4.1) si,*

$$(\mathcal{P}')\begin{cases} u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega), \qquad g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega) \quad et \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)\,dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)\,dx \\ \qquad\qquad \displaystyle\leq \int_\Omega fT_k(u-v)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u-v)\,dx \end{cases} \tag{4.8}$$

pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tout $k > 0$.

Théorème 4.3.1 *Si les hypothèses* (4.2) – (4.4) *et (4.7) ont lieu et si $g(x,s,\xi)$ satisfait (4.5)-(4.6), alors il existe au moins une solution entropique du problème (4.1).*

Preuve d'existence de la solution entropique

Soit $(f_n)_{n\in I\!N}$ une suite de fonction telle que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ et $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$.

On considère le problème approché suivant :

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v dx + \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)v dx = \int_\Omega f_n v dx + \int_\Omega F\nabla v dx, \\ \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases} \tag{4.9}$$

où $g_n(x,s,\xi) = \dfrac{g(x,s,\xi)}{1+\frac{1}{n}|g(x,s,\xi)|}$.

Notons que $g_n(x,s,\xi)$ satisfait les conditions suivantes :

$$g_n(x,s,\xi).s \geq 0, \qquad |g_n(x,s,\xi)| \leq |g(x,s,\xi)| \;\text{ et }\; |g_n(x,s,\xi)| \leq n.$$

Nous définissons l'opérateur $G_n : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ par,

$$\langle G_n u, v\rangle = \int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)v\,dx$$

et

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v\,dx.$$

De l'inégalité de type Hölder, pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ on a,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)v\,dx\Big| &\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|g_n(x,u,\nabla u)\|_{p'(x)}\|v\|_{p(x)},\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})(\int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)^{p'(x)}\,dx+1)^{\frac{1}{p'^-}}\|v\|_{p(x)},\\
&\leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})n^{\frac{p^+}{p^-}}(mes(\Omega)+1)^{\frac{1}{p'^-}}\|v\|_{p(x)},\\
&\leq C_n\|v\|_{1,p(x)},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

pour tout n fixé.

Lemme 4.3.1 *L'opérateur $B_n = A+G_n$ de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ est pseudo-monotone. De plus, B_n est coercif, c'est à dire :*

$$\frac{\langle B_n v, v\rangle}{\|v\|_{1,p(x)}} \to +\infty \quad si \quad \|v\|_{1,p(x)} \to +\infty.$$

Preuve du Lemme 4.3.1

En utilisant l'inégalité de Hölder et la condition de croissance (4.4), on déduit que A est borné, et par (4.10), on a B_n est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. La coercivité découle de (4.2) et (4.5). Il reste à montrer que B_n est pseudo-monotone.
Soit $(u_k)_k$ une suite dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega),\\ B_n u_k \rightharpoonup \chi \text{ dans } \quad W^{-1,p'(x)}(\Omega),\\ \limsup_{k\to\infty}\langle B_n u_k, u_k\rangle \leq \langle \chi, u\rangle. \end{cases} \tag{4.11}$$

Nous allons montrer que

$$\chi = B_n u \ \text{ et } \ \langle B_n u_k, u_k\rangle \to \langle \chi, u\rangle \ \text{ quand } \ k \to +\infty.$$

D'abord, comme $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, alors

$$u_k \to u \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \tag{4.12}$$

pour une sous-suite encore notée $(u_k)_k$.
Puisque $(u_k)_k$ est une suite bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, alors par (4.4) $(a(x,u_k,\nabla u_k))_k$

est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$, donc il existe une fonction $\varphi \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$ tel que

$$a(x, u_k, \nabla u_k) \rightharpoonup \varphi \quad \text{dans} \quad (L^{p'(x)}(\Omega))^N \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty. \tag{4.13}$$

D'une manière analogue, il est facile de voir $(g_n(x, u_k, \nabla u_k))_k$ est borné dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ par rapport à k, alors il existe une fonction $\psi_n \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tel que

$$g_n(x, u_k, \nabla u_k) \rightharpoonup \psi_n \quad \text{dans} \quad L^{p'(x)}(\Omega) \quad \text{quand} \quad k \to \infty. \tag{4.14}$$

Il est clair que, pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \chi, v \rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle B_n u_k, v \rangle, \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla v \, dx + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) v \, dx. \\ &= \int_\Omega \varphi \nabla v \, dx + \int_\Omega \psi_n v \, dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

D'autre part, de (4.12) on a

$$\int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) u_k \, dx \to \int_\Omega \psi_n u \, dx \quad \text{quand} \quad k \to \infty. \tag{4.16}$$

et de (4.11) et (4.15), nous avons

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \langle B_n(u_k), u_k \rangle &= \limsup_{k\to\infty} \left\{ \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla u_k \, dx + \int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) u_k \, dx \right\}, \\ &\leq \int_\Omega \varphi \nabla u \, dx + \int_\Omega \psi_n u \, dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Par conséquent

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla u_k \, dx \leq \int_\Omega \varphi \nabla u \, dx. \tag{4.18}$$

Grâce à (4.3), on aura

$$\int_\Omega (a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u_k, \nabla u))(\nabla u_k - \nabla u) \, dx \geq 0. \tag{4.19}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla u_k \, dx \geq & - \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \nabla u \, dx \\ & + \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla u \, dx + \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \nabla u_k \, dx. \end{aligned}$$

De (4.13), on déduit que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k) \nabla u_k \, dx \geq \int_\Omega \varphi \nabla u \, dx.$$

Cela implique en utilisant (4.18)

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u_k\,dx=\int_\Omega \varphi\nabla u\,dx. \tag{4.20}$$

Des relations (4.15), (4.16) et (4.20), on obtient

$$\langle B_n u_k,u_k\rangle \to \langle \chi,u\rangle \quad\text{quand}\quad k\to+\infty.$$

D'autre part, de (4.20), on peut déduire que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (a(x,u_k,\nabla u_k)-a(x,u_k,\nabla u))(\nabla u_k-\nabla u)\,dx=0,$$

et ainsi, grâce au Lemme 2.2.3, il s'ensuit que

$$\nabla u_n\to\nabla u\quad\text{p.p. dans}\quad\Omega.$$

On conclut que

$$a(x,u_k,\nabla u_k)\rightharpoonup a(x,u,\nabla u)\quad\text{dans}\quad (L^{p'(x)}(\Omega))^N$$

et

$$g_n(x,u_k,\nabla u_k)\rightharpoonup g_n(x,u,\nabla u)\quad\text{dans}\quad L^{p'(x)}(\Omega).$$

Ce qui donne $\chi=B_n u$.
Enfin, en utilisant le théorème classique de Lions [48] (voir la section 1.3) et la base du Lemme 4.3.1, il existe au moins une solution entropique $u_n\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ du problème (4.1).

ETAPE 2. Estimations a priori des suites $\{\nabla T_k(u_n)\}$, $\{u_n\}$.

Assertion 1. $\nabla T_k(u_n)$ est bornée dans $L^{p(x)}(\Omega)$.
En considérant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (4.9), on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n)\,dx+\int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n)\,dx\\=\int_\Omega f_nT_k(u_n)\,dx+\int_\Omega F\nabla T_k(u_n)\,dx.\end{aligned}$$

Comme $g_n(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n) \geq 0$, grâce à (4.2) et à l'inégalité de Young, on déduit que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx &\leq \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n)\,dx \\
&\leq \int_\Omega f_n T_k(u_n)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u_n)\,dx \\
&\leq k\int_\Omega |f_n|\,dx + \int_\Omega \frac{F}{(\frac{\alpha}{2}p(x))^{\frac{1}{p(x)}}}\Big(\big(\frac{\alpha}{2}p(x)\big)^{\frac{1}{p(x)}}\nabla T_k(u_n)\Big)\,dx \\
&\leq k\|f_n\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega \frac{|F|^{p'(x)}}{p'(x)(\frac{\alpha}{2}p(x))^{\frac{p'(x)}{p(x)}}}\,dx + \int_\Omega \frac{\frac{\alpha}{2}p(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{p(x)}\,dx \\
&\leq k\|f\|_{L^1(\Omega)} + C_0\int_\Omega |F|^{p'(x)}\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx,
\end{aligned}$$

où $C_0 = p'^{+}(\frac{\alpha}{2}p^{+})^{\frac{p'^{+}}{p^{-}}} = p'^{+}\exp\left(\frac{p'^{+}}{p^{-}}\ln(\frac{\alpha}{2}p^{+})\right)$,
par conséquent

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx \leq k\|f\|_{L^1(\Omega)} + C_1.$$

Ceci entraîne par la Proposition 1.1.1 que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\|\nabla T_k(u_n)\|^{\gamma}_{p(x)} &\leq k\|f\|_{L^1(\Omega)} + C_1 \\
&\leq C_2 k \quad \forall\, k > 1
\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec

$$\gamma = \begin{cases} p^{+} & \text{si } \|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} \leq 1, \\ p^{-} & \text{si } \|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} > 1, \end{cases}$$

Assertion 2. u_n converge en mesure vers une fonction u.

Pour la prouver, nous montrons que u_n est une suite de Cauchy en mesure.

Soit $k > 0$ assez grand. Combinant l'inégalité de Poincaré et (4.21), on aura

$$\begin{aligned}
k\ \text{mes}(\{|u_n| > k\}) &= \int_{\{|u_n|>k\}} |T_k(u_n)|\,dx \leq \int_\Omega |T_k(u_n)|\,dx, \\
&\leq C_2'\|\nabla T_k(u_n)\|_{p(x)} \\
&\leq C_3 k^{\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ce qui donne,

$$\text{mes}(\{|u_n| > k\}) \leq \frac{C_3}{k^{1-\frac{1}{\gamma}}} \quad \forall k > 1. \tag{4.23}$$

Par conséquent

$$\text{mes}(\{|u_n| > k\}) \to 0 \text{ quand } k \to +\infty \ \text{ puisque } 1 - \frac{1}{\gamma} > 1.$$

De plus, pour chaque $\delta > 0$ fixé et chaque réel $k > 0$, on sait que

$$\{|u_n - u_m| > \delta\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{mes }(\{|u_n - u_m| > \delta\}) \leq \text{mes }(\{|u_n| > k\}) + \text{mes }(\{|u_m| > k\}) \\ + \text{ mes }\ (\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Comme $(T_k(u_n))_n$ est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, par conséquent, il existe $v_k \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que

$$T_k(u_n) \rightharpoonup v_k \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

et d'après l'injection compacte $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, on a

$$T_k(u_n) \to v_k \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega.$$

Par conséquent, on peut supposer que $T_k(u_n)$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω.

Soit $\varepsilon > 0$; des relations (4.23) et (4.24), il existe une constante $k(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $n, m \geq n_0(k(\varepsilon), \delta)$ on a mes$(\{|u_n - u_m| > \delta\}) < \varepsilon$. Ce qui montre que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure, donc converge presque partout vers une fonction mesurable u. Par conséquent

$$\begin{aligned} &T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ &T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{4.25}$$

ETAPE 3. Convergence forte des tronquées.

Fixons $k > 0$ et soit $h > k$.

On choisit comme fonction test dans (4.9),

$$\begin{cases} v_n = \varphi(\omega_n) \\ \omega_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)) \end{cases} \tag{4.26}$$

avec $\varphi(s) = se^{\lambda s^2}$, $\lambda = (\frac{b(k)}{\alpha})^2$.

Il est bien connu que ([26], lemme 1),

$$\varphi'(s) - \frac{b(k)}{\alpha}|\varphi(s)| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall s \in I\!R. \tag{4.27}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\, dx + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi(\omega_n)\, dx \\ &\qquad = \int_\Omega f_n\varphi(\omega_n)\, dx + \int_\Omega F\nabla\varphi(\omega_n)\, dx. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Comme $g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi(\omega_n) > 0$ sur le sous-ensemble $\{x \in \Omega,\ |u_n(x)| > k\}$, alors selon (4.28), on déduit que,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\, dx + \int_{\{|u_n|\leq k\}} g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi(\omega_n)\, dx \\ &\qquad \leq \int_\Omega f_n\varphi(\omega_n)\, dx + \int_\Omega F\nabla\varphi(\omega_n)\, dx. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Notons par $\varepsilon_h^1(n), \varepsilon_h^2(n), ...$ les différentes suites de nombres réels qui convergent vers zéro lorsque n tend vers l'infini pour toute valeur fixée de h.

Notons que,

$$\int_\Omega f_n\varphi(\omega_n)\, dx = \int_\Omega f\varphi(T_{2k}(u - T_h(u)))\, dx + \varepsilon_h^1(n), \tag{4.30}$$

et

$$\int_\Omega F\nabla\varphi(\omega_n)\, dx = \int_\Omega F\nabla T_{2k}(u - T_h(u))\varphi'(T_{2k}(u - T_h(u)))\, dx + \varepsilon_h^2(n). \tag{4.31}$$

En séparant la première intégrale sur le côté gauche de (4.29), où $|u_n| \leq k$ et $|u_n| > k$ il vient,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\, dx \\ &= \int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\, dx \\ &+ \int_{\{|u_n|>k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\, dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Prenons $M = 4k + h$, or $a(x, s, \xi)\xi \geq 0$ et le fait que $\nabla\omega_n = 0$ sur l'ensemble $\{|u_n| > M\}$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u_n|>k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\, dx \\ &\qquad\qquad \geq -\varphi'(2k)\int_{\{|u_n|>k\}} |a(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n))||\nabla T_k(u)|\, dx, \end{aligned} \tag{4.33}$$

et comme $a(x,s,0)=0 \ \ \forall s \in I\!R$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|\leq k\}} & a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &= \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Combinant (4.33) et (4.34), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\,dx \ \ &\geq \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &\quad -\varphi'(2k)\int_{\{|u_n|>k\}} |a(x,T_M(u_n),\nabla T_M(u_n))||\nabla T_k(u)|\,dx.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Le deuxième terme du membre de droite de (4.35) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

En effet, puisque la suite $(a(x,T_M(u_n),\nabla T_M(u_n)))_n$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$ lorsque $\nabla T_k(u)\chi_{|u_n|>k}$ tend vers 0 fortement dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega & a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &\geq \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx + \varepsilon_h^3(n).\end{aligned} \tag{4.36}$$

D'autre part, le terme de la partie droite de (4.36) se décompose comme suit,

$$\begin{aligned}\int_\Omega & a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &= \int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))] \\ &\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u_n)\varphi'(T_k(u_n)-T_k(u))\,dx \\ &\quad - \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\varphi'(w_n)\,dx.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Or, $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\varphi'(T_k(u_n)-T_k(u)) \to a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\varphi'(0)$ dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$ à l'aide de la continuité de l'opérateur Nemytskii, puisque $\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega & a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u_n)\varphi'(T_k(u_n)-T_k(u))\,dx \\ &= \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\varphi'(0)\,dx + \varepsilon_h^4(n).\end{aligned} \tag{4.38}$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned} -\int_\Omega & a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\varphi'(w_n)\,dx \\ &= -\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\varphi'(0)\,dx + \varepsilon_h^5(n). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Combinant (4.36)-(4.39), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega & a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\omega_n\varphi'(\omega_n)\,dx \\ &\geq \int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))] \\ &\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\varphi'(\omega_n)\,dx + \varepsilon_h^6(n). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Le second terme du membre de gauche de (4.29), peut être estimé à l'aide des relations (4.6) et (4.2) pour donner

$$\begin{aligned} \left|\int_{\{|u_n|\leq k\}} g_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(\omega_n)\,dx\right| &\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} b(k)(c(x)+|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)})|\varphi(\omega_n)|\,dx, \\ &\leq b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(\omega_n)|\,dx \\ &\quad +\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\varphi(\omega_n)|\,dx. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Comme $c(x)$ appartient à $L^1(\Omega)$, il est facile de voir que,

$$b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(\omega_n)|\,dx = b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))|\,dx + \varepsilon_h^7(n). \tag{4.42}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega & a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\varphi(\omega_n)|\,dx \\ &= \int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))] \\ &\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]|\varphi(\omega_n)|\,dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)|\varphi(\omega_n)|\,dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]|\varphi(\omega_n)|\,dx. \end{aligned} \tag{4.43}$$

On montre de même que les deux derniers termes du membre de droite de (4.43) sont de la forme $\varepsilon_h^8(n)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\{|u_n|\leq k\}} g_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(\omega_n)\,dx\right| &\leq \int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))] \\ &\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]|\varphi(\omega_n)|\,dx \\ &\quad + b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))|\,dx + \varepsilon_h^9(n) \end{aligned} \tag{4.44}$$

Des relations (4.29) – (4.31), (4.40) et (4.44), on déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega &[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\\ &\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)](\varphi'(\omega_n)-\tfrac{b(k)}{\alpha}|\varphi(\omega_n)|)\,dx\\ &\le b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))|\,dx+\int_\Omega f\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx\\ &+\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx+\varepsilon_h^{10}(n).\end{aligned} \tag{4.45}$$

qui, conjointement avec (4.27) implique que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega &[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\le 2b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))|\,dx+2\int_\Omega f\varphi(T_{2k}(u-T_k(u)))\,dx\\ &+2\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx+\varepsilon_h^{11}(n).\end{aligned} \tag{4.46}$$

On passe à la limite lorsque $n\to+\infty$ dans (4.46) pour obtenir,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega &[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx\\ &\le 2b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi(T_{2k}(u-T_h(u)))|\,dx+2\int_\Omega f\varphi(T_{2k}(u-T_k(u)))\,dx\\ &+2\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx.\end{aligned} \tag{4.47}$$

On prend ensuite $\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))$ comme fonction test dans (4.9), ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega &a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx+\int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\ &\le\int_\Omega f_n\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx+\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}F\nabla u_n\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx,\end{aligned} \tag{4.48}$$

et d'après (4.2) et la condition de signe (4.5), on aura

$$\begin{aligned}\alpha\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}&|\nabla u_n|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\ &\le\int_\Omega f_n\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\ &+\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}F\nabla u_n\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx.\end{aligned} \tag{4.49}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}} F\nabla u_n\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&=\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}\left(\frac{F}{(\frac{\alpha}{2}p(x))^{\frac{1}{p(x)}}}\right)\left(\nabla u_n(\frac{\alpha}{2}p(x))^{\frac{1}{p(x)}}\right)\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&\le\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}\left(\frac{|F|^{p'(x)}}{p'(x)(\frac{\alpha}{2}p(x))^{\frac{p'(x)}{p(x)}}}+\frac{\alpha}{2}|\nabla u_n|^{p(x)}\right)\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&\le C_4\int_{\{h\le|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx.
\end{aligned}\tag{4.50}$$

Par conséquent, de (4.49), on obtient,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\int_{\{h\le|u_n|\le 2k+h\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&\qquad\le\int_\Omega f_n\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx+C_4\int_{\{h\le|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx.
\end{aligned}\tag{4.51}$$

De plus, comme le modulaire est faiblement semi-continue inférieurement (voir le Théorème 3.2.9 [35]) et $\varphi'\ge 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u-T_h(u))|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx\\
&\le C_5\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u-T_h(u))|^{p(x)}\,dx\\
&\le C_5\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u_n-T_h(u_n))|^{p(x)}\,dx\\
&\le C_5\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla T_{2k}(u_n-T_h(u_n))|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&\le\frac{2}{\alpha}C_5\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\varphi(T_{2k}(u_n-T_h(u_n)))\,dx\\
&\quad+C_6\liminf_{n\to\infty}\int_{\{h\le|u_n|\}}|F|^{p'(x)}\,dx.
\end{aligned}\tag{4.52}$$

Comme $f_n\to f$ dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\limsup_{h\to\infty}\int_{\{h\le|u|\le 2k+h\}}|\nabla u|^{p(x)}\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx=0.$$

Donc

$$\lim_{h\to\infty}\int_\Omega F\nabla T_{2k}(u-T_h(u))\varphi'(T_{2k}(u-T_h(u)))\,dx=0.$$

Par conséquent, on utilise (4.47), pour déduire que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]\,dx=0.$$

En utilisant le Lemme 2.2.3, on conclut que

$$T_k(u_n)\to T_k(u)\text{ dans }W_0^{1,p(x)}(\Omega)\ \ \forall k>0.\tag{4.53}$$

ETAPE 4. Passage à la limite lorsque $n \to \infty$.

En utilisant $T_k(u_n - \psi)$ comme fonction test dans (4.9), avec $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n))\nabla T_k(u_n - \psi)\,dx + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)T_k(u_n - \psi)\,dx \\ = \int_\Omega f_n T_k(u_n - \psi)\,dx + \int_\Omega F\nabla T_k(u_n - \psi)\,dx.\end{aligned} \tag{4.54}$$

où $M = k + ||\psi||_\infty$. Comme

$$a(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n)) \rightharpoonup a(x, T_M(u), \nabla T_M(u)) \text{ dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N.$$

et d'après le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x, T_M(u), \nabla T_M(u))\nabla T_k(u - \psi)\,dx \\ \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega a(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n))\nabla T_k(u_n - \psi)\,dx.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Pour le deuxième terme du membre de droite de (4.54), on a

$$\int_\Omega F\nabla T_k(u_n - \psi)\,dx \to \int_\Omega F\nabla T_k(u - \psi)\,dx \quad \text{quand } n \to \infty, \tag{4.56}$$

car $\nabla T_k(u_n - \psi) \rightharpoonup \nabla T_k(u - \psi)$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$, et $F \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$.
D'autre part, on a

$$\int_\Omega f_n T_k(u_n - \psi)\,dx \to \int_\Omega f T_k(u - \psi)\,dx \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{4.57}$$

Afin de passer à la limite dans le problème approché, nous allons montrer que

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u) \text{ dans } L^1(\Omega). \tag{4.58}$$

En particulier, il suffit de prouver l'équi-intégrabilité de la suite $\{|g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\}$. Pour ce faire, nous prenons $T_{l+1}(u_n) - T_l(u_n)$ comme fonction test dans (4.9), on obtient alors

$$\int_{\{|u_n|>l+1\}} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\,dx \leq \int_{\{|u_n|>l\}} |f_n|\,dx.$$

Soit ε fixé. Alors il existe $l(\varepsilon) \geq 1$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>l(\varepsilon)\}} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.59}$$

Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \Omega$, on a

$$\int_E |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx \le \int_E b(l(\varepsilon))(c(x) + |\nabla T_{l(\varepsilon)}(u_n)|^{p(x)})\, dx + \int_{\{|u_n|>l(\varepsilon)\}} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx. \tag{4.60}$$

De la relation (4.53), on déduit qu'il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_E b(l(\varepsilon))(c(x) + |\nabla T_{l(\varepsilon)}(u_n)|^{p(x)})\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \mathrm{mes}(E) < \eta(\varepsilon). \tag{4.61}$$

Enfin, en combinant (4.59) et (4.61), on a facilement

$$\int_E |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx < \varepsilon \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \mathrm{mes}(E) < \eta(\varepsilon).$$

Par conséquent, on déduit que $(g_n(x, u_n, \nabla u_n))_n$ est uniformément équi-integrable dans Ω.

Grâce aux relations (4.55)-(4.58), on passe à la limite dans (4.54) afin d'obtenir que u est solution du problème (4.1).

Chapitre 5

Etude de problèmes d'obstacle liés à un problème elliptique non linéaire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons le problème d'obstacle associé à l'équation elliptique quasi-linéaire suivante :

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = f \in L^1(\Omega), \tag{5.1}$$

dans des espaces de Lebesgue et Sobolev généralisés. Nous démontrons un résultat d'existence de solutions entropiques sous l'hypothèse g de signe constant.

Récemment, certains travaux sont parus dans l'étude des problèmes d'obstacle dans des espaces de Lebesgue et Sobolev généralisés (voir [36],[61],[64]).

L'étude du problème d'obstacle associé à (5.1) dans le cas des puissances fixes a été fait par [16] où ils obtiennent pour une donnée $f \in L^1(\Omega)$, des solutions dans des espaces Orlicz-Sobolev. Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au problème d'obstacle associé à l'équation (5.1). La technique utilisée pour étudier ce problème est une technique d'approximation du problème d'obstacle associé à (5.1) par le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_\epsilon)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon)) + g_\epsilon(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon) &= f_\epsilon \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $g_\epsilon(x,s,\xi) = \dfrac{g(x,s,\xi)}{1+\epsilon|g(x,s,\xi)|}$ et f_ϵ est une suite de fonctions régulières.
Cependant, cette approximation ne nous permet pas d'obtenir des estimations a priori souhaitées, cela est dû au fait que $u_\epsilon g_\epsilon(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon)$ n'a pas un signe constant. Aussi pour surmonter cette difficulté, on ajoute un terme de pénalisation, ce qui nous donne le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_\epsilon^\sigma)\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)) + g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma) \; - \dfrac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma^-})|^{p(x)-1} & = f_\epsilon \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon^\sigma & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases},$$

où $g_\epsilon^\sigma(x,s,\xi) = \delta_\sigma(s) g_\epsilon(x,s,\xi)$ avec $\delta_\sigma(s)$ est une fonction Lipschitzienne croissante.
Le chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous présentons les hypothèses et rappelons quelque lemmes fondamentaux. Dans la section 3, nous prouvons l'existence de solutions entropiques au problème d'obstacle associé à (5.1) dans le cas d'une nonlinéarité positive g. Enfin, dans la section 4, nous prouvons l'existence de solutions entropiques du problème d'obstacle associé à (5.1) dans le cas d'une non- linéarité négative g.

5.2 Préliminaires mathématiques

Tout comme dans le chapitre précédent, nous utilisons les conditions du type de Leray- Lions, données ci-aprés :
Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout r et ξ et pour presque tout $x \in \Omega$, on ait

$$a(x,r,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^{p(x)} \tag{5.2}$$

Pour tout s, ξ et η et pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$[a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)](\xi - \eta) > 0 \text{ pour tout } \xi \neq \eta \in I\!R^N \tag{5.3}$$

Il existe $k(x) \in L^{p'(x)}(\Omega)$ et $\beta > 0$ tels que pour tout r et ξ et presque tout x on ait

$$|a(x,r,\xi)| \leq \beta[k(x) + |r|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}] \tag{5.4}$$

En outre, soit $g : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une fonction de Carathéodory ayant un signe constant de telle sorte que pour presque pour tout x dans Ω et pour tout $s \in I\!R$ et

$\xi \in I\!\!R^N$,

$$|g(x,s,\xi)| \leq b(|s|)(c(x)+|\xi|^{p(x)}) \tag{5.5}$$

et

$$g(x,0,\xi)=0, \tag{5.6}$$

où $b : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ est une fonction continue non décroissante et $c(.)$ est une fonction croissante appartenant à $L^1(\Omega)$.

5.3 Cas où la nonlinéarité g est positive

Nous considérons tout d'abord l'ensemble convexe

$$K_0 = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); u \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}. \tag{5.7}$$

Théorème 5.3.1 *Supposons que* $(5.4)-(5.6)$ *ont lieu et* $f \in L^1(\Omega)$. *Alors, il existe au moins une solution entropique du problème unilatérale suivant :*

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l} u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega),\ u \geq 0 \ p.p.\ dans\ \Omega,\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)\,dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)\,dx \\ \qquad\qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega fT_k(u-v)\,dx, \\ \forall v \in K_0 \cap L^\infty(\Omega), \quad \forall k > 0. \end{array}\right.$$

Preuve du Théorème 5.3.1

Nous considérons le problème approché suivant,

$$(\mathcal{P}_\epsilon)\left\{\begin{array}{rl} -\text{div}(a(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon)) + g_\epsilon(x,u_\epsilon,\nabla u_\epsilon) & = f_\epsilon \ \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon & = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.8}$$

où $g_\epsilon(x,s,\xi) = \dfrac{g(x,s,\xi)}{1+\epsilon|g(x,s,\xi)|}$, f_ϵ est une fonction régulière telle que $f_\epsilon \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ et $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$.

Notons que $g_\epsilon(x,s,\xi)$ satisfait les conditions suivantes,

$$|g_\epsilon(x,s,\xi)| \leq |g(x,s,\xi)| \leq b(|s|)(c(x)+|\xi|^{p(x)}) \ \text{ et } \ |g_\epsilon(x,s,\xi)| \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Néanmoins, il semble un peu difficile d'obtenir des estimations a priori, compte tenu du fait que $u_\epsilon g_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon)$ n'a pas de signe constant.

Afin d'éviter cet inconvénient, nous approchons la fonction sign par une fonction Lipschitziènne croissante. En effet, on considère pour $\sigma > 0$ fixé,

$$\delta_\sigma(s) = \begin{cases} \frac{s-\sigma}{s} & \text{si } s \geq \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } |s| \leq \sigma \\ \frac{-s-\sigma}{s} & \text{si } s < -\sigma < 0. \end{cases}$$

Maintenant, on pose

$$g_\epsilon^\sigma(x, s, \xi) = \delta_\sigma(s) g_\epsilon(x, s, \xi). \tag{5.9}$$

Remarquons que $g_\epsilon^\sigma(x, s, \xi)$ a le même signe que s.

On considère ensuite le problème pénalisé suivant :

$$(\mathcal{P}_\epsilon^\sigma) \begin{cases} u_\epsilon^\sigma \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \text{ tel que} \\ \langle Au_\epsilon^\sigma, u_\epsilon^\sigma - v\rangle + \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx - \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma^-})|^{p(x)-1}(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx \\ \qquad = \int_\Omega f_\epsilon(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx, \\ \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \end{cases} \tag{5.10}$$

On définit les opérateurs G_ϵ^σ et $R_\epsilon^\sigma : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ par :

$$\langle G_\epsilon^\sigma u, v\rangle = \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u, \nabla u) v\, dx,$$

$$\langle R_\epsilon^\sigma u, v\rangle = -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} v\, dx.$$

On note aussi

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v\, dx.$$

Grâce à l'inégailté de type Hölder, pour tout $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u, \nabla u) v\, dx\right| &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\|g_\epsilon^\sigma(x, u, \nabla u)\|_{p'(x)}\|v\|_{p(x)} \\ &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})(\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u, \nabla u)^{p'(x)}\, dx + 1)^{\frac{1}{p'^-}}\|v\|_{p(x)} \\ &\leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-})\Big(\Big(1 + \frac{1}{\epsilon}\Big)^{\frac{p'^+}{p'^-}}(mes(\Omega) + 1)^{\frac{1}{p'^-}}\Big)\|v\|_{p(x)} \\ &\leq C\|v\|_{1,p(x)} \end{aligned} \tag{5.11}$$

et

$$\begin{aligned}\Big| -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} v\,dx\Big| &\leq \frac{1}{\epsilon^2}(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)^{p(x)-1}\|_{p'(x)}\|v\|_{p(x)} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2}(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p'^-})\Big\|\Big(\frac{1}{\epsilon}\Big)^{p(x)-1}\Big\|_{p'(x)}\|v\|_{p(x)} \\ &\leq C\|v\|_{1,p(x)}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 5.3.1 *L'opérateur $B_\epsilon^\sigma = A + G_\epsilon^\sigma + R_\epsilon^\sigma$ de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ est pseudo-monotone. De plus, B_ϵ^σ est coercif, c'est à dire :*

$$\frac{\langle B_\epsilon^\sigma v, v\rangle}{\|v\|_{1,p(x)}} \longrightarrow +\infty \qquad si \quad \|v\|_{1,p(x)} \longrightarrow +\infty.$$

Preuve du lemme 5.3.1

En utilisant l'inégalité de type Hölder et la condition de croissance (5.4) on peut facilement montrer que A est borné, et des relations (5.11) et (5.12), on déduit que B_ϵ^σ est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

La coercivité découle de (5.2) et du fait que

$$g_\epsilon^\sigma(x,s,\xi)s \geq 0 \text{ et } -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} u\,dx \geq 0.$$

Il reste à montrer que B_ϵ^σ est pseudo-monotone.

Soit $(u_k)_k$ une suite dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \\ B_\epsilon^\sigma u_k \rightharpoonup \chi & \text{dans } W^{-1,p'(x)}(\Omega) \\ \limsup_{k\to\infty}\langle B_\epsilon^\sigma u_k, u_k\rangle \leq \langle \chi, u\rangle. \end{cases} \tag{5.13}$$

Nous allons montrer que

$$\chi = B_\epsilon^\sigma u \;\text{ et }\; \langle B_\epsilon^\sigma u_k, u_k\rangle \longrightarrow \langle \chi, u\rangle \;\text{ lorsque }\; k\to+\infty.$$

D'abord, comme $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, alors

$$u_k \to u \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \;\text{ pour une sous-suite encore notée }\; (u_k)_k. \tag{5.14}$$

Or, $(u_k)_k$ est une suite bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, par conséquent d'après (5.4), $(a(x, u_k, \nabla u_k))_k$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$.
Ainsi, il existe une fonction $\varphi \in (L^{p'(x)}(\Omega))^N$ telle que

$$a(x, u_k, \nabla u_k) \rightharpoonup \varphi \quad \text{dans} \quad (L^{p'(x)}(\Omega))^N \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty. \tag{5.15}$$

De façon analogue, il est facile de voir que $(g_\epsilon^\sigma(x, u_k, \nabla u_k))_k$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ par rapport à k et donc, il existe une fonction $\psi_\epsilon^\sigma \in L^{p'(x)}(\Omega)$ telle que

$$g_\epsilon^\sigma(x, u_k, \nabla u_k) \rightharpoonup \psi_\epsilon^\sigma \quad \text{dans} \quad L^{p'(x)}(\Omega) \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty. \tag{5.16}$$

et comme $\left(-\dfrac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k)|^{p(x)-1}\right)_k$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, alors

$$-\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k^-)|^{p(x)-1} \longrightarrow -\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega) \text{ lorsque } \ k \to \infty. \tag{5.17}$$

Il est clair que, pour tout $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \chi, v\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle B_\epsilon^\sigma u_k, v\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k)\nabla v\, dx + \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_k, \nabla u_k) v\, dx \\ &\quad + \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k^-)|^{p(x)-1} v\, dx \\ &= \int_\Omega \varphi \nabla v\, dx + \int_\Omega \psi_\epsilon^\sigma v\, dx - \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} v\, dx. \end{aligned} \tag{5.18}$$

D'une part, de (5.14) on a

$$\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_k, \nabla u_k) u_k\, dx \longrightarrow \int_\Omega \psi_\epsilon^\sigma u\, dx \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty \tag{5.19}$$

et

$$-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k^-)|^{p(x)-1} u_k\, dx \longrightarrow -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} u\, dx \text{ lorsque } \ k \to \infty. \tag{5.20}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \langle B_\epsilon^\sigma(u_k), u_k\rangle &= \limsup_{k\to\infty} \Big\{ \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u_k)\nabla u_k\, dx + \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_k, \nabla u_k) u_k\, dx \\ &\qquad -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k^-)|^{p(x)-1} u_k\, dx \Big\}, \\ &\le \int_\Omega \varphi\nabla u\, dx + \int_\Omega \psi_\epsilon^\sigma u\, dx - \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1} u\, dx. \end{aligned} \tag{5.21}$$

On déduit de ce qui précède que

$$\limsup_{k\to\infty}\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u_k\,dx \le \int_\Omega \varphi\nabla u\,dx. \tag{5.22}$$

Grâce à (5.3), on a

$$\int_\Omega (a(x,u_k,\nabla u_k)-a(x,u_k,\nabla u))(\nabla u_k-\nabla u)\,dx \ge 0. \tag{5.23}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u_k\,dx \ge -&\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u)\nabla u\,dx\\ &+\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u\,dx+\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u)\nabla u_k\,dx.\end{aligned}$$

D'après (5.15), on obtient

$$\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u_k\,dx \ge \int_\Omega \varphi\nabla u\,dx$$

ce qui implique en utilisant (5.22)

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\nabla u_k\,dx = \int_\Omega \varphi\nabla u\,dx. \tag{5.24}$$

Au moyen de (5.18), (5.19), (5.20) et (5.24), on obtient

$$\langle B_\epsilon^\sigma u_k,u_k\rangle \longrightarrow \langle \chi,u\rangle \quad \text{lorsque} \quad k\to+\infty.$$

D'autre part, de (5.24), et du fait que $a(x,u_k,\nabla u)\longrightarrow a(x,u,\nabla u)$ dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$ on arrive à déduire que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (a(x,u_k,\nabla u_k)-a(x,u_k,\nabla u))(\nabla u_k-\nabla u)\,dx = 0.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 2.2.3

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

On conclut que

$$a(x,u_k,\nabla u_k) \rightharpoonup a(x,u,\nabla u) \quad \text{dans} \quad (L^{p'(x)}(\Omega))^N,$$

$$g_\epsilon^\sigma(x,u_k,\nabla u_k) \rightharpoonup g_\epsilon^\sigma(x,u,\nabla u) \quad \text{dans} \quad L^{p'(x)}(\Omega)$$

et

$$-\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_k^-)|^{p(x)-1} \rightharpoonup -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u^-)|^{p(x)-1}.$$

Par conséquent, $\chi = B_\epsilon^\sigma u$.

D'après le théorème classique de Lions [48] (voir la section 1.3) et le résultat du Lemme 5.3.1, il existe donc au moins une solution $u_\epsilon^\sigma \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ du problème (5.10).

La suite de la démonstration du théorème 5.3.1 se fait en deux étapes.

5.3.1 Etude du problème approché par rapport à ϵ

Estimations a priori

Prenons $v = u_\epsilon^\sigma - T_k(u_\epsilon^\sigma)$ comme fonction test dans (5.10), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)\, dx\\
&+\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)T_k(u_\epsilon^\sigma)\, dx\\
&-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}T_k(u_\epsilon^\sigma)\, dx\\
&=\int_\Omega f_\epsilon T_k(u_\epsilon^\sigma)\, dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $u_\epsilon^\sigma = u_\epsilon^{\sigma+} - u_\epsilon^{\sigma-}$, alors

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}T_k(u_\epsilon^\sigma) &= -\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}T_k(u_\epsilon^\sigma)\chi_{\{u_\epsilon^\sigma \le 0\}}\\
&= \frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}T_k(u_\epsilon^{\sigma-}) \ge 0.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En utilisant le fait que $g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)T_k(u_\epsilon^\sigma) \ge 0$ et de (5.25) nous obtenons

$$\int_\Omega a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)\, dx \le k\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{5.26}$$

Aussi, de (5.2) on ait,

$$\begin{aligned}
\alpha\|\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{p(x)}^\gamma &\le \alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)|^{p(x)}\, dx\\
&\le k\|f\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

avec

$$\gamma = \begin{cases} p^+ & \text{si} \quad \|\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{p(x)} \leq 1, \\ p^- & \text{si} \quad \|\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{p(x)} > 1. \end{cases}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\|T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{1,p(x)} \leq Ck^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{5.28}$$

où C ne dépend pas de ϵ.

Par conséquent $(T_k(u_\epsilon^\sigma))_\epsilon$ est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uniformément dans ϵ et σ.

Convergence en mesure de u_ϵ^σ

u_ϵ^σ converge vers une fonction u^σ en mesure.

Pour le prouver, nous montrons que u_ϵ^σ est une suite de Cauchy en mesure.

Soit $k > 0$ assez grand. On utilise les l'inégalités de type Hölder, de Poincaré et la relation (5.28), pour obtenir

$$\begin{aligned} k \text{ mes}(\{|u_\epsilon^\sigma| > k\}) &= \int_{\{|u_\epsilon^\sigma|>k\}} |T_k(u_\epsilon^\sigma)|\, dx \leq \int_\Omega |T_k(u_\epsilon^\sigma)|\, dx \\ &\leq (\tfrac{1}{p^-} + \tfrac{1}{p'^-})(\text{mes}(\Omega)+1)^{\frac{1}{p'^-}} \|T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{p(x)} \\ &\leq C_1 \|T_k(u_\epsilon^\sigma)\|_{1,p(x)} \\ &\leq C_2 k^{\frac{1}{\gamma}}; \end{aligned} \tag{5.29}$$

ce qui entraîne que,

$$\text{mes}(\{|u_\epsilon^\sigma| > k\}) \leq \frac{C_2}{k^{1-\frac{1}{\gamma}}} \quad \forall \epsilon > 0,\ \forall k > 0. \tag{5.30}$$

Par conséquent

$$\text{mes}(\{|u_\epsilon^\sigma| > k\}) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \to \infty \text{ (puisque } 1 - \frac{1}{\gamma} > 1), \tag{5.31}$$

uniformément par rapport ϵ et k.

De plus, on a, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \text{mes }(\{|u_n^\sigma - u_m^\sigma| > \delta\}) &\leq \text{mes }(\{|u_n^\sigma| > k\}) + \text{mes }(\{|u_m^\sigma| > k\}) \\ &\quad + \text{mes }(\{|T_k(u_n^\sigma) - T_k(u_m^\sigma)| > \delta\}). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Comme $(T_k(u_\epsilon^\sigma))_n$ est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, alors il existe pour $\sigma > 0$ fixé, $v_\epsilon^\sigma \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que,

$$T_k(u_\epsilon^\sigma) \rightharpoonup v_k^\sigma \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

et l'injection compact $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ nous donne,

$$T_k(u_\epsilon^\sigma) \longrightarrow v_k^\sigma \quad \text{dans} \quad L^{p(x)}(\Omega) \quad \text{et p.p. dans} \quad \Omega. \tag{5.33}$$

Par conséquent, on peut supposer que $(T_k(u_\epsilon^\sigma))_\epsilon$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω.

Soit $\eta > 0$. Alors de (5.30) et (5.32), il existe $k(\eta) > 0$ tel que $\text{mes}(\{|u_n^\sigma - u_m^\sigma| > \delta\}) < \eta$ pour tout $n, m \geq n_0(k(\eta), \delta)$.

Cela prouve que $(u_\epsilon^\sigma)_\epsilon$ est une suite de Cauchy en mesure et par la suite, converge presque partout vers une fonction u^σ.

Ainsi

$$\begin{aligned} &T_k(u_\epsilon^\sigma) \rightharpoonup T_k(u^\sigma) \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ &T_k(u_\epsilon^\sigma) \rightarrow T_k(u^\sigma) \quad \text{dans} \quad L^{p(x)}(\Omega) \quad \text{et p.p. dans} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Positivité de u^σ

On prend $v = u_\epsilon^\sigma - T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)$ comme fonction test dans (5.10), pour obtenir

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) \nabla T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx \\ &+ \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx \\ &- \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma -})|^{p(x)-1} T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx \\ &= \int_\Omega f_\epsilon T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\displaystyle\int_\Omega a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) \nabla T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx \geq 0$ et $g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma) \geq 0$, on déduit que

$$-\frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma -})|^{p(x)-1} T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^\sigma)\, dx \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\|_{L^1(\Omega)};$$

ce qui grâce à (5.25) est équivalent à dire que

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma -})|^{p(x)-1} T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma -})\, dx \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)}\,dx \leq \epsilon\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Ainsi, comme $u_\epsilon^{\sigma-} \longrightarrow u^{\sigma-}$ p.p. dans Ω, on déduit que

$$|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)} \longrightarrow |u^{\sigma-}|^{p(x)} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

D'après le lemme de Fatou, on peut conclure que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u^{\sigma-}|^{p(x)}\,dx &\leq \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)}dx\\ &\leq \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\epsilon\|f\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|u_\epsilon^{\sigma-}|^{p(x)} \to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0,$$

ce qui implique que

$$u^\sigma \geq 0.$$

Convergence presque partout du gradient

Par soucis de simplicité, nous allons écrire $\eta(\epsilon, h)$ pour toute quantité telle que

$$\lim_{h\longrightarrow+\infty}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\eta(\epsilon,h) = 0.$$

Puis, nous noterons $\eta_h(\epsilon)$ toute quantité qui dépend de ϵ et h et telle que

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\eta_h(\epsilon) = 0,$$

pour toute valeur fixée de h.

Soit $k > 0$, nous utilisons dans (5.10), la fonction test

$$\begin{cases} v_\epsilon^{h,\sigma} &= u_\epsilon^\sigma - \eta\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\\ \omega_\epsilon^{h,\sigma} &= T_{2k}(u_\epsilon^\sigma - T_h(u_\epsilon^\sigma) + T_k(u_\epsilon^\sigma) - T_k(u^\sigma))\\ \omega^{h,\sigma} &= T_{2k}(u^\sigma - T_h(u^\sigma)),\end{cases} \tag{5.35}$$

où $h > 2k > 0$, avec $\varphi_k(t) = te^{\lambda t^2}$, $\lambda = \left(\dfrac{b(k)}{\alpha}\right)^2$.

Il est bien connu que ([26], lemme 1)

$$\varphi_k'(t) - \frac{b(k)}{\alpha}|\varphi_k(t)| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall t \in I\!R. \tag{5.36}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\langle A(u_\epsilon^\sigma),\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\rangle\\&+\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&=\int_\Omega f_\epsilon\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx,\end{aligned}$$

ce qui est équivaut à dire que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&+\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}\ \varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&=\int_\Omega f_\epsilon\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx.\end{aligned}\tag{5.37}$$

$\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}=0$ sur l'ensemble $\{|u_\epsilon^\sigma|>4k+h\}$, par suite, en posant $s=4k+h$ on obtient par (5.37),

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_s(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&+\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}\ \varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\\&=\int_\Omega f_\epsilon\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx.\end{aligned}$$

D'après (5.34), on a $\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\rightharpoonup\varphi_k(\omega^{h,\sigma})$ faiblement* dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $\epsilon\to 0$. Par suite,

$$\int_\Omega f_\epsilon\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\longrightarrow\int_\Omega f\varphi_k(\omega^{h,\sigma})\,dx.$$

Finalement, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\int_\Omega f\varphi_k(\omega^{h,\sigma})\,dx\longrightarrow 0 \text{ lorsque } h\to+\infty.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega f\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx=\eta(\epsilon,h).\tag{5.38}$$

Notons que le signe de $\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})$ est le même que celui de u_ϵ^σ dans l'ensemble $\{x\in\Omega,|u_\epsilon^\sigma|>k\}$, alors, on a

$$g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\geq 0$$

et

$$-\frac{1}{\epsilon^2}|T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma}) \geq 0.$$

De (5.37), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&+\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|<k\}} g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma-})|^{p(x)-1}\ (u_\epsilon^\sigma - T_k(u^\sigma))\exp(\lambda(\omega_\epsilon^{h,\sigma}))^2\, dx \\
&\leq \eta(\epsilon, h).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Comme $u^\sigma \geq 0$, le troisième terme du membre de gauche de l'inégalité ci-dessus est positif. Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&+\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|<k\}} g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&\leq \eta(\epsilon, h).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Pour la première intégrale du membre de gauche de (5.40), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&=\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|\leq k\}} a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&+\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|>k\}} a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Le premier terme du membre de droite de (5.41) donne

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|\leq k\}} a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&=\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Pour le deuxième terme du membre de droite de (5.41), on applique (5.2) pour obtenir,

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|>k\}} a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla\omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\
&\geq -\varphi'(2k)\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|>k\}} |a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))||\nabla T_k(u^\sigma)|\, dx.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Comme $|a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma)|$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$, on a, quitte à extraire une sous-suite

$$|a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma)| \rightharpoonup l_{M,\sigma} \text{ dans } (L^{p'(x)}(\Omega))^N \text{ lorsque } \epsilon \to 0$$

et puisque $\nabla T_k(u^\sigma)\chi_{\{|u^\sigma_\epsilon|>k\}} \longrightarrow \nabla T_k(u^\sigma)\chi_{\{|u^\sigma|>k\}}$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$ lorsque $\epsilon \to 0$, on obtient

$$-\varphi'(2k)\int_{\{|u^\sigma_\epsilon|>k\}} |a(x,T_s(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_s(u^\sigma_\epsilon))||\nabla T_k(u^\sigma)|dx \longrightarrow -\varphi'(2k)\int_{\{|u^\sigma|>k\}} l_{M,\sigma}|\nabla T_k(u^\sigma)|dx = 0,$$

lorsque $\epsilon \to 0$.

Par conséquent

$$-\varphi'(2k)\int_{\{|u^\sigma_\epsilon|>k\}} |a(x,T_s(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_s(u^\sigma_\epsilon))||\nabla T_k(u^\sigma)|\,dx = \eta_h(\epsilon). \tag{5.44}$$

Combinant (5.41) et (5.44), on déduit que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_s(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_s(u^\sigma_\epsilon))\nabla\omega^{h,\sigma}_\epsilon\varphi'(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx\\ &\geq \int_\Omega a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon))[\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)-\nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx+\eta_h(\epsilon).\end{aligned} \tag{5.45}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_s(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_s(u^\sigma_\epsilon))\nabla\omega^{h,\sigma}_\epsilon\varphi'(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx\\ &\geq \int_\Omega[a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon))-a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))]\\ &\times[\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)-\nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx\\ &+\int_\Omega a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))[\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)-\nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx\\ &+\eta_h(\epsilon).\end{aligned} \tag{5.46}$$

En ce qui concerne le seconde terme du membre de droite de (5.46), on peut l'écrire comme suit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))[\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)-\nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx\\ &=\int_\Omega a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)\varphi'_k(T_k(u^\sigma_\epsilon)-T_k(u^\sigma))\,dx\\ &-\int_\Omega a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma)\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon)\,dx.\end{aligned} \tag{5.47}$$

De la continuité de l'opérateur Nemytskii, on déduit que

$$a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma))\varphi'_k(T_k(u^\sigma_\epsilon)-T_k(u^\sigma)) \longrightarrow a(x,T_k(u^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))\varphi'_k(0)$$

et $a(x,T_k(u^\sigma_\epsilon),\nabla T_k(u^\sigma)) \to a(x,T_k(u^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))$ fortement dans $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$, car $\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon) \rightharpoonup \nabla T_k(u^\sigma)$ faiblement dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$ et $\nabla T_k(u^\sigma_\epsilon)\varphi'_k(\omega^{h,\sigma}_\epsilon) \to \nabla T_k(u^\sigma)\varphi'_k(0)$ fortement dans $(L^{p(x)}(\Omega))^N$.

Ensuite, le premier et le deuxième terme du membre de droite de (5.47) tendent respectivement vers

$$\int_\Omega a(x, T_k(u^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma)\varphi'_k(0)\, dx \text{ lorsque } \epsilon \to 0$$

et

$$-\int_\Omega a(x, T_k(u^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma)\varphi'_k(\omega^{h,\sigma})\, dx \text{ lorsque } \epsilon \to 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\ &= \eta_h(\epsilon).\end{aligned} \tag{5.48}$$

Combinant (5.46) et (5.48), cela donne

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x, T_s(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_s(u_\epsilon^\sigma))\nabla \omega_\epsilon^{h,\sigma}\varphi'(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\ &\geq \int_\Omega [a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))] \\ &\times[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\varphi'_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx \\ &+\eta(\epsilon, h).\end{aligned} \tag{5.49}$$

En revenant au deuxième terme du membre de gauche de (5.40), on a

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|<k\}} g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\, dx\Big| \\ &\leq b(k)\int_\Omega c(x)|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma))\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx \\ &\leq \eta(\epsilon, h) + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma))\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx.\end{aligned} \tag{5.50}$$

Le dernier terme du membre de droite de (5.50) donne

$$\begin{aligned}&\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega [a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))] \\ &\times[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx \\ &+\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx \\ &+\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u_\epsilon^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma)|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on déduit que

$$\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x, T_k(u_\epsilon^\sigma), \nabla T_k(u^\sigma))[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\, dx = \eta_h(\epsilon)$$

et

$$\frac{b(k)}{\alpha}\int_{\Omega} a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma))\nabla T_k(u^\sigma)|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\,dx = \eta(\epsilon,h).$$

D'où

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\{|u_\epsilon^\sigma|<k\}} g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})\,dx\Big|\\ &\leq \frac{b(k)}{\alpha}\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))]\\ &\times[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|\,dx + \eta(\epsilon,h).\end{aligned} \tag{5.52}$$

On Combine ensuite (5.40), (5.51) et (5.52), pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))]\\ &\times[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)](\varphi_k'(\omega_\epsilon^{h,\sigma}) - \frac{b(k)}{\alpha}|\varphi_k(\omega_\epsilon^{h,\sigma})|)\,dx\\ &\leq \eta(\epsilon,h),\end{aligned} \tag{5.53}$$

ce qui implique grâce à (5.36) que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))]\\ &\times[\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\,dx\\ &\leq \eta(\epsilon,h).\end{aligned} \tag{5.54}$$

Faisons maintenant tendre ϵ vers 0 et h vers l'infini, on a

$$\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma)) - a(x,T_k(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_k(u^\sigma))][\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma) - \nabla T_k(u^\sigma)]\,dx \to 0.$$

En appliquant le Lemme 2.2.3, on obtient de la convergence ci-dessus,

$$T_k(u_\epsilon^\sigma) \longrightarrow T_k(u^\sigma) \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{5.55}$$

Par conséquent,

$$\nabla u_\epsilon^\sigma \longrightarrow \nabla u^\sigma \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{5.56}$$

Equi-integrabilité de la nonlinéarité g_ϵ^σ

Afin de passer à la limite dans le problème approché, nous allons montrer que

$$g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma) \longrightarrow g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma) \;\text{ dans }\; L^1(\Omega). \tag{5.57}$$

En particulier, Il est suffisant de prouver l'équi-integrabilité de la suite $\{|g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\}$. Pour ce faire, nous prenons $u_\epsilon^\sigma - T_1(u_\epsilon^\sigma - T_h(u_\epsilon^\sigma)) \geq 0$ comme fonction test dans (5.10), pour obtenir

$$\int_{\{|u_\epsilon^\sigma| \geq h+1\}} |g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\, dx \leq \int_{\{|u_\epsilon^\sigma| > h\}} |f_n|\, dx.$$

Fixons $\eta > 0$. Alors, il existe $h(\eta) \geq 1$ tel que

$$\int_{\{|u_\epsilon^\sigma| \geq h(\eta)\}} |g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\, dx < \frac{\eta}{2}. \tag{5.58}$$

Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \Omega$, on a

$$\begin{aligned}\int_E |g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\, dx \leq \int_E & b(l(\varepsilon))(c(x) + |\nabla T_{h(\eta)}(u_\epsilon^\sigma)|^{p(x)})\, dx \\ &+ \int_{\{|u_\epsilon^\sigma| \geq h(\eta)\}} |g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\, dx.\end{aligned} \tag{5.59}$$

De (5.55), on déduit qu'il existe $\beta(\eta) > 0$ tel que

$$\int_E b(h(\eta))(c(x) + |\nabla T_{h(\eta)}(u_\epsilon^\sigma)|^{p(x)})\, dx \leq \frac{\eta}{2} \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \mathrm{mes}(E) < \beta(\eta). \tag{5.60}$$

Finalement, en combinant (5.58) et (5.60), on déduit que

$$\int_E |g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)|\, dx \leq \eta \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \mathrm{mes}(E) < \beta(\eta).$$

Passage à la limite par rapport à ϵ

Soit $v \in K_0 \cap L^\infty(\Omega)$, on prend $u_\epsilon^\sigma - T_k(u_\epsilon^\sigma - v)$ comme fonction test dans (5.10) pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx \\ &+ \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx \\ &\leq \int_\Omega f_\epsilon T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx.\end{aligned} \tag{5.61}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}&\int_{\{|u_\epsilon^\sigma - v| \leq k\}} a(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla (u_\epsilon^\sigma - v)\, dx \\ &+ \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x, u_\epsilon^\sigma, \nabla u_\epsilon^\sigma) T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx \\ &\leq \int_\Omega f_\epsilon T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\, dx.\end{aligned} \tag{5.62}$$

Ce qui équivaut

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_\epsilon^\sigma - v|\le k\}} a(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla u_\epsilon^\sigma\,dx - \int_{\{|u_\epsilon^\sigma - v|\le k\}} a(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)\nabla v\,dx \\ + \int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\,dx \\ \le \int_\Omega f_\epsilon T_k(u_\epsilon^\sigma - v)\,dx.\end{aligned} \tag{5.63}$$

En appliquant le lemme de Fatou et le fait que

$$a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u_\epsilon^\sigma),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_\epsilon^\sigma)) \rightharpoonup a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u^\sigma),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u^\sigma)) \quad \text{dans} \quad (L^{p'(x)}(\Omega))^N,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\{|u^\sigma - v|\le k\}} a(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)\nabla u^\sigma\,dx - \int_{\{|u^\sigma - v|\le k\}} a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u^\sigma),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u^\sigma))\nabla v\,dx \\ + \int_\Omega g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)T_k(u^\sigma - v)\,dx \\ \le \int_\Omega fT_k(u^\sigma - v)\,dx.\end{aligned} \tag{5.64}$$

D'où,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)\nabla T_k(u^\sigma - v)\,dx \\ &+ \int_\Omega g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)T_k(u^\sigma - v)\,dx \\ &\le \int_\Omega fT_k(u^\sigma - v)\,dx \qquad \forall v \in K_0 \cap L^\infty(\Omega), \qquad \forall k > 0.\end{aligned} \tag{5.65}$$

5.3.2 Etude du problème approché par rapport à σ

Estimations par rapport à σ

Nous allons donner quelques estimations sur la suite $(u^\sigma)_\sigma$ identique à (5.27). Pour ce faire, nous prenons $v = T_s(u^\sigma - T_k(u^\sigma))$ dans (5.65) et nous laissons $s \to \infty$; alors, de la même manière que dans la section (5.3.1) nous pouvons prouver que

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla T_k(u^\sigma)\|_{p(x)}^\gamma &\le \alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u^\sigma)|^{p(x)}\,dx \\ &\le k\|f\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{pour tout} \quad k > 1.\end{aligned} \tag{5.66}$$

Par conséquent, comme dans la section 5.3.1, il existe u tel que $T_k(u) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et

$$\begin{cases} T_k(u^\sigma) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ T_k(u^\sigma) \to T_k(u) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega) \ \text{ et p.p. dans } \ \Omega. \end{cases} \tag{5.67}$$

D'où, $u^\sigma \ge 0$ p.p. dans Ω, par conséquent, $u \ge 0$ p.p. dans Ω.

Convergence forte des tronquées par rapport à σ

On prend comme fonction test dans (5.65)

$$\left\{\begin{array}{rcl} v & = & T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})) \\ \omega^{h,\sigma} & = & T_{2k}(u^\sigma - T_h(u^\sigma) + T_k(u^\sigma) - T_k(u)) \\ \omega^h & = & T_{2k}(u - T_h(u)), \end{array}\right. \tag{5.68}$$

où $h > 2k > 0$.

Il s'ensuit que pour tout $l > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)\nabla T_l(u^\sigma - T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})))\, dx \\ &+ \int_\Omega g^\sigma(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)T_l(u^\sigma - T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})))\, dx \\ &\le \int_\Omega fT_l(u^\sigma - T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})))\, dx. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})| \le s\}} a(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)\nabla T_l(\varphi_k(\omega^{h,\sigma}))\, dx \\ &+ \int_\Omega g^\sigma(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)T_l(u^\sigma - T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})))\, dx \\ &\le \int_\Omega fT_l(u^\sigma - T_s(u^\sigma - \varphi_k(\omega^{h,\sigma})))\, dx. \end{aligned}$$

On fait tendre $s \to \infty$ en choisissant l assez grand ($l \ge |\varphi_k(2k)|$), pour obtenir

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)\nabla\varphi_k(\omega^{h,\sigma})\, dx \\ &+ \int_\Omega g^\sigma(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma)\varphi_k(\omega^{h,\sigma})\, dx \\ &\le \int_\Omega f\varphi_k(\omega^{h,\sigma})\, dx. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Par conséquent, en utilisant les mêmes techniques que celle de la section 5.3.1, nous déduisons que

$$T_k(u^\sigma) \longrightarrow T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{5.70}$$

et

$$\nabla u^\sigma \longrightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{5.71}$$

Equi-integrabilité de la non-linéarité g par rapport à σ

Comme g est une fonction de Carathéodory, il est facile de voir que

$$g(x, u^\sigma, \nabla u^\sigma) \longrightarrow g(x, u, \nabla u) \;\text{ p.p. dans }\; \Omega \;\text{ lorsque }\; \sigma \to 0.$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse (5.6) (noter que cette hypothèse n'est utilisée que ici),

$$g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma) = \delta_\sigma g(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma) \to g(x,u,\nabla u) \text{ p.p. dans } \{x\in\Omega, u(x)\geq 0\}.$$

De la même façon, nous montrons que

$$g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma) \to g(x,u,\nabla u) \text{ dans } L^1(\Omega).$$

en effet, prenons $u^\sigma - T_1(u^\sigma - T_l(u^\sigma)) \geq 0$ comme fonction test dans (5.65), nous obtenons

$$\int_{\{|u^\sigma|\geq l+1\}} |g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)|\,dx \leq \int_{\{|u^\sigma|>l\}} |f|\,dx.$$

Fixons $\beta>0$. Alors, il existe $l(\beta)\geq 1$ tel que

$$\int_{\{|u^\sigma|\geq l(\beta)\}} |g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)|\,dx < \frac{\beta}{2}. \tag{5.72}$$

Pour tout sous-ensemble mesurable $E\subset\Omega$, on a

$$\begin{aligned}\int_E |g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)|\,dx \leq &\int_E b(l(\beta))(c(x)+|\nabla T_{l(\beta)}(u^\sigma)|^{p(x)})\,dx\\ &+\int_{\{|u^\sigma|\geq l(\beta)\}} |g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)|\,dx.\end{aligned} \tag{5.73}$$

De (5.70), on déduit qu'il existe $\alpha(\beta)>0$ tel que

$$\int_E b(l(\beta))(c(x)+|\nabla T_{l(\beta)}(u^\sigma)|^{p(x)})\,dx \leq \frac{\beta}{2} \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \operatorname{mes}(E)<\alpha(\beta). \tag{5.74}$$

Finalement, en combinant (5.72) et (5.74), on a

$$\int_E |g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)|\,dx \leq \beta \quad \text{pour tout } E \text{ tel que } \operatorname{mes}(E)\leq\alpha(\beta).$$

Par conséquent, on déduit que $g^\sigma(x,u^\sigma,\nabla u^\sigma)$ est uniformément équi-integrable. Ainsi, comme dans la section 5.3.1, on passe à la limite par rapport à σ pour conclure. Cela permet d'obtenir la preuve du théorme 5.3.1.

5.4 Cas où la nonlinéarité g est négative

Nous considérons l'ensemble convexe

$$\overline{K}_0 = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); u \leq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Théorème 5.4.1 *supposons que (5.4)-(5.6) ont lieu et que $f \in L^1(\Omega)$. Alors, il existe au moins une solution entropique pour du problème unilaterale suivant :*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u \in \mathcal{T}_0^{1,p(x)}(\Omega),\ u \leq 0 \text{ p.p. dans } \Omega,\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)\,dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)\,dx \\ \qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega fT_k(u-v)\,dx, \\ \forall v \in \overline{K}_0 \cap L^\infty(\Omega), \quad \forall k > 0. \end{cases}$$

Preuve. La preuve du théorème 5.3.1 s'applique moyennant les modifications suivantes :

i) Nous approchons la fonction sign par une fonction Lipschitziènne croissante.

ii) La fonction Lipschitzienne $\delta_\sigma(s)$ est remplacée par :

$$\overline{\delta}_\sigma(s) = \begin{cases} \frac{-s-\sigma}{s} & \text{si } s \geq \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } |s| \leq \sigma \\ \frac{s+\sigma}{s} & \text{si } s < -\sigma < 0. \end{cases}$$

iii) Le problème approché devient :

$$(\overline{\mathcal{P}}_\epsilon^\sigma) \begin{cases} u_\epsilon^\sigma \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \\ \langle Au_\epsilon^\sigma, u_\epsilon^\sigma - v\rangle + \displaystyle\int_\Omega g_\epsilon^\sigma(x,u_\epsilon^\sigma,\nabla u_\epsilon^\sigma)(u_\epsilon^\sigma - v)\,dx + \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\epsilon}}(u_\epsilon^{\sigma^+})|^{p(x)-1}(u_\epsilon^\sigma - v)\,dx \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_\Omega f_\epsilon(u_\epsilon^\sigma - v)\,dx, \\ \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \end{cases} \tag{5.75}$$

iv) L'ensemble K_0 est remplacé par :

$$\overline{K}_0 = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); u \leq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Chapitre 6

Etude de problèmes elliptiques nonlinéaires avec des conditions au bord de Neumann

6.1 Introduction

Dans ce chapitre [1], nous étudions une classe de problèmes $p(x)$-Laplace non-linéaires avec des conditions de Neumann non homogènes sur le bord et des données L^1 de la forme :

$$\begin{cases} -\text{div}(\Phi(\nabla u - \Theta(u))) + |u|^{p(x)-2}u + \alpha(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \\ (\Phi(\nabla u - \Theta(u)).\eta + \gamma(u) = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

avec

$$\Phi(\xi) = |\xi|^{p(x)-2}\xi, \quad \forall \xi \in I\!R^N,$$

où $\Omega \subseteq I\!R^N (N \geq 3)$ est un domaine borné de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, η est la normale unitaire à $\partial\Omega$, $\alpha,\ \gamma$ et Θ sont des fonctions réelles définies sur $I\!R$ ou $I\!R^N$, $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.

Les problèmes avec conditions de Neumann et avec second membre dans L^1 ont été

[1] Le chapitre 6 est l'objet de l'article [13], publié à J. Appl. Anal. Comput (JAAC).

étudiés par plusieurs auteurs dans le cas des puissances variables (voir [59, 58, 60]). Dans ces papiers, les auteurs ont considéré un opérateur de type Leray-Lions, ce qui leur permet d'exploiter la condition de croissance, de coercité et de monotonie pour montrer l'existence et l'unicité de solutions entropiques. Par contre, dans notre cas, compte tenu de la nature du terme Θ, nous n'avons pas ces conditions et nous ne pouvons pas faire appel aux principales techniques utilisées dans [59, 58, 60] pour montrer l'existence de solutions entropiques. Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir l'unicité de cette solution. Pour surmonter ce soucis, nous supposons que Θ est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz satisfaisant une condition reliée à l'exposant (voir hypothèse (H_3)).
Ce chapitre est organisé comme suit : Après avoir énoncé quelques hypothèses et propriétés de base, nous prouvons l'existence de solutions entropiques du problème (6.1).

6.2 Résultat d'existence

Dans cette partie, nous étudions l'existence de la solution entropique de (6.1).
Nouc commençons par énoncer les hypothèses suivantes :
(H1) α et γ sont des fonctions continues définies sur $I\!R$ telle que $\alpha(x).x \geq 0$ et $\gamma(x).x \geq 0$ pour tout $x \in I\!R$.
(H2) $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.
(H3) $\Theta : I\!R \to I\!R^N$ est une fonction continue telle que $\Theta(0) = 0$ et $|\Theta(x) - \Theta(y)| \leq C|x-y|$, pour tout $x, y \in I\!R$, où C est une constante positive telle que $C < \min\left(\left(\frac{p^-}{2}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\frac{p^-}{2}\right)^{\frac{1}{p^+}}\right)$.
Avant d'énoncer la notion de solution entropique du problème (6.1), nous rappelons tout d'abord quelques notations.
Pour tout $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, on note $\tau(u)$ la trace de u sur $\partial\Omega$ au sens usuel.
Soit

$$\mathcal{T}^{1,p(x)}(\Omega) = \{u : \Omega \to I\!R, \text{ mesurable } : T_k(u) \in W^{1,p(x)}(\Omega), \ \forall k > 0\}.$$

Comme dans [21], on a le résultat suivant :

Proposition 6.2.1 *Soit $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction mesurable $v : \Omega \to I\!R^N$ telle que $\nabla T_k(u) = v\chi_{\{|u|<k\}}$, pour tout $k > 0$. La fonction v est notée ∇u.*
De plus, si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ alors $v \in (L^{p(x)}(\Omega))^N$ et $v = \nabla u$ au sens usuel.

Suivant [8, 9, 58, 59, 60], nous définissons $\mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}(\Omega)$ telle qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in I\!N} \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfait les conditions suivantes :
(C_1) $u_n \to u$ p.p. dans Ω.
(C_2) $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ dans $(L^1(\Omega))^N$ pour chaque $k > 0$.
(C_3) Il existe une fonction mesurable v sur $\partial\Omega,$ telle que $u_n \to v$ p.p. sur $\partial\Omega$.
La fonction v est la trace de u au sens généralisé introduit dans [8, 9].
Dans la suite, la trace de $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ est notée $tr(u)$. Si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $tr(u)$ coincide avec $\tau(u)$ au sens usuel.
De plus pour tout $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$, $\tau(T_k(u)) = T_k(tr(u))$ et si $\varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ alors $(u - \varphi) \in \mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$ et $tr(u - \varphi) = tr(u) - tr(\varphi)$.

Lemme 6.2.1 *([67], lemme 5.4) Soit $(v_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur Ω. Si v_n converge en mesure vers v et est uniformément bornée dans $L^{p(x)}(\Omega)$ pour un certain $1 \ll p(x) \in L^\infty(\Omega)$ alors $v_n \to v$ fortement dans $L^1(\Omega)$.*

Nous pouvons maintenant introduire la notion de solution entropique du problème (6.1).

Définition 6.2.1 *Une fonction mesurable $u : \Omega \to I\!R$ est une solution entropique du problème elliptique (6.1), si $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$, $|u|^{p(x)-2}u \in L^1(\Omega)$, $\alpha(u) \in L^1(\Omega)$, $\gamma(u) \in L^1(\partial\Omega)$ et*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla T_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uT_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega \alpha(u)T_k(u-\varphi)dx \\ + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)T_k(u-\varphi)d\sigma \le \int_\Omega fT_k(u-\varphi)\,dx + \int_{\partial\Omega} gT_k(u-\varphi)d\sigma,\end{aligned} \tag{6.2}$$

pour tout $\varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour tout $k > 0$.

Remarque 6.2.1 *Chaque intégrale dans la définition précédente est bien définie. En effet, puisque* $\varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *alors* $u - \varphi \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p(x)}(\Omega)$ *et donc* $T_k(u-\varphi) \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Par conséquent, la première, la deuxième, la troisième et la cinquième intégrale de (6.2) sont bien définies. Par ailleurs, pour la quatrième et la sixième intégrale, nous pouvons utiliser le fait que la trace de* $g \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *sur* $\partial\Omega$ *est bien définie dans* $L^{p(x)}(\partial\Omega)$ *(voir la Proposition 1.1.3).*

Maintenant nous annonçons le résultat principal de cette section

Théorème 6.2.1 *Supposons que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors il existe au moins une solution entropique du problème(6.1).*

Preuve. La preuve du théorème 6.2.1 se compose de deux étapes.

ETAPE 1. Problème Approché

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla v\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n v dx + \int_\Omega T_n(\alpha(u_n))v\,dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))v d\sigma \\ = \int_\Omega T_n(f)v dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g)v d\sigma.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Nous définissons l'espace réflexif suivant

$$E = W^{1,p(x)}(\Omega) \times L^{p(x)}(\partial\Omega).$$

Soit X_0 le sous-espace de E définit par

$$X_0 = \{(u,v) \in E : v = \tau(u)\}.$$

Dans la suite, nous identifierons un élément $(u,v) \in X_0$ avec son représentant $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

On définit l'opérateur A_n par

$$\langle A_n u, v\rangle = \langle Au, v\rangle + \int_\Omega T_n(\alpha(u))v\,dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u))v\,d\sigma \qquad \forall\ u,v \in X_0,$$

où

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla v \, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uvdx.$$

Assertion 1. L'opérateur A_n est de type (M).

En effet, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments X_0 telle que :

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{faiblement dans} \quad X_0, \\ A_n u_k \rightharpoonup \chi & \text{faiblement dans} \quad X_0', \\ \limsup\limits_{k\to\infty}\langle A_n u_k, u_k\rangle \leq \langle \chi, u\rangle. \end{cases} \tag{6.4}$$

D'après (H1), on a

$$T_n(\alpha(u))u \geq 0 \text{ et } T_n(\gamma(u))u \geq 0.$$

Le lemme de Fatou implique que

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega T_n(\alpha(u_k))u_k dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_k))u_k d\sigma\right) \geq \int_\Omega T_n(\alpha(u))udx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u))ud\sigma.$$

D'autre part, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega T_n(\alpha(u_k))vdx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_k))vd\sigma\right) = \int_\Omega T_n(\alpha(u))vdx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u))vd\sigma, \forall v \in X_0.$$

Par conséquent, nous déduisons

$$T_n(\alpha(u_k)) + T_n(\gamma(u_k)) \rightharpoonup T_n(\alpha(u)) + T_n(\gamma(u)) \text{ faiblement dans } X_0'.$$

Ceci implique que

$$Au_k \rightharpoonup \chi - (T_n(\alpha(u)) + T_n(\gamma(u))) \text{ faiblement dans } X_0'.$$

Comme l'opérateur A est de type (M), nous avons donc immédiatement

$$Au = \chi - (T_n(\alpha(u)) + T_n(\gamma(u))).$$

Par conséquent, nous en déduisons que $A_n u = \chi$.

D'où, l'opérateur A_n est de type (M).

Assertion 2. L'opérateur A_n est coercif.

D'après l'hypothèse (H1), on a

$$\int_\Omega T_n(\alpha(u))u \, dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u))ud\sigma \geq 0.$$

Par conséquent, $\langle A_n u, u\rangle \geq \langle Au, u\rangle$.

D'autre part, en utilisant le lemme 1.4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla u dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u - \Theta(u)|^{p(x)-2}(\nabla u - \Theta(u))\nabla u dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u - \Theta(u)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Theta(u)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Puisque

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p),$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)} &= \frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u - \Theta(u) + \Theta(u)|^{p(x)} \\ &\leq |\nabla u - \Theta(u)|^{p(x)} + |\Theta(u)|^{p(x)};\end{aligned} \tag{6.6}$$

alors

$$\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)} - |\Theta(u)|^{p(x)} \leq |\nabla u - \Theta(u)|^{p(x)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\Big[\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)} - |\Theta(u)|^{p(x)}\Big]dx - \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Theta(u)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{2}{p(x)}|\Theta(u)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{2}{p(x)}C^{p(x)}|u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \Big(1 - \frac{2}{p(x)}C^{p(x)}\Big)|u|^{p(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p^+}\frac{1}{2^{p^+-1}}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \Big(1 - \frac{2}{p^-}C^{p(x)}\Big)|u|^{p(x)}dx.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Ainsi, le choix de la constante C dans (H3) donne l'existence d'une constante positive C_0 telle que

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &\geq \frac{1}{p^+}\frac{1}{2^{p^+-1}}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + C_0\int_\Omega |u|^{p(x)} \\ &\geq \min\{\frac{1}{p^+}\frac{1}{2^{p^+-1}}, C_0\}(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}) \\ &\geq \min\{\frac{1}{p^+}\frac{1}{2^{p^+-1}}, C_0\}\rho_{1,p(x)}(u).\end{aligned} \tag{6.8}$$

D'où $\dfrac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{1,p(x)}} \to +\infty$ lorsque $\|u\|_{1,p(x)} \to +\infty$.
Par conséquence, A est coercif.

Par ailleurs, l'opérateur A_n est borné et hemi-continu, donc pour $F_n = (T_n(f), T_n(g)) \in E' \subset X_0'$, on peut appliquer la Remarque 1.3.1, pour en déduire l'existence d'une fonction $u_n \in X_0$ telle que :

$$\langle A_n u_n, v\rangle = \langle F_n, v\rangle \text{ pour tout } v \in X_0$$

i.e.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla v\, dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n v dx \quad &+ \quad \int_\Omega T_n(\alpha(u_n))v\, dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))v\, d\sigma \\ &= \quad \int_\Omega T_n(f)v dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g) v d\sigma.\end{aligned} \tag{6.9}$$

ETAPE 2. Estimations a priori

Assertion 1. $(\nabla T_k(u_n))_{n\in I\!N}$ est bornée dans $(L^{p^-}(\Omega))^N$.
Soit $f_n = T_n(f)$ et $g_n = T_n(g)$ pour tout $n \in I\!N$, alors $(f_n)_{n\in I\!N}$ et $(g_n)_{n\in I\!N}$ sont des suites de fonctions bornées qui converge fortement vers $f \in L^1(\Omega)$ et vers $g \in L^1(\partial\Omega)$ respectivement.
De plus,

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^1(\Omega)} \text{ et } \|g_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \le \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \text{ pour tout } n \in I\!N.$$

On prend $v = T_k(u_n)$ comme fonction test dans (6.9) pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_k(u_n)\, dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n T_k(u_n) dx + \int_\Omega T_n(\alpha(u_n))T_k(u_n)\, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))T_k(u_n)\, d\sigma = \int_\Omega T_n(f)T_k(u_n)dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g)T_k(u_n)d\sigma.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Les troisième et quatrième termes du membre de gauche de (6.10) positifs, ce qui entraîne

$$\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_k(u_n)\, dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n T_k(u_n) dx \le k(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}). \tag{6.11}$$

Comme $\int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n T_k(u_n) \ge \int_\Omega |T_k(u_n)|^{p(x)}dx$, alors nous déduisons de (6.11),

$$\int_\Omega \Phi(\nabla T_k(u_n) - \Theta(u_n))\nabla T_k(u_n)\, dx + \int_\Omega |T_k(u_n)|^{p(x)}dx \le k(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}). \tag{6.12}$$

D'une façon analogue que celle dans la preuve de la coercivité de A_n, on montre que

$$\begin{aligned} \rho_{1,p(x)}(T_k(u_n)) &\leq kC_1(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}) \\ &\leq kC_2, \end{aligned} \tag{6.13}$$

où $C_2 = \text{const}(f, g, p^-, p^+)$.

D'où,

$$\|T_k(u_n)\|_{1,p(x)} \leq 1 + (kC_2)^{\frac{1}{p^-}} . \tag{6.14}$$

On déduit que pour tout $k > 0$, la suite $(T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et donc dans $W^{1,p^-}(\Omega)$.

Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout $k > 0$,

$$T_k(u_n) \rightharpoonup v_k \;\text{ dans }\; W^{1,p^-}(\Omega)$$

et par l'injection compacte $W_0^{1,p^-}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$, nous avons

$$T_k(u_n) \to v_k \;\text{ dans }\; L^{p^-}(\Omega) \qquad \text{et p.p. dans } \Omega.$$

Assertion 2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers une fonction u.

Pour cela, nous montrons que u_n est une suite de Cauchy en mesure.

Soit $k > 0$ assez grand.

Dans (6.9) on prend $T_k(u_n)$ comme fonction test, pour obtenir

$$\rho_{1,p(.)}(T_k(u_n)) \leq k(\|f\|_{L^1(\Omega)}) + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}),$$

ce qui implique que,

$$\int_{\{|u_n|>k\}} k^{p(x)}dx \leq k(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}).$$

Il s'ensuit que

$$\text{mes}\{|u_n| > k\} \leq k^{1-p^-}(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}).$$

Par conséquent,

$$\text{mes}\{|u_n| > k\} \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty \text{ puisque } 1 - p^- < 0. \tag{6.15}$$

De plus, pour chaque $t > 0$ fixé et pour chaque nombre $k > 0$, on sait que

$$\{|u_n - u_m| > t\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{mes } (\{|u_n - u_m| > t\}) &\leq \text{mes } (\{|u_n| > k\}) + \text{mes } (\{|u_m| > k\}) \\ &\quad + \text{mes } (\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Soit $\epsilon > 0$. En nous référant à (6.15), nous choisissant $k = k(\epsilon)$ tel que

$$\text{mes}(\{|u_n| > k\}) \leq \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \text{mes}(\{|u_m| > k\}) \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{6.17}$$

Puisque $T_k(u_n)$ converge fortement dans $L^{p^-}(\Omega)$, alors elle est une suite de Cauchy dans $L^{p^-}(\Omega)$.

Donc

$$\text{mes } (\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}) \leq \frac{1}{t^{p^-}} \int_\Omega |T_k(u_n) - T_k(u_m)|^{p^-} dx \leq \frac{\epsilon}{3}, \tag{6.18}$$

pour tout $n, m \geq n_0(t, \epsilon)$.

Finalement, de (6.16), (6.17) et (6.18) nous déduisons que

$$\text{mes}(\{|u_n - u_m| > t\}) \leq \epsilon \ \ \forall n, m \geq n_0(t, \epsilon). \tag{6.19}$$

Ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in I\!N}$ est de Cauchy en mesure et alors converge presque partout vers une fonction u.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \ \text{ dans } \ W^{1,p^-}(\Omega), \\ &T_k(u_n) \to T_k(u) \ \text{ dans } \ L^{p^-}(\Omega) \ \text{ et p.p. dans } \ \Omega. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Assertion 3. $(\nabla u_n)_{n \in I\!N}$ converge en mesure vers le gradient faible de u.

En effet, soient ϵ, t, k, ν des nombres réels positifs (on suppose que $\nu < 1$) et soit $n \in I\!N$.

Nous avons l'inclusion suivante

$$\{|\nabla u_n - \nabla u| > t\} \subset \{\{|u_n| > k\} \cup \{|u| > k\} \cup \{|\nabla T_k(u_n)| > k\} \cup \{|\nabla T_k(u)| > k\} \cup \{|u_n - u| > \nu\} \cup G\}$$

où

$$G = \{|\nabla u_n - \nabla u| > t, |u_n| \leq k, |u| \leq k, |\nabla T_k(u_n)| \leq k, |\nabla T_k(u)| \leq k, |u_n - u| \leq \nu\}.$$

La même méthode utilisée dans la preuve de l'Assertion 2 nous permet d'obtenir pour k suffisamment grand,

$$\text{mes}(\{|u_n| > k\} \cup \{|u| > k\} \cup \{|\nabla T_k(u_n)| > k\} \cup \{|\nabla T_k(u)| > k\}) \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{6.21}$$

D'autre part, l'application

$$\mathcal{A} : (s, \xi_1, \xi_2) \mapsto (\Phi(\xi_1 - \Theta(s)) - \Phi(\xi_2 - \Theta(s)))(\xi_1 - \xi_2)$$

est continue, l'ensemble

$$\mathcal{K} := \{(s, \xi_1, \xi_2) \in I\!R \times I\!R^N \times I\!R^N, |s| \leq k, |\xi_1| \leq k, |\xi_2| \leq k, |\xi_1 - \xi_2| > t\}$$

est compact et

$$(\Phi(\xi_1 - \Theta(s)) - \Phi(\xi_2 - \Theta(s)))(\xi_1 - \xi_2) > 0, \quad \forall \xi_1 \neq \xi_2.$$

Par conséquent, l'application $\mathcal{A}$ atteint son minimum sur $\mathcal{K}$, que nous noterons par β.

Nous avons donc $\beta > 0$ et

$$\begin{aligned}\int_G \beta dx &\leq \int_G [\Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n)) - \Phi(\nabla u - \Theta(u_n))][\nabla u_n - \nabla u]dx \\ &\leq \int_\Omega [\Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n)) - \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u_n)))]\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx.\end{aligned}$$

On prend ensuite $v = T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))$ dans (6.9) pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2} u_n T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx \\ &= -\int_\Omega T_n(\alpha(u_n))T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx - \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))d\sigma \\ &+ \int_\Omega T_n(f)T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g)T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))d\sigma \\ &\leq \nu(\|T_n(\alpha(u_n))\|_{L^1(\Omega)} + \|T_n(\gamma(u_n))\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx \\ &\leq \nu(\|T_n(\alpha(u_n))\|_{L^1(\Omega)} + \|T_n(\gamma(u_n))\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}) \\ &- \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2} u_n T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u)).\end{aligned}$$

Maintenant, prenons $v = \frac{1}{k}T_k(u_n)$ dans (6.9), on obtient

$$\int_\Omega T_n(\alpha(u_n))\frac{1}{k}T_k(u_n)dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))\frac{1}{k}T_k(u_n)d\sigma \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}. \quad (6.22)$$

Puisque

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}T_k(u_n) = \mathrm{sign}_0(u_n)$$

et

$$\mathrm{sign}_0(u_n) = \mathrm{sign}_0(T_n(\alpha(u_n))) = \mathrm{sign}_0(T_n(\gamma(u_n))),$$

donc, en passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, on obtient

$$\|T_n(\alpha(u_n))\|_{L^1(\Omega)} + \|T_n(\gamma(u_n))\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}.$$

Par conséquent, on a

$$\left|\int_\Omega(\Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx\right| \leq \nu C_3 + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-1}\left|T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))\right| dx. \quad (6.23)$$

D'autre part, puisque

$$|u_n|^{p(x)-1} \to |u|^{p(x)-1} \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega)$$

et

$$T_{k+\nu}(u_n) \to T_{k+\nu}(u) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega),$$

alors, d'après l'hypothèse (H_3), on obtient

$$\Theta(T_{k+\nu}(u_n)) \to \Theta(T_{k+\nu}(u)) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega). \quad (6.24)$$

Par conséquent,

$$\Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u_n))) \to \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u)) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega) \quad (6.25)$$

et comme

$$\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u)) \rightharpoonup \nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u) - T_k(u)) \text{ dans } L^{p(x)}(\Omega), \quad (6.26)$$

nous déduisons alors que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u_n)))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx\\ &= \int_\Omega \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u)))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u) - T_k(u))dx.\end{aligned} \quad (6.27)$$

Maintenant,

$$\lim_{\nu \to 0} \nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u) - T_k(u)) = 0,$$

et pour $\nu < 1$, nous utilisons (H_3), pour obtenir

$$\begin{aligned}&\Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u)))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u) - T_k(u))\\&\leq C_4(|T_{k+1}(u)|^{p(x)-1} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)-1})|\nabla T_1(T_{k+1}(u) - T_k(u))|.\end{aligned}$$

Or,

$$(|T_{k+1}(u)|^{p(x)-1} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)-1})|\nabla T_1(T_{k+1}(u) - T_k(u))| \in L^1(\Omega),$$

par conséquent, on utilise le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$\lim_{\nu \to 0} \int_\Omega \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u)))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u) - T_k(u))dx = 0.$$

Ensuite, soit $\delta > 0$ tel que $\nu = \frac{\delta}{4C}$. il existe donc un entier $n_1 > 0$ tel que

$$\int_\Omega \Phi(\nabla T_k(u) - \Theta(T_{k+\nu}(u_n)))\nabla T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))dx \leq \frac{\delta}{2} \qquad \forall n > n_1 \tag{6.28}$$

et comme

$$\int_\Omega |u_n|^{p(x)-1} |T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))| \, dx \to 0 \text{ lorsque } \nu \to 0,$$

alors

$$\nu C_3 + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-1} |T_\nu(T_{k+\nu}(u_n) - T_k(u))| \, dx \leq \frac{\delta}{2}. \tag{6.29}$$

Par conséquent, les deux inégalités (6.23) et (6.29) impliquent que

$$\int_G \beta \leq \delta.$$

En utilisant le Lemme 1.2.1, il s'en suit que

$$\text{mes}(G) \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{6.30}$$

Finalement, l'assertion 2 donne l'existence d'un entier $n_2 \in I\!N$, tel que

$$\text{mes}(\{|u_n - u| > \nu\}) \leq \frac{\epsilon}{3}, \forall n \geq n_2. \tag{6.31}$$

Par conséquent, les résultats précédents assurent l'existence d'un entier $n_0 = \max(n_1, n_2)$, tel que

$$\operatorname{mes}(\{|\nabla u_n - \nabla u| > t\}) \leq \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

D'où, ∇u_n converge vers ∇u en mesure.

Assertion 4. $(u_n)_{n\in I\!N}$ converge p.p. sur $\partial\Omega$ vers une certaine fonction v.

Nous savons que l'opérateur de trace est compact de $W^{1,1}(\Omega)$ à valeurs dans $L^1(\partial\Omega)$, il existe donc une constante $C_5 > 0$ tel que

$$\|T_k(u_n) - T_k(u)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq C_5\|T_k(u_n) - T_k(u)\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Par conséquent, on a

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } L^1(\partial\Omega) \text{ et p.p. sur } \partial\Omega.$$

D'où, il existe un ensemble $A \subset \partial\Omega$ tel que $T_k(u_n)$ converge vers $T_k(u)$ sur $\partial\Omega\backslash A$ avec $\mu(A) = 0$, où μ est une mesure sur $\partial\Omega$.

Pour tout $k > 0$, on considère maintenant les ensembles suivants : $A_k = \{x \in \partial\Omega : |T_k(u(x))| < k\}$ et $B = \partial\Omega \setminus \bigcup\limits_{k>0} A_k$.

On a

$$\begin{aligned} \mu(B) = \frac{1}{k}\int_B |T_k(u)|d\sigma &\leq \frac{C_4}{k}\|T_k(u)\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_6}{k}\|T_k(u)\|_{1,p(x)}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

On sait que $\rho_{1,p(.)}(T_k(u_n)) \leq kM$ où M est une constante positive qui ne dépend pas de n. Alors,

$$\int_\Omega |T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\,dx \leq kM. \tag{6.33}$$

On applique le Lemme de Fatou dans (6.33) pour obtenir

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{p(x)}\,dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(x)}\,dx \leq kM,$$

ce qui est équivalent à

$$\rho_{1,p(.)}(T_k(u)) \leq kM. \tag{6.34}$$

D'après (6.34), on en déduit que

$$\|T_k(u)\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \leq C_7\left(k^{\frac{1}{p^-}} + k^{\frac{1}{p^+}}\right).$$

D'où, pour $k \to +\infty$ dans (6.32) on a $\mu(B) = 0$.

Ainsi, nous définissons maitenant la fonction v sur $\partial\Omega$ par

$$v(x) = T_k(u(x)) \text{ si } x \in A_k.$$

On prend $x \in \partial\Omega \setminus (A \cup B)$; alors il existe $k > 0$ tel que $x \in A_k$ et on a

$$u_n(x) - v(x) = (u_n(x) - T_k(u_n(x))) + (T_k(u_n(x)) - T_k(u(x)))\,.$$

Puisque $x \in A_k$, on a $|T_k(u(x))| < k$ ainsi $|T_k(u_n(x))| < k$, d'où $|u_n(x)| < k$.

Par conséquent,

$$u_n(x) - v(x) = (T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))) \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

D'où u_n converge vers v p.p. sur $\partial\Omega$.

Assertion 5. u est une solution entropique du problème (6.1).

Puisque la suite $(\nabla T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\nabla T_k(u)$ en mesure, alors de (6.14) et du Lemme 6.2.1, on déduit que

$$\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u) \quad \text{dans } \left(L^1(\Omega)\right)^N. \tag{6.35}$$

Par conséquent, les assertions 2, 4 et le résultat (6.35) donnent $u \in \mathcal{T}^{1,p(x)}_{tr}(\Omega)$.

Soit $\varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on prend $v = T_k(u_n - \varphi)$ comme fonction test dans (6.9), ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_k(u_n - \varphi)\,dx + \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n T_k(u_n - \varphi)dx \\
&+ \int_\Omega T_n(\alpha(u_n))T_k(u_n - \varphi)\,dx + \int_{\partial\Omega} T_n(\gamma(u_n))T_k(u_n - \varphi)\,d\sigma \\
&= \int_\Omega T_n(f)T_k(u_n - \varphi)\,dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g)T_k(u_n - \varphi)\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Soit $\overline{k} = k + \|\varphi\|_\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n))\nabla T_k(u_n - \varphi)\,dx &= \int_\Omega \Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n) - \Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla T_k(T_{\overline{k}}(u_n) - \varphi)\,dx \\
&= \int_\Omega \Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n) - \Theta(u_n))\nabla T_{\overline{k}}(u_n)\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx \\
&- \int_\Omega \Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n) - \Theta(u_n))\nabla\varphi\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx,
\end{aligned}$$

où $\Omega(n, \overline{k}) = \{|T_{\overline{k}}(u_n) - \varphi| \le k\}$ et χ_B la fonction caractéristique de la partie mesurable $B \in \mathbb{R}^d$.

L'inégalité (6.36) s'écrit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n)-\Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla T_{\overline{k}}(u_n)+\frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\Big)\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx\\&-\int_\Omega \Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n)-\Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla\varphi\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx+\int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_nT_k(u_n-\varphi)dx\\&+\int_\Omega T_n(\alpha(u_n))T_k(u_n-\varphi)\,dx+\int_{\partial\Omega}T_n(\gamma(u_n))T_k(u_n-\varphi)\,d\sigma\\&=\int_\Omega T_n(f)T_k(u_n-\varphi)\,dx+\int_{\partial\Omega}T_n(g)T_k(u_n-\varphi)\,d\sigma+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx.\end{aligned}\tag{6.37}$$

Comme

$$\nabla T_{\overline{k}}(u_n)\rightharpoonup\nabla T_{\overline{k}}(u)\ \text{ dans }\ L^{p(x)}(\Omega)$$

et

$$\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))\longrightarrow\Theta(T_{\overline{k}}(u))\ \text{ dans }\ L^{p(x)}(\Omega),\tag{6.38}$$

donc

$$\nabla T_{\overline{k}}(u_n)-\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))\rightharpoonup\nabla T_{\overline{k}}(u)-\Theta(T_{\overline{k}}(u))\text{ dans }\ L^{p(x)}(\Omega).$$

Il s'en suit que,

$$\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n)-\Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\rightharpoonup\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u)-\Theta(T_{\overline{k}}(u)))\ \text{ dans }\ L^{p'(x)}(\Omega).\tag{6.39}$$

En outre, on a

$$\nabla\varphi\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\longrightarrow\nabla\varphi\chi_{\Omega(\overline{k})}\ \text{ dans }\ L^{p(x)}(\Omega)$$

avec $\Omega(\overline{k})=\{|T_{\overline{k}}(u)-\varphi|\le k\}$.
Par conséquent,

$$\int_\Omega\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n)-\Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla\varphi\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx\longrightarrow\int_\Omega\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u)-\Theta(T_{\overline{k}}(u)))\nabla\varphi\chi_{\Omega(\overline{k})}\,dx.\tag{6.40}$$

D'après (H_3) et les propriétés de la fonction troncature, on déduit que

$$|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\le(C\overline{k})^{p(x)}.$$

De (6.38) et par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx\longrightarrow\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u))|^{p(x)}\chi_{\Omega(\overline{k})}\,dx.$$

Comme

$$\Big(\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n) - \Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla T_{\overline{k}}(u_n) + \frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\Big)\chi_{\Omega(n,\overline{k})} \geq 0 \ \text{ p.p. dans } \ \Omega,$$

on obtient grâce au lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u) - \Theta(T_{\overline{k}}(u)))\nabla T_{\overline{k}}(u) + \frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u))|^{p(x)}\Big)\chi_{\Omega(\overline{k})}\,dx \\ &\quad\leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega \Big(\Phi(\nabla T_{\overline{k}}(u_n) - \Theta(T_{\overline{k}}(u_n)))\nabla T_{\overline{k}}(u_n) + \frac{1}{p(x)}|\Theta(T_{\overline{k}}(u_n))|^{p(x)}\Big)\chi_{\Omega(n,\overline{k})}\,dx\Big).\end{aligned} \tag{6.41}$$

On passe ensuite à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans (6.37) pour obtenir le résultat recherché.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié des questions d'existence de solutions pour des problèmes de type elliptique faisant intervenir des données peu régulières (L^1 ou mesure). Pour ces problèmes, la nécessité de travailler dans des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables est motivée par l'apparition de ces espaces dans la modélisation de fluides électrorhéologiques et thermorhéologiques [66] et dans la restauration d'image [30]. A travers ce mémoire de thèse, l'originalité de l'ensemble des travaux présentés s'est marquée par les techniques développées pour montrer l'existence de solutions entropiques des problèmes des chapitre 3 et 4, qui sont non classiques en montrant la convergence forte des tronquées dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ par l'adaptation des fonctions tests très appropriés. Dans le chapitre 5, les résultats obtenus sont qualifiés par l'introduction d'une méthode de pénalisation car la difficulté à ce niveau et qui reste toujours un problème ouvert dans le sens qu'aucune hypothèse n'est supposée sur le signe de g. Dans le chapitre 6, les difficultés principales pour prouver l'existence de solutions proviennent du terme $\theta(u)$ et l'opérateur principal qui ne vérifie pas les hypothèses classiques de Leray-Lions.

Actuellement, ce travail soulève un certain nombre de questions qui méritent d'être approfondies par la suite. Par exemple, il serait judicieux de penser à la notion de solution qui assurerait l'unicité et qui introduit un nouveau cadre fonctionnel qui améliorerait aussi l'hypothèse de contrôle de l'exposant $p(.)$ (négliger la condition p^+), généraliser le travail du chapitre 6, en utilisant le théorème de décomposition de mesure de Radon sur Ω qui ne charge pas les ensembles de $p(.)$-capacité nulle, comme introduit par Nyanquini et als [57].

Enfin, notons que dans la littérature, très peu de problèmes paraboliques ont été traités. Il semble que cette difficulté soit liée à la compréhension et à la définition d'espaces fonctionnels adaptés. Par conséquent, des questions intéressantes ouvrent des pistes de recherche dans ce volet.

Bibliographie

[1] A. Abassi, A. El Hachimi & A. Jamea, *Entropy soutions to nonlinear Neumann problems with L^1-data*, Inetr. J. Math. and Stat., Vol. 2, No. S08, 2008, pp 4–17.

[2] R. Adams, *Sobolev spaces, vol. 65, Academic Press*, 1975.

[3] L. Aharouch, E. Azroul & A. Benkirane, *Quasilinear degenerated equations with L^1 datum and without coercivity in perturbation term*, Electronic J.Diff .Equ, (2006), No. 19, 1–18.

[4] Y. Akdim, E. Azroul & M. Rhoudaf, *On the Solvability of degenerated quasilinear elliptic problems*, Electronic J. Diff. Equ, Conf. 11, (2004), pp. 11–22.

[5] Y. Akdim, E. Azroul & A. Benkirane, *Existence Results for Quasilinear Degenerated Equations vias Strong Convergence of Truncations*, Revista Matemática Complutence, Madrid, (2004), 17 ; N 2, 359–379.

[6] Y. Akdim, E. Azroul & A. Benkirane, *Existence of Solutions for Quasilinear Degenerated Elliptic Equations*, Electronic J. Diff .Equ, Vol. 2001, N 71 (2001), 1–19.

[7] A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina & G. Trombetti, *Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity*, Ann. Mat. Pura Appl. **182** (2003), 53–79.

[8] F. Andreu, N. Igbida, J.M. Mazón & J. Toledo, *L^1 existence and uniqueness results for quasi-linear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, Ann. Ins. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2007), 61–89.

[9] F. Andreu, J.M. Mazón, S. Segura De Léon & J. Toledo, *Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions*, Adv. Math. Sci. Appl. **7**(1)(1997), 183–213.

[10] S. Antontsev & S. Shmarev, *Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions.* In : Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, vol. 3, pp. 1–100, Elsevier, 2006.

[11] S. Antontsev & J.F. Rodrigues, *On stationary thermorheological viscous flows.* Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **52** (2006), no. 1, 19–36.

[12] E. Azroul, A. Barbara & M. El lekhlifi, *T-$p(x)$-solutions for nonlinear elliptic equations with an L^1-dual datum.* Appl. Math. (Warsaw) 39 (2012), no. 3, 339–364.

[13] E. Azroul, M.B. Benboubker & S. Ouaro, *Entropy solutions for nonlinear nonhomogeneous Neumann problems involving the generalized p(x)-Laplace operator*, J. Appl. Anal. Comput., vol. 3 (2013), No. 2, pp. 105–121.

[14] E. Azroul, M.B. Benboubker & M. Rhoudaf, *Entropy solution for some p(x)-Quasilinear problems with right-hand side measure*, Afr. diaspora J. Math. Vol. 13, No 2, 23–44 (2012).

[15] E. Azroul, M.B. Benboubker & M. Rhoudaf, *On some $p(x)-$quasilinear problem with right-hand side measure*, Math. Comput. Simul. (2013), http ://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2013.09.009.

[16] E. Azroul, A. Benkirane & M. Rhoudaf, *On some strongly nonlinear elliptic problems in L^1-data with a nonlinearity having a constants sign in Orlicz Spaces via penalization methods,* Aust J. Math Analysis and Appl, vol. 7, No. 5, pp, 1–25, (2010).

[17] E. Azroul, H. Hjiaj & A. Touzani, *Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear p(x)-elliptic equations*, Electron. J. Diff. Equ., No.**68** (2013), pp. 1–27.

[18] E. Azroul, H. Redwane & C. Yazough, *Strongly nonlinear nonhomogeneous elliptic unilateral problems with L^1 data and no sign conditions*, Electron. J. Diff. Equ., No.**79** (2012), pp. 1–20.

[19] M.B. Benboubker, E. Azroul & A. Barbara, *Quasilinear elliptic problems with nonstandard growth*, Electronic J. Diff Equ, Vol. 2011 (2011), No. 62, pp. 1–16.

[20] M. Bendahmane & P. Wittbold, *Renormalized solutions for nonlinear elliptic equations with variable exponents and L^1-data*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 567–583.

[21] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre & J.L. Vazquez, *An L^1 theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 22 (1995), 241–273.

[22] O.T. Bengt, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2000).

[23] L. Boccardo & T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Func. Anal. **87** (1989), no.1, 149–169.

[24] L. Boccardo & T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 641–655.

[25] L. Boccardo, F. Murat & J.P. Puel, *Résultats d'existences pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, **11** (1984), 213–235.

[26] L. Boccardo, F. Murat & J.P. Puel, *Existence of Bounded Solutions for non linear elliptic unilateral problems*, Ann-Mat. Pura Appl., (4) 152 (1988), 183–196.

[27] L. Boccardo, T. Gallouët & L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for non linear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. nonlinéaire, 13, 1996, pp. 539–551.

[28] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.

[29] A. Chambolle & P.L. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numer. Math., **76** (1997), pp. 167–188.

[30] Y. Chen, S. Levine & M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math., **66** (2006), 1383–1406.

[31] A. Dall'Aglio, *Approximated solutions of equation with L^1 data. Application to the H-convergence of quasilnear equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **170** (1996), 207–240.

[32] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina & A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 28, 4 (1999), 741–808.

[33] L. Diening, *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalizedLebesgue and Sobolev spaces $L^{p(.)}$ and $W^{k,p(.)}$*, Math. Nachr. **268** (2004), 31–43.

[34] L. Diening, P. Hästö & A. Nekvinda, *Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces.* In : FSDONA04 Proceedings (Milovy, Czech Republic), 2004 pp. 38–58.

[35] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö & M. *Ružička*, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **2017**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

[36] M. Eleuteri, P. Harjulehto & T, Lukkari, *Global regularity and stability of solutions to obstacle problems with nonstandard growth,* Preprint.

[37] X.L. Fan & Q.H. Zhang, *Existence for p(x)-Laplacien Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis, **52** (2003), 1843–1852.

[38] X. Fan, J. Shen & D. Zhao, *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 749–760.

[39] X. Fan & D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 424–446.

[40] D. Gilbarg & N.S. Trundinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[41] P. Harjulehto, P. Hästö & M. Koskenoja, *Properties of capacities in variable exponents Sobolev spaces*, J. Anal. Appl. 5 (2) (2007), 71–92.

[42] T. Kao & C. Tsai, *On the solvability of solution to some quasilinear elliptic problems*, Taiwanesa Journal of Mathematics, Vol 1 N4 (1997), pp. 574–553.

[43] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications, vol. 13, Springer-Verlag, 1993.

[44] S. Kichenassamy & L. Veron, *Singular solutions of the p-Laplace equation*, Math. Ann. **275** (1985), 599–615.

[45] O. Kováčik & J. Rákosník, *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak Math, J. 41 (116) (1991), 592–618.

[46] S.N. Kruzhkov, *First order quasi-linear equations in several independent variables*, Math. USSR Sbornik 10 (2) 1970, 217–243.

[47] J. Leray & J.L. Lions, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty et Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[48] J.L. Lions, *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[49] J.L. Lions & E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, vol. 1 et 2, 1968.

[50] P.L. Lions & F. Murat, *Solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires*, unpublished paper.

[51] P.L. Lions, B. Perthame & E. Tadmor ; *Formulation cinétique des lois de conservation scalaires multidimensionnelles*, C.R., Acad. Sci. Paris, Série I Math. **312** (1991), 97–102.

[52] C.B.Jr. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New york, 1966.

[53] F. Murat, *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales*, Cours à l'Université de Seville, Publication 93023, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris V I, 1993.

[54] J. *Nečas*, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson et Cie, Paris, 1967.

[55] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034 (1983), Springer, Berlin.

[56] H. Nakano, *Modulared semi-ordered linear spaces.* Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[57] I. Nyanquini, S. Ouaro & S. Soma, *Entropy solution to nonlinear multivalued elliptic problem with variable exponents and measure data.* Submitted

[58] I. Nyanquini & S. Ouaro, *Well-posedness result for a nonlinear elliptic problem involving variable exponent and Fourier type boundary condition*, Afr. Mat. **23** (2012), No. 2, 205–228.

[59] S. Ouaro & S. Soma, *Weak and entropy solutions to nonlinear Neumann boundary problems with variable exponent*, Complex Var. Elliptic Equ. Vol. **56**, Nos. 7-9, (2011), 829–851.

[60] S. Ouaro, A. Tchousso, *Well-posedness result for a nonlinear elliptic problem involving variable exponent and Robin type boundary condition*, Afr. Diaspora J. Math. **11**, No. 2 (2011), 36–64.

[61] S. Ouaro & S. Traoré, *Entropy solutions to the obstacle problem for nonlinear elliptic problems with variable growth and L^1-data,* Pac. J. Optim., **5**. no 1, (2009), 127–141.

[62] W.Orlicz, *Uber Konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Math.3, (1931), 200–211.

[63] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel*, Thèse **1996**.

[64] J. F. Rodrigues, M. Sanchón & J.M. Urbano, *The obstacle problem for nonlinear elliptic equations with variable growth and L^1-data,* Monatsch. Math., **154** (2008), 303–322.

[65] L. Rudin, S. Osher & E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D, **60** (1992), 259–268.

[66] M. Ruzicka, *Electrorheological fluids : modelling and mathematical theory*, Lecture Notes in Mathematics 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[67] M. Sanchón & J.M. Urbano, *Entropy solutions for the p(x)-Laplace equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009) 6387–6405.

[68] F.D. Thelin, *Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial diDerential equation*, Nonlinear Anal. **6** (1982), 839–844.

[69] L. Wang, Y. Fan & W. Ge, *Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the* $p(x)-$ *Laplace operator.* Nonlinear Anal. **71** (2009), 4259–4270.

[70] P. Wittbold & A. Zimmermann, *Existence and uniqueness of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with variable exponent and* L^1*-data*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 72 (2010), 2990–3008.

[71] J. Yao, *Solutions for Neumann boundary value problems involving p(x)-Laplace operators*, Nonlinear Anal. **68** (2008), pp. 1271-1283.

[72] C. Zhang & S. Zhou, *Entropy and renormalized solutions for the p(x) Laplacian equation with measure data*, Bull. Aust. Math. Soc., **82** (2010), 459–479.

[73] D. Zhao & X.L. Fan, *On the Nemytskii operators from* $L^{p1(x)}$ *to* $L^{p2(x)}$, J. Lanzhou Univ. 34 (1) (1998) 1–5.

[74] D. Zhao, W.J. Qiang & X.L. Fan, *On generalized Orlicz spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$, J. Gansu Sci. 9 (2) 1997, 1–7.

[75] V.V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Math. USSR Izvestiya 29 (1987), no. 1, 33–66.

[76] V.V. Zhikov, *Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system.* Differential Equations 33 (1997), no. 1, 108–115.