Applied Sciences *** Monographs # 7

Radouane YAFIA

Contributions to the study of Hopf bifurcation for differential equations with delay. Applications to a population dynamics problem

Contribution à l'Etude de la Bifurcation de Hopf dans le Cadre des Equations Différentielles à Retard, Application à un Problème en Dynamique de Population

Ph.D. Thesis, University Chouaib Doukkali,
Faculty of Sciences, El Jadida, Maroque

Geometry Balkan Press
Bucharest, Romania
= 2008 =

Contributions to the study of Hopf bifurcation for differential equations with delay. Applications to a population dynamics problem

[Contribution à l'Etude de la Bifurcation de Hopf dans le Cadre des Equations Différentielles à Retard; Application à un Problème en Dynamique de Population] (French)

Monographs # 7

Contributions to the study of Hopf bifurcation for differential equations with delay. Applications to a population dynamics problem
[Contribution à l'Etude de la Bifurcation de Hopf dans le Cadre des Equations Différentielles à Retard, Application à un Problème en Dynamique de Population] (French)
Radouane YAFIA
Bucharest: Applied Sciences * Monographs, 2008

Includes bibliographical references.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

THESE

Présentée à la Faculté, pour obtenir le grade de Docteur
(option : Mathématiques Appliquées)

Contribution à l'Etude de la Bifurcation de Hopf dans le Cadre des Equations Différentielles à Retard, Application à un Problème en Dynamique de Population.

Par
Radouane YAFIA

Soutenue le 15 Janvier 2005, devant la commission d'examen :

MM.

A. EL HACHIMI	*Professeur, Faculté des Sciences EL JADIDA*	*Président*
A. AZIZ ALAOUI	*Professeur, l'Université de le Havre (France)*	*Rapporteur*
M. BAHAJ	*Professeur, F. S. T. SETTAT*	*Rapporteur*
N. EL HOUSSIF	*Professeur, Faculté des Sciences EL JADIDA*	*Rapporteur*
H. LABANI	*Professeur, Faculté des Sciences EL JADIDA*	*Examinateur*
H. TALIBI ALAOUI	*Professeur, Faculté des Sciences EL JADIDA*	*Examinateur*

Table des matières

Résumé

Notre premier objectif dans ce travail est de donner une démonstration du changement de la stabilité de la branche supercritique de solutions périodiques bifurquées dans le cadre des équations différentielles à retard, en se basant sur les deux étapes suivantes:

(i) Réduction de l'équation à un système en dimension deux par la formule de variation de la constante et le théorème de la variété centre.

(ii) Estimation de la distance entre la solution de l'équation initiale et la solution périodique bifurquée.

Nous obtenons ainsi un domaine de stabilité de la branche supercritique.

Le second objectif est d'étudier une équation différentielle à un seul retard issue d'un modèle en dynamique de population cellulaire sanguine (Haematopoiese).

Ce modèle, initialement introduit par Mackey (1978) présente une position d'équilibre triviale qui est instable et une famille de positions d'équilibre non triviales dont la stabilité dépend du retard.

Nous montrons l'existence d'une valeur critique τ_0 du retard τ autour de laquelle nous obtenons un changement de stabilité de cette famille de positions d'équilibre en fonction du retard τ.

Nous avons ainsi introduit un modèle approché en fonction de cette valeur critique du retard qui coincide avec celui de Mackey pour la valeur du retard $\tau = \tau_0$. Le modèle approché possède un point d'équilibre trivial et un non trivial ne dépendant pas du retard.

Par une étude du modèle approché analogue à celle du modèle de Mackey, nous obtenons en particulier l'existence d'une branche de solutions périodiques bifurquées à partir du point d'équilibre non trivial. Enfin nous donnons un algorithme explicite de calcul des éléments de la bifurcation.

Abstract

Our first goal in this work is to give a proof of exchange of stability from the trivial branch to the bifurcated one. This proof is based on the two following steps:

i) reduction of the equation to a two-dimensional system via the variation of constant formula end the center manifold theorem.

ii) Estimation of the distance between solutions of the original equation and the bifurcated periodic solutions.

We obtain an estimate of the stability region.

The second goal is to study the dynamics of Haematopoietic Stem Cells (HSC) Model with one delay.

The model, was initially introduced by Mackey (1978). There are two possible stationary states. One of them is trivial and unstable, the second is nontrivial, depending on the delay τ.

We prove the existence of a critical value τ_0 *of the delay* τ *in which the exchange of stability of nontrivial stationary state may occur.*

We introduce also an approachable model depending on this critical value of the delay, such that the nontrivial stationary state do not depend on the delay which is the same one of Mackey model at $\tau = \tau_0$.

By a similar study of the approachable model as in Mackey model, we obtain the existence of the bifurcated periodic solution branch around the nontrivial stationary state.

In the end, we give an explicit algorithm for calculating the elements of bifurcation.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 présentation du travail

La théorie du problème de la bifurcation de Hopf occupe une place préviligiée dans la recherche mathématique. Cela est dû au fait que cette théorie est un outil puissant pour étudier l'existence de solutions périodiques des équations différentielles dépendant d'un paramètre issues de la physique, de la chimie, de la biologie,....
Le présent travail est une contribution à l'étude du problème de la bifurcation de Hopf dans le cadre des équations différentielles à retard avec une application à un modèle en dynamique de population. Ce travail comporte deux volets. Un volet théorique et un autre pratique.
Dans le volet théorique, les résultats obtenus portent essentiellement sur l'asymptotique stabilité de la branche supercritique de solutions périodiques bifurquées. Notre résultat généralise celui de H. Talibi (1995) [89] dans le cadre des équations différentielles ordinaires. Il est à noter que cette méthode est directe et n'utilise pas la théorie classique de Floquet.
Dans le volet pratique, nous étudions un modèle en dynamique de populations cellulaire provenant de la production de cellules sanguine dans la moelle osseuse (l'hématopoïèse). Ce modèle, a été introduit par M. Mackey (1978) [63] pour étudier certaines maladies hématopoïétiques (l'anémie aplasique, la leucémie,...). Ce modèle a été repris

ces dernière année dans sa généralité par Mackey et al. [64] [65] [6] [62] [33] et aussi par Adimy et al. [2] [3] [4] [5] et la liste n'est pas exhaustive, pour étudier les problèmes de bornage, d'oscillations, de périodicité, de chaos, de comportement asymptotique....
Le modèle considéré dans ce travail est non structuré, gouverné par un système d'équations différentielles à retard.
Nous avons étudié le problème de stabilité des positions d'équilibres (triviale et branche non triviale dépendant du retard) en fonction du retard.
Nous avons mis au point l'existence d'une valeur critique du retard autour de laquelle, la branche des points d'équilibres non triviales change de comportement et l'étude du problème de la bifurcation de Hopf s'avère difficile.
L'introduction d'un modèle approché en fonction de cette valeur critique s'impose. Nous avons ainsi démontrer que le modèle approché a les mêmes propriétés de stabilité que le modèle initial et de plus il possède une branche de solutions périodiques bifurquées à partir de la position d'équilibre non triviale.
Nous donnons enfin un algorithme explicite pour déterminer la direction de la bifurcation et la stabilité des solutions périodiques bifurquées.

1.2 Historique sur les équations à retard et bifurcation de Hopf

Rappelons que les équations à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y'a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action: par exemple, dans les processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries,...), (ou qui nécessitent qu'un certain seuil soit atteint avant que le système ne soit activé). Beaucoup de phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie,...etc ont trouvé dans la théorie des équations à retard un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires). On appelle équation à retard toute équation de la forme:

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t), \tag{1.1}$$

où la valeur de la dérivée à un instant t de la solution x, ne dépend pas seulement de la valeur de x à l'instant t, mais aussi des valeurs prises avant l'instant t.

Le premier exemple traitant une classe générale d'équations à retard linéaire est dû à Polossuchin (1910) [77] et Schmidt (1911) [83]. Schmidt a considèré les solutions à dérivée en $O(|t|^{\alpha})$ quand $|t| \longrightarrow \infty$ et a prouvé une connection entre ce type de solutions et l'équation caractéristique de l'équation linéaire. Une classe générale d'équations à retard non linéaire a été initialement introduite par V. Volterra (1928) [97], (1931) [98] pour étudier respectivement le modèle prédateur-proie et le modèle de viscoelaticité. Il a aussi clarifié quelques propriétés des solutions en utilisant la méthode d'énergie.

A partir des années 1940, la théorie des équations à retard a connu un grand développement. Notamment, on trouve Bellman et Cooke (1963) [15], El'sgol'ts et Norkin (1973) [29], Hale (1977) [44], Hale et Verduyn Lunel (1993) [46], Diekmann, Van Gils Lunel et Walther (1995) [27],....

Dans la pratique, il se peut que ces phénomènes dépendent d'un paramètre par exemple : température, tension, résistance,.... Dans ce cas le phénomène est gouverné par une équation différentielle dépendant d'un paramètre.

Considérons une famille à un paramètre d'applications d'un espace de Banach X dans lui même :

$$\mathcal{J} : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X,$$

et on se pose le problème de la résolution de l'équation:

$$\mathcal{J}(\alpha,x) = 0.$$

Dans de nombreuses situations, on connait pour tout α une ou des solution(s): les solutions triviales de l'équation. Supposons par exemple, que pour tout α on ait:

$$\mathcal{J}(\alpha,0) = 0.$$

Si $\mathcal{J}$ est assez régulière au voisinage de 0 et si en un point α_0 la dérivée:

$$D_x\mathcal{J}(\alpha_0,0) \in Iso(X) \qquad (*)$$

où $Iso(X)$ est l'ensemble des isomorphismes de X vers X, alors $x = 0$ est une racine isolée pour cette valeur de α_0, et au voisinage de $(\alpha_0,0)$ l'équation

$$\mathcal{J}(\alpha,x) = 0$$

ait des racines "non évidentes" : $x \neq 0$. On dit alors que le point $(\alpha_0,0)$ est un point de bifurcation de $\mathcal{J}$.

Définition 1.2.1 $(\alpha_0,0)$ *est un point de bifuraction de racines de* $\mathcal{J} = 0$ *si et seulement si*

$$\forall\delta > 0,\exists(\alpha,x),\ \mid \alpha - \alpha_0 \mid < \delta,\ \mid x \mid < \delta, x \neq 0 \ \textit{tel que:}$$

$$\mathcal{J}(\alpha,x) = 0.$$

Dans de nombreux cas, l'application $\mathcal{J}$ est associée à une équation différentielle ordinaire ou à retard, ou plus généralement une équation d'évolution dépendant d'un paramètre.

Les racines de $\mathcal{J}$ représentent alors soit les points stationnaires de l'équation, soit des solutions périodiques déterminées à travers un opérateur de Poincaré. Du point de vue des systèmes dynamiques, la notion de bifurcation correspond au passage du système d'une position d'équilibre à une autre, ou d'une position d'équilibre à une orbite férmée.

L'un des cas les plus importants de passage d'un équilibre à une orbite fermée correspond à la bifurcation de Hopf.

La classe d'équations à retard que nous allons étudier est autonôme du premier ordre dépendant d'un paramètre α de la forme:

$$\dot{x}(t) = F(\alpha,x_t), \tag{1.2}$$

et vérifiant les hypothèses

$(\mathbf{H_0})$ $F : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^{k+3}, $F(\alpha,0) = 0$, pour tout α, x_t est la fonction

définie sur $[-r,0]$ par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $r \geq 0$ (r peut être infini), $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications continues de $[-r,0]$ dans $\mathbb{R}^n$, n est un entier naturel non nul, $k \geq 0$ et les applications $\varphi \longrightarrow D^j_\varphi F(\alpha,\varphi)$ sont bornantes pour tout α dans un borné et tout entier $j \leq 3+k$.
($\mathbf{H_1}$) l'équation caractéristique

$$\det \Delta(\alpha,\lambda) = 0, \tag{1.3}$$

avec

$$\Delta(\alpha,\lambda) = (\lambda Id - D_\varphi F(\alpha,0)e^{\lambda(.)}Id),$$

de l'équation linéarisée autour de la position d'équilibre $\varphi = 0$:

$$\dot{v}(t) = D_\varphi F(\alpha,0)v_t, \tag{1.4}$$

de l'équation (1.2) possède en un certain $\alpha = \alpha_0 \geq 0$ une racine purement imaginaire simple $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0) = i\omega_0$ et ne possède pas d'autres racines $\lambda_j \neq \lambda_0$ et $\overline{\lambda_0}$ du type $\lambda_j = m\lambda_0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
Soit $\lambda(\alpha)$ la racine de l'équation (1.3), pour α voisin de α_0 provenant de λ_0.
($\mathbf{H_2}$)

$$\frac{\partial Re\lambda(\alpha)}{\partial\alpha}_{/\alpha=\alpha_0} \neq 0. \tag{1.5}$$

Sous les hypothèses ($\mathbf{H_0}$) et ($\mathbf{H_1}$), l'équation (1.2) devient

$$\dot{x}(t) = Lx_t + R(\alpha,x_t), t \geq 0 \tag{1.6}$$

où $L = L(\alpha_0)$, avec $L(\alpha) = D_\varphi F(\alpha,0)$ et $R(\alpha,\varphi) = F(\alpha,\varphi) - L\varphi$.
De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude des changements qualitatifs des états d'équilibre en fonction du paramètre α de l'équation (1.2).
Dans le cadre des équations différentielle ordinaires on trouve :
Hopf en 1942 [54], Hsu et Kazarinoff [56], Poore [76], Marsden et McCracken [69], Howard et Kopell (1974) [55]....
Dans le cadre des équations différentielles à retard on trouve :
- Chafee en (1971) [20] a donné une première étude du problème de la bifurcation de

Hopf.

-Hale en (1977) [44] a étudié le problème dans le cas du retard fini basée essensiellement sur l'application d'une étude faite par le même auteur dans son livre [43].

-Chow et Mallet-Paret [22], ont appliqué la méthode de moyannisation aux équations différentielle à retard pour déterminer les éléments de la bifurcation : la stabilité, l'amplitude et la direction de l'orbite périodique bifurquée.

-Arino [7] a donné une nouvelle formulation analogue à celui considérée dans [44], en formulant le problème sous forme d'un problème de point fixe d'opérateur complétement continu.

-Schumacher [84] a utilisé la théorie des semigroupes non linéaires fortement continus sur un sous ensemble fermé d'un espace de Banach.

-Stech [87] a utilisé la théorie de Lyapunov-Schmidt et les techniques de Hale [44] pour étudier la bifurcation de Hopf dans le cas des équations différentielles à retard infini. Il a aussi donné un moyen (un algorithme) de calcul des éléments de bifurcation par un développement limité da la "fonction de bifurcation".

-Staffans [86] a étudié le problème de bifurcation de Hopf dans un cas analogue à celui de Stech [87] et aussi pour des équations aux différences et aux équations de type neutres (voir [46] pour ces équations) avec retard infini. Il a aussi calculé les éléments de bifurcation de ces familles d'équations. Les techniques utilisées sont analogues a celles utilisées dans [87].

-Dieckmann [27] reformule le problème sous forme d'une équation intégrale. En utilisant la théorie de la perturbation par dualité, il montre le théorème de la variété centre pour les équations différentielles à retard et déduisant l'éxistence des solutions périodiques bifurquées par réduction de l'équation intégrale à une équation différentielle ordinaire dans $\mathbb{R}^3$.

-Adimy [1] a utilisé la théorie des semigroupes intégrés pour étudier le problème de bifurcation de Hopf.

-Talibi [90] a utilisé une méthode d'approximation pour obtenir l'éxistence des solutions périodiques.

-Hbid [51] a utilisé une réduction principale sur la variété centre, la méthode de Lyapunov et la procédure de Poincaré.
-T. Faria et L. Magalhaes [30] étendent la théorie des formes normales aux équations différentielle à retard et appliquent cette théorie à la bifurcation de Hopf de telle équation.
Et la liste n'est pas terminer. Récemment ; la théorie de bifurcation de Hopf est considérée dans le cadre des équations aux dérivées partielles à retard, équations différentielles à retard en dimension infinie (O. Arino et E. Sanshez).

1.3 Présentation du résultat sur la bifurcation de Hopf supercritique

1.3.1 Position du problème

Prenons le cas général d'une équation différentielle fonctionnelle à retard (de type (1.6)) (en abrége, EDFR) qu'on écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = Lx_t + R(\alpha,x_t). \tag{1.7}$$

Généralement, cette équation est posée sur l'ensemble des applications continues$C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, où $r > 0$ est le retard et n est un entier positif (voir J. Hale [44]).
Notons que sous les hypothèses de $(\mathbf{H_0})$ à $(\mathbf{H_2})$, on aboutit au résultat du théorème de bifurcation de Hopf [44, 46] : il existe $\varepsilon_0 > 0$, des fonctions $x(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ et $\alpha(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ suffisamments régulières par rapport à ε telles que $x(\varepsilon)$ est une solution $\omega(\varepsilon)-$ périodique de l'équation (1.2) pour $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ telles que $x(0) = 0$; $\omega(0) = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\alpha(0) = \alpha_0$.
De plus, la bifurcation est sous-critique (instable) si $\alpha''(0) < 0$, et supercritique (uniformément stable) si $\alpha''(0) > 0$.
Notons par $(\mathbf{H_3})$ l'hypothèse de bifurcation de Hopf supercritique :

$(\mathbf{H_3})$

$$\alpha''(0) > 0.$$

Dans notre travail on se propose de montrer que sous les hypothèses du théorème de la bifurcation de Hopf supercritique $(\mathbf{H_0})$-$(\mathbf{H_3})$, on a la stabilité de la branche bifurquée supercritique.

1.3.2 Méthodes utilisées

Par la formule de variation de la constante "classique", donnée dans J. Hale [44] cette équation devient

$$x_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)X_0 R(\alpha,x_s)ds \tag{1.8}$$

avec $(T(t))_{t\geq 0}$ est le semigroupe associé à l'équation linéaire

$$\dot{y}(t) = Ly_t \tag{1.9}$$

et X_0 est la fonction matricielle définie sur $[-r,0]$ par

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta < 0 \\ Id \text{ si } \theta = 0. \end{cases}$$

La formule (1.8) soulève les difficultés suivantes:

(i) Pour $\varphi \in C$, l'application $t \longrightarrow T(t)\varphi$ n'est pas dérivable que si $t \geq R$.

(ii) Le semigroupe $T(t)$ est défini sur C. Donc le terme $T(t)X_0$ n'est pas défini parce que X_0 n'est pas une application continue. Il faut alors lui donner un sens.

(iii) On sait rien sur la régularité des applications

$$t \longrightarrow T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)X_0 R(\alpha,x_s)ds$$

$$\alpha \longrightarrow T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)X_0 R(\alpha,x_s)ds.$$

(iv) Si on dérive formellement la relation (1.8), on obtient

$$\frac{dx_t}{dt} = Ax_t + X_0 R(\alpha,x_t).$$

On a d'abord le problème: x_t n'appartient pas à $D(A)$ en général, où $D(A)$ est le domaine du générateur infinitésimal A du semigroupe $T(t)$. Ensuite, l'application définie sur C par

$$\varphi \longrightarrow X_0 R(\alpha,\varphi)$$

n'est pas à valeurs dans C.

(v) Si on intégre une fois de plus, on obtient

$$S(t)\varphi = U(t)\varphi + \int_0^t U(t-s) X_0 R(\alpha,x_s) ds$$

où $S(t)$ désigne le semigroupe intégré de l'équation (1.8) (voir Adimy [1]).

Sous cette forme, l'équation perd un peu de sa structure dynamique.

Pour dépasser tout ces problèmes une méthode d'approximation a été utilisée par H. Talibi [89] pour montrer le même résultat.

1.3.3 Apport du travail

Dans ce travail, pour résoudre tout ces problèmes nous avons utilisé la nouvelle formule de variation de la constante de J. Hale [46]. Notre méthode est basée sur les étapes suivantes :

(i) Réduction de l'équation à un système en dimension deux par le théorème de la variété centre (voir J. Hale [46]).

(ii) Estimation de la distance entre la solution de l'équation initiale et la solution périodique bifurquée de l'équation réduite.

Nous obtenons ainsi un domaine de stabilité de la branche bifurquée supercritique.

Un travail similair a été élaboré par Ouifki, Hbid et Arino [73] pour montrer la h-asymptotique stabilité de la branche bifurquée par la procédure de poincaré.

1.4 Introduction à l'hématopoïèse

Tout ce qui concerne les notions de l'hématopoïse, on fait référence à la thése de Pujo-Monjouet [78].

1.4.1 Le milieu intérieur

Toutes nos cellules ont besoin de dioxygène, de nutritions et rejettent des produits issus de leur métabolisme, par exemple des molécules informatives (hormones) ou des déchets (urée). Leur fonctionnement nécessite donc la présence d'un système d'échange et de transport de substances entre les organes qui sont souvent spécialisés et éloignés les uns des autres (poumons, reins, tube digestif, glandes endocrines.). Ce système est représenté par l'appareil cardio-vasculaire qui dispose de vaisseaux spécialisés (artères, veines, capillaires et vaisseaux lymphatiques) et d'une pompe propulsive: le cIJur. Il est capable de s'adapter aux besoins, qu'il s'agisse de distribuer une plus grande quantité de sang à des organes (muscles lors d'un effort physique) ou qu'il s'agisse de modifier la distribution du sang selon des secteurs ou des territoires privilégiés tels que cerveau, cIJur, etc.

1-Qu'appelle-t-on le milieu intérieur?: Les capillaires sanguins ont un diamètre d'environ 10 micromètres. Leur paroi, très mince, est constituée d'une seule couche de cellules aplaties comme les pièces d'un puzzle. Du plasma traverse cette paroi sous l'effet de la pression sanguine et en s'infiltrant entre les cellules de la paroi, des globules rouges peuvent également sortir des capillaires. Ainsi se forme la lymphe interstitielle, qui baigne toutes les cellules de l'organisme. Liquide clair et incolore, la lymphe a une composition voisine de celle du sang privé de globules rouges. Ce véritable milieu de vie de nos cellules est situé à l'intérieur du corps appelé milieu intérieur. Ce milieu se renouvelle sans cesse. Le sang n'est jamais en contact direct avec les cellules de nos organes car la lymphe interstitielle sert toujours d'intermédiaire. Le sang, la lymphe interstitielle et la lymphe endiguée forment le milieu intérieur.

2-Composition du sang : Le sang est composé d'une partie liquide, le plasma, et d'une partie solide, les globules rouges, les globules blancs et les plaquettes. Le plasma est essentiellement constitué d'eau dans laquelle peuvent se dissoudre de nombreuses substances: l'oxygène et le gaz carbonique, les sels, les sucres, des graisses, des protéines et d'autres substances nutritives issues de la digestion. Si l'on recueille du sang dans un vase, il prend rapidement l'aspect d'une gelée : le sang se coagule. Quelques heures après, on distingue :

- Au fond du vase, une masse sombre : le caillot.

- Au-dessus, un liquide jaunâtre, appelé sérum.

3-Son rôle : Le sang est essentiel à la vie des cellules et donc de notre corps. Chaque cellule, pour vivre, doit en permanence recevoir de l'oxygène et des substances nutritives et évacuer des déchets et du gaz carbonique. C'est le sang qui, en baignant en permanence les milliards de cellules du corps humain, assure ce rôle de transport des substances, comme les anticorps, qui permettent de détruire les microbes. Son rôle est complexe, il intervient dans :

- Le transport des gaz respiratoires, le dioxygène et le dioxyde de carbone (au repos, 300 litres de dioxygène circulent par jour chez un adulte).

- Le transport de nutriments (eau, sels minéraux et vitamines) : Transportés à l'état libre, c'est le cas du glucose, ou combinés à des protéines, comme la ferritine qui transporte le fer ou la sérumalbumine qui transporte les acides gras.

- Le transport de molécules informatives: les hormones sont sécrétées par des glandes endocrines et atteignent les cellules cibles à l'état combiné.

- Le transport des déchets produits par le métabolisme, comme l'urée.

- Le transport des globules blancs qui interviennent dans les mécanismes de défense de l'organisme.

- Le transport de chaleur : par exemple un changement dans la répartition du sang au niveau de la peau modifie les échanges thermiques entre le milieu extérieur et l'organisme. La rapidité du transport est grande puisque la totalité du sang passe dans le cIJur en 1 minute.

Remarque 1.4.1 *Le sang assure son rôle de transporteur en circulant, grâce au cIJur, dans un réseau clos dans lequel on distingue:*

- Un secteur artériel de distribution du cIJur vers la périphérie.

- Un secteur capillaire d'échanges avec les cellules par l'intermédiaire de la lymphe interstitielle.

- Un secteur veineux qui permet le retour du sang de la périphérie vers le cIJur.

1.4.2 plasma

1-Rôle du plasma : Un litre de plasma (liquide jaune légèrement translucide), contient 900g d'eau et 100g de substances dissoutes. Le plasma véhicule de nombreuses substances comme :

- Des molécules d'origine alimentaire (glucose, acides aminés, lipides, ions minéraux.).
- Des déchets du métabolisme (urée, acide urique.).
- Des molécules jouant un rôle fondamental dans la défense de l'organisme (certaines protéines).
- Des molécules messagères permettant la communication entre organes différents par voie sanguine (les hormones).

2-Composition du plasma : Le plasma sanguin est constitué d'environ 90 pour cent d'eau dans laquelle sont dissous un grand nombre de sels minéraux et de protéines, telles que le fibrinogène (protéine de la coagulation), les globulines et l'albumine. Le plasma contient également des ions tels que le sodium, le potassium, le magnésium, le chlore et le calcium. Des échanges d'ions se produisent continuellement entre le plasma, le liquide interstitiel et le cytoplasme cellulaire. Les ions de sels minéraux sont nécessaires au métabolisme en quantités très précises. Il est très important que soit maintenu, à un niveau constant, le taux d'ions de plasma, ainsi que du liquide interstitiel et du cytoplasme qui sont en relation avec lui.

Remarque 1.4.2 *C'est le rein qui se charge de la régulation de cet équilibre ionique en éliminant, selon les besoins de l'organisme, plus ou moins d'électrolytes dans l'urine. Chez un sujet à jeune et en bonne santé, la teneur en glucose du plasma sanguin, ou glycémie, est comprise entre 0,8 et 1 g/L. Au cours de la journée, cette valeur est susceptible de varier faiblement :*

- Elle s'élève après un repas, mais l'hyperglycémie constatée est modérée et ne dure pas.

- Elle tend à s'abaisser en période de jeûne ou à la suite d'une activité musculaire prolongée, mais cette baisse reste normalement très discrète. Le sujet assure donc un contrôle efficace de ce paramètre sanguin dont la valeur oscille autour d'une valeur

moyenne de référence: on parle d'un équilibre dynamique. Les mécanismes assurant ce contrôle présentent parfois des défaillances. La glycémie subit alors des variations anormales qui peuvent être de deux types :

- Une baisse excessive, ou hypoglycémie, qui entraîne rapidement des troubles neurologiques (à la limite, coma mortel).

- Une hyperglycémie chronique qui caractérise le diabète sucré.

1.4.3 Constisuants du sang

1-Les globules rouges : Parmi les cellules sanguines adultes, les globules rouges, ou érythrocytes, ou encore hématies, sont de loin les plus nombreux (environ 5 millions par mm3 de sang). Ils se présentent sous la forme de petits disques biconcaves d'un diamètre d'environ 7 micromètres. Avant de quitter la moelle osseuse et de passer dans le sang, les globules rouges perdent leur noyau, au moment de la dernière division cellulaire. Ce sont les seules cellules de l'organisme à ne pas comporter de noyau. De ce fait, ils peuvent se diviser, et ils n'ont qu'un métabolisme limité. Les hématies doivent leur coloration à un pigment, l'hémoglobine. L'hémoglobine est riche en fer et a la propriété de fixer rapidement de grandes quantités d'oxygène. Après s'être chargés d'oxygène dans les poumons, les globules rouges sont transportés par le flux sanguin dans les parties du corps. Une fois parvenus dans les vaisseaux capillaires des tissus, ils libèrent leur oxygène. Le sang est ainsi désoxygéné; et capte, dans les tissus, le gaz carbonique, qui est principalement véhiculé par le plasma. Au bout de 120 jours, le globule rouge sera épuisé de son stock d'énergie, il va commencer à se fragiliser au niveau de la membrane cytoplasmique et sera détruit soit au niveau de la rate, soit au niveau du foie. Les principaux constituants de l'hématie (protéines et fer) sont alors récupérés et peuvent servir à la fabrication de nouveaux globules. Le sang assure le transport de l'oxygène depuis nos poumons jusqu'à nos organes, grâce à l'hémoglobine contenue dans les globules rouges: ceux-ci sont des transporteurs d'oxygène.

2-Les globules blancs : Le nombre de globules blancs (ou leucocytes) dans le sang est normalement de 5000 à 8000 par mm3. Leur diamètre varie entre 7 et 30 micromètres. Les globules blancs viennent de la moelle osseuse, une cellule souche se divisera pour donner les différents leucocytes. Il existe trois types de globules blancs :

1- Les lymphocytes (6 à 8 micromètres) : Ce sont des cellules à gros noyau sphérique et très colorable, sans granulations cytoplasmiques. Il existe de nombreux types de lymphocytes. Ce sont les agents de la défense immunitaire spécifique.

2- Les monocytes (15 micromètres) : Ce sont des cellules à noyau clair et à cytoplasme contenant de nombreuses granulations très petites. En dehors de la circulation sanguine, ces cellules portent le nom de macrophages et jouent un rôle important dans la réponse immunitaire.

3- Les granulocytes (12 à 14 micromètres) : Ce sont des cellules à noyau lobé et à cytoplasme contenant de nombreuses granulations. Capables de phagocyter des microbes, les granulocytes participent à la défense immunitaire non spécifique.

Les propriétés essentielles des globules blancs sont les suivantes :

- Ce sont des cellules mobiles qui se déplacent, en rampant, par déformation du cytoplasme.
- Ils peuvent traverser par effraction la paroi des capillaires et émigrer dans les tissus voisins : c'est ainsi que les globules blancs du sang passent dans les vaisseaux lymphatiques.
- Ils peuvent happer et englober d'autres cellules ou des microbes et les digérer : c'est la phagocytose. Dans l'organisme, le rôle de la majorité des globules blancs est double:
- ils phagocytent les vieilles cellules et les microbes.
- Ils sécrètent des substances capables de neutraliser les poisons produits par les microbes. Ainsi ils assurent le nettoyage et la défense de l'organisme.

3-Les plaquettes : Les plaquettes sanguines (ou thrombocytes) sont des particules cytoplasmiques sans noyau comme les globules rouges. Elles sont plus petites que ces derniers et mesurent de 2 à 4 micromètres. Mais contrairement aux globules rouges, elles contiennent des mitochondries, c'est à dire qu'elles sont capables de respirer et de produire une grande quantité d'énergie. Elles contiennent de nombreux enzymes. Leur durée de vie est d'environ 10 jours. Chaque jour, les plaquettes détruites par le vieillissement sont remplacées par la production médullaire. Leur durée de vie est écourtée si les plaquettes sont utilisées car elles sont détruites lors de leur fonction. Cette fonction est un des dispositifs utiles pour l'organisme pour empêcher les hémorragies lors des effractions vasculaires, qu'il s'agisse de celles physiologiques provoquées par les tiraillements tissulaires lors des mouvements, ou de celles pathologiques liées à des traumatismes.

1.4.4 Conclusion

Le sang est composé de plasma dans lequel on trouve les hématies, les leucocytes, et les plaquettes. Le sang assure un rôle transporteur. Il transporte les gaz de la respiration (dioxygène et gaz carbonique), les produits de la digestion (glucose, graisses, acides aminés), et divers biocatalyseurs d'origine externe (vitamines) ou d'origine interne (enzymes, hormones, etc.). Les principales propriétés physiques du sang portent sur la coagulation et sur la viscosité.Toutes les cellules sanguines ont des points communs. D'abord, elles ont toutes une existence limitée et sont produites de façon continue pendant leur vie. Mais le plus important est qu'elles sont toutes issues d'un même type de cellule (cellule souche) comme présente dans la moelle osseuse.

Hématopoïèse : est un phénomène très actif qui assure chez un adulte sain la production quotidienne de plusieurs centaines de milliards de cellules. Elle se déroule dans la moelle osseuse.

Moelle osseuse : substance molle et grasse contenue à l'intérieur des os et constituée principalement de cellules conjonctives. Lieu de formation des cellules sanguines, elle renferme en outre les cellules souches de l'hématopoïèse ainsi que toutes les autres cellules sanguine.

1.4.5 Les cellules souches : les racines du sang.

Il est connu q'une cellule souche est capable d'engendrer un nombre arbitrairement grand de descendants, parmi lesquels des cellules souches filles remplissent la même fonction, ou des cellules différenciées. Le processus d'évolution et de différentiation des cellules sanguines est le suivant: les cellules souches donnent d'abord naissance à des cellules précurseurs déterminées qui caractérisent un seul ou plusieurs types de cellules sanguines. Les cellules précurseurs se divisent rapidement mais en un nombre limité de fois. A la fin de cette série de divisions amplificatrices, elles se transforment en des cellules totalement différenciées qui généralement ne se divisent plus et meurent après quelques jours. Il est important de noter qu'une fois que la cellule est différenciée, autrement dit quand la cellule n'est plus une cellule souche, il est impossible de revenir en arrière: l'état de différenciation n'est pas réversible (c'est ce mécanisme par lequel les cellules se spécialisent progressivement au cours du développement embryonnaire pour donner naissance aux différents tissus de l'organisme. Les cellules du foie, de l'intestin, des muscles sont des cellules différenciées. Elles possèdent toutes le même patrimoine génétique mais n'expriment pas les mêmes gènes). Donc une fois qu'une cellule souche donne naissance à une cellule précurseur, celle-ci s'engage irréversiblement vers la voie qui lui est assignée.

Les cellules souches contrairement aux cellules différenciées sont pour l'instant, à notre connaissance, impossible à identifier de façon directe.

Après sa naissance, la cellule dans sa vie passe par plusieurs phases jusqu'a ce qu'elle devienne mère et se divise en deux cellules filles ou meurt avant sa division. Et ce processus ce répéte de génération en génération. Cette série d'événement est applée cycle cellulaire.

1.4.6 Cycle cellulaire

Le cycle cellulaire se décompose en quatre étapes, notées $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{G_2}$ et $\mathbf{M}$.

i)-$\mathbf{G_1}$ c'est le début de cycle cellulaire, elle s'appelle étape pré-synthétique. La lettre $\mathbf{G}$ est l'initiale du mot anglais "gap", i-e. le nom donné à une partie non distincte du cycle.

ii)-$\mathbf{S}$ c'est une étape active de production, la synthèse de l'ADN.

ii)-Après la cellule entre dans l'étape $\mathbf{G_2}$ qui correspond à la phase après la synthèse de DNA.

iii)-Enfin le cycle se termine par la phase **M** qui est une étape de division qui donne lieu à deux cellules filles.

L'ensemble de ces quatre étapes est appelé phase de prolifération.

Juste après la division, les deux cellules entre dans une étape, notée $\mathbf{G_0}$, appelé phase de repos.

Dans les conditions normales, toutes les cellules doivent rejoindre la phase de repos après la division. Par contre, les cellules de la phase de repos peuvent y séjourner pour le reste de leur vie. Seul un certain nombre de cellules rejoint la phase initiale $\mathbf{G_1}$. Ce nombre varie suivant l'environnemnt de la cellule ou du système auquel elle appartient. Dans le cas du système sanguin, par exemple, si une carence importante de sang, due par exemple à une hémoragie ou à une autre raison, se fait resentir, les cellules rénales (pour les globules rouges) réagissent en envoyant des hormones (substance produite dans un organe et transportée par la circulation sanguine vers un autre organe ou un tissu dont elle excite ou inhibe le fonctionnement) à la moelle osseuse. La production des cellules est alors amplifiée et un très grand nombre de cellules de repos sont libérées pour combler le déficit. La phase de repos devient alors de très courte durée, et dans les cas les plus graves, certaines cellules n'y entrent plus. Elles ne font que proliférées.

1.4.7 Les différentes façons de mourir

La mort d'une cellule peut prendre deux formes: l'apoptose ou la nécrose.

i)- L'apoptose apparaît sous des conditions physiologiques normales et la cellule participe elle même à sa mort: c'est à dire une sorte de suicide. Ce suicide peut se produire à n'importe quelle phase de la cellule.

ii)-L'autre forme de mort cellulaire est la nécrose. Elle appraît lorsque la cellule est exposée à des variations extrêmes provenant des conditions physiologiques telles que l'hypothermie ou l'hypoxie (diminution d'oxygène dans les tissus), et contrairement à l'apoptose, elle entraîne une réponse inflammatoire.

1.4.8 Les leucémies

Les leucémies sont définies comme des cancers des cellules sanguines en formation qui génèrent des maladies différentes selon le type de lignée cellulaire affectée.
D'un point de vue clinique, ces pathologies se caractérisent par un taux de globules blancs (ou leucocytes) excessif dans le sang dû à une prolifération anarchique de ces cellules à différents stades de leur formation dans la moelle osseuse. Ce phénomène conduit dans la plupart des cas à la présence de cellules plus ou moins atypiques dans le sang.
On parle de leucémie lymphoïde lorsque ce sont les cellules de la lignée lymphoïde qui sont atteintes, et de leucémie myéloïde lorsque ce sont les globules blancs de la lignée myéloïde. La cancérisation de l'une de ces lignées génère la formation d'un clone de leucocytes immatures (leucémie aiguë) ou matures (leucémie chronique), qui finissent par inhiber la croissance d'autres lignées cellulaires.
Quelques facteurs d'environnement favorisent la survenue de leucémies, comme une exposition prolongée ou répétée aux radiations ionisantes, après un traitement aux rayons par exemple, ou à certains composés chimiques comme le benzène ou quelques médicaments mutagènes utilisés dans certaines chimiothérapies.

1.5 Présentation de l'application

Dans le reste de ce travail, nous donnons une application de la théorie de la bifurcation de Hopf dans un modèle de la dynamique de population cellulaire sanguine (hématopoïèse) gouverné par un système d'équations différentielles à retard.

1.5.1 Historique sur la dynamique de population

On distingue entre deux types de modèles, l'un est dit **non-structuré**, et l'autre **structuré**. On dit qu'un modèle est **non-structuré** lorsque le modèle est présenté par un système d'équations différentielles ordinaires ou à retard, caractérisant soit la population totale, soit une sous population de la population totale.

On dit qu'un modèle est **structuré** lorsque chaque cellule se distingue par son âge, sa taille, sa maturité, où d'autres propriétés physiques. Ce dérnier est donné soit par un système d'équations aux dérivées partielles, soit par un système d'équations aux dérivées partielles à retard.

Les premiers papiers traitant la dynamique de population cellulaire sont dûs à Bell et Anderson en (1967)[14], Fredrickson et al [34], Sinko et al [85], et Painter [74]. Dans les années soixante dix Miyata et al [70] montrent que certains modèles théoriques structurés en taille correspondent bien aux données biologiques exprimentales. Les travaux effectués par les chercheurs pendant cette période restent concentrés sur des modèles non-linéaires (Gurtain et MacCamy en 1974[36] et Mackey (1978) [63]....).

Ces dérnières années ont donné naissance à un grand nombre de travaux dans cette direction, dont on cite : Gyllenberg (1982)[37], Kimmel et al (1984)[58], Heijmans [52], [53], Lasota et Mackey (1984)[60], Gyllenberg et Heijmans (1987)[38], Webb et Grabosh (1987)[101], Gyllenberg et Webb (1987)[39], (1989)[40], (1990)[41], (1991)[42], Arino et Kimmel (1987)[8], (1989)[9], (1991)[10], (1993)[11],... .

1.5.2 Un modèle de population cellulaire non-structuré

Dans [39], Gyllenberg et Webb ont introduit un modèle de dynamique de population, pour expliquer l'intéraction entre les cellules proliférantes et les cellules quiescentes dans une tumeure. Les cellules proliférantes sont capables de se diviser et croitre, mais les quiescentes peuvent croitre sans se diviser.

Le modèle non-structuré s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \dot{P} = (b - r_P(N))P + r_Q(N)Q \\ \dot{Q} = r_P(N)P - (r_Q(N) + \mu_Q)Q \end{cases} \tag{1.10}$$

$N(t) = P(t) + Q(t)$, $t \geq 0$, $P(0) = P_0 > 0$, $Q(0) = Q_0 \geq 0$.

$P(t)$ (resp. $Q(t)$) est le nombre de cellules proliférantes (resp. quiescentes) à l'instant t et $N(t)$ est le nombre total des cellules (ou la taille de la tumeure) à l'instant t.

$b = \beta - \mu_P$, β est le taux de naissance (ou de division) et μ_P (resp: μ_Q) est le taux de mortalité des cellules proliférantes (resp. quiescentes).
$r_P(N)$ (resp. $r_Q(N)$) est le taux de transition des cellules proliférantes (resp. quiescentes) vers les cellules quiescentes (resp. proliférantes).
β, μ_P, μ_Q sont des constantes positives, r_P (resp. r_Q) est une fonction continue croissante (resp. décroissante) et $0 \leq r_P(N) \leq 2$, pour tout N.

1.5.3 Un modèle de population cellulaire structuré en taille avec phase de repos

Quelques auteurs dont Gyllenberg et Webb en (1990)[41], (1991)[42] ont étudié des modèles de dynamique de population structuré en taille avec une phase de prolifération et une phase de repos.
Soit $0 < x_0 < x_1 < 2x_0$ et soit $X = L^1(\frac{x_0}{2},x_1)$, on considère lo modèle suivant:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}(\gamma(x)p(t,x)) & = & -(\beta(x)+\mu(x))p(t,x) + 4\beta(2x)p(t,2x) \\
 & & -\sigma(x)p(t,x) + \tau(x)n(t,x), \qquad x \in (\frac{x_0}{2},x_1) \\
\frac{\partial}{\partial t}n(t,x) & = & -(\nu(x)+\tau(x))n(t,x) + \sigma(x)p(t,x), \qquad x \in (\frac{x_0}{2},\frac{x_1}{2}) \\
p(t,\frac{x_0}{2}) & = & 0 \text{ pour } t \geq 0, \\
p(0,x) & = & \phi(x), \text{ pour } \phi \in X, x \in (\frac{x_0}{2},x_1) \\
n(0,x) & = & \psi(x), \text{ pour } \psi \in X, x \in (\frac{x_0}{2},\frac{x_1}{2})
\end{array}$$

-$p(t,x)$ et $n(t,x)$ sont respectivement les densités des cellules proliférantes et quiescentes de taille x à l'instant t.
-La fonction γ représente le taux de croissance.
-La fonction β représente le taux de division.
-La fonction μ représente le taux de mortalité des cellules proliférantes.
-La fonction ν représente le taux de mortalite des cellules au repos.
-Le flux cellulaire entre les phases de repos et de prolifération se fait avec des taux dépendant de la taille σ et τ. Les cellules au repos (ou quiescentes) ne grandissent pas

et ne se divisent pas.

1.5.4 Un modèle de population cellulaire structuré en âge avec phase de repos

Gyllenberg et Webb en (1987)[39] ont étudié le modèle de dynamique de population cellulaire structuré en âge avec une phase de repos.
Le système est donné comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}(\gamma(a)p(t,a)) &= -(\beta(a) - \sigma(a))p(t,a) + \tau(a)n(t,a), \\
\frac{\partial}{\partial t}n(t,a) &= \sigma(a)p(t,a) - \tau(a)n(t,a), \\
p(t,0) &= 2\int_0^{a_1} \beta(a)p(t,a)da, \text{ pour } t \geq 0, \\
n(t,0) &= 0, \text{ pour } t \geq 0 \\
p(0,a) &= \phi(a), \text{ pour } \phi \in X, a \in (0,a_1) \\
n(0,a) &= \psi(a), \text{ pour } \psi \in X, a \in (0,a_1)
\end{aligned}$$

où $X = L^1(0,a_1)$, $p(t,a)$ et $n(t,a)$ sont les densités des cellules respectivement proliférantes et au repos d'âge a à l'instant t, $0 \leq a \leq a_1$ où a_1 est l'âge maximal de la division des cellules. Dans ce modèle, le flux cellulaire entre les deux phases peut se faire à n'importe quel âge. On suppose ici que la division est la seule perte des cellules. De plus toutes les cellules filles naissent dans la phase de prolifération.

1.5.5 Présentation du modèle

Le modèle que nous considérons dans ce travail est non-structuré avec deux phases distinctes du cycle cellulaire: une phase de repos et une phase de prolifération. Ce modèle traîte la dynamique de population cellulaire sanguine. A notre connaissance, ce modèle est dû à Mackey (1978) [63] (1979) [64], et il a été reprit par Mackey et Milton (1990) [65], Mackey (2001) [6] [62] et Fowler et Mackey (2002) [33].
Comme présenté dans le cycle cellulaire, après qu'une cellule entre dans la phase de prolifération, la cellule ne se divise qu'après un temps τ, le temps τ est composé de

quatre phases: G_1 est la phase pré-synthétique, S phase synthétique de DNA , G_2 phase post-synthétique et M la phase de division. Après la division, chaque cellule entre dans la phase de repos G_0. Dans cette phase la cellule peut retourner pour proliférer et continue son cycle cellulaire ou mourir avant de terminer son cycle . Le modèle est gouverné par le système d'équations différentielles à retard suivant Mackey (2001) [6] [62] :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N + 2e^{-\gamma\tau}\beta(N_\tau)N_\tau \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P + \beta(N)N - e^{-\gamma\tau}\beta(N_\tau)N_\tau \end{cases} \tag{1.11}$$

où β est une fonction décroisante vérifiant:

$$\lim_{x\to+\infty} \beta(x) = 0.$$

Cette hypothèse correspond à la situation biologique raisonnable dans laquelle le taux d'entrée dans la phase de prolifération est une fonction décroissante par rapport au nombre total de cellules dans la phase de repos (non-proliférantes).
N est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de repos, $N_\tau = N(t-\tau)$, P est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de prolifération, γ le taux de mortalité des cellules proliférantes, δ le taux de mortalité des cellules non-proliférantes.

1.5.6 Apport du travail et résultat

Dans ce travail, on se propose d'étudier le problème de la bifurcation de Hopf pour le modèle (1.11) en considérant le retard comme paramètre de bifurcation.
Ce modèle, possède la position d'équilibre triviale qui est instable et une famille de positions d'équilibre non triviale dont la stabilité dépend du retard.
Nous montrons l'existence d'une valeur critique τ_0 du retard τ autour de laquelle nous obtenons un changement de stabilité de cette famille de positions d'équilibre en fonction du retard τ.
Comme les positions d'équilibre non triviales dépendent du paramètre retard de la

bifurcation, l'étude du problème de la bifurcation de Hopf devient compliquer.
Pour contourner la difficulté envisager nous proposons un modèle approché du modèle (1.11) dans le sens suivant: pour $\tau \sim \tau_0$ on a $e^{-\gamma\tau} = e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}e^{-\gamma\tau_0} \simeq e^{-\gamma\tau_0}$.
Le modèle approché du modèle (1.11) est donné comme suit:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N + 2e^{-\gamma\tau_0}\beta(N_\tau)N_\tau \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P + \beta(N)N - e^{-\gamma\tau_0}\beta(N_\tau)N_\tau \end{cases} \tag{1.12}$$

Notons que le modèle (1.12) coincide avec le modèle (1.11) pour $\tau = \tau_0$, de plus ce modèle possède le point critique trivial (0,0) et un autre point critique non trivial ne dépendant pas du retard τ.
Par une étude analogue à celle que nous avons fait sur le modèle de Mackey (1.11), nous obtenons en particulier l'existence d'une branche de solutions périodiques bifurquées à partir du point d'équilibre non trivial. Enfin nous donnons un algorithme explicite de calcul des éléments de la bifurcation.

1.6 Présentation de l'organisation du travail

Chapitre 2 est un rappel de quelques définitions et résultats nécessaires pour l'élaboration de ce travail.
Chapitre 3 on se situe sous les hypothèses du théorème de la bifurcation de Hopf supercritique, nous avons montré la stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique.
Chapitre 4 nous traitons un modèle en dynamique de population cellulaire sanguine (heamatopoiese), nous étudion un modèle dû à mackey avec un seul retard, en particulier nous étudions le problème de bifurcation de Hopf pour un modèle approché en fonction du paramèter retard, nous donnons un algorithme explicite pour le calcul des éléments de la bifurcation.

Chapitre 2

Quelques résultats sur les équations à retard

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les équations à retard, nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Pour plus de détails nous référons aux livres de Hale (1977)[44] et (1993) [46]. Ce chapitre contient aussi un résultat sur la stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique dans le cas des équations différentielles ordinaires et à retard voir [90].

2.2 Théorème d'existence et d'unicité de solutions

Soit l'équation différentielle à retard:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x_t), \tag{2.1}$$

où $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction donnée, $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ est l'espace des applications continues de l'intervalle $[-r,0]$ vers $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $r > 0$, et $x_t \in C$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$.

L'espace C muni de la topologie de la convergence uniforme:

$$\| \varphi \| = \sup_{\theta \in [-r,0]} \| \varphi(\theta) \|_{\mathbb{R}^n} ,$$

est un espace de Banach.

Définition 2.2.1 *[46] Soit φ un élément de C. Une fonction x est dite solution de l'équation (2.1) à donnée initiale φ en $t = 0$, s'il existe $\alpha > 0$ tel que*
i) x est définie continue sur $[-r,\alpha[$.
ii) $x_0 = \varphi$.
iii) x est dérivable pour $t \in [0,\alpha[$ et vérifie l'équation (2.1) pour $t \in [0,\alpha[$.

Théorème 2.2.1 *[46] Supposons la fonction f continue. Alors pour tout $\varphi \in C$, l'équation (2.1) admet au moins une solution. De plus, si la fonction f est localement lipschitzienne$_{/x_t}$, alors la solution est unique.*

Le théorème ci-dessus assure l'existence locale des solutions de l'équation (2.1). Pour l'existence des solutions pour tout $t \geq 0$, nous énnonçons le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 *[44] Si f est lipschitzienne par rapport à φ, alors pour toute donnée initiale $\varphi \in C$, l'équation (2.1) possède une et une seule solution x définie sur l'intervalle $[-r,+\infty)$. En outre si f est de classe C^k alors x est de classe C^{k+1} sur l'intervalle $[kr,+\infty)$.*

Définition 2.2.2 *l'équation (2.1) est dite:*
1) Linéaire si

$$f(t,\varphi) = L(t,\varphi) + h(t),$$

où $L(t,\varphi)$ est linéaire par rapport à φ.
2) Linéaire homogène si elle est linéaire et $h = 0$.
3) linéaire non-homogène si elle est linéaire et $h \neq 0$.
4) Autonome si $f(t,\varphi) = g(\varphi)$, où g ne dépend pas explicitement de t.

Dans toute la suite, nous nous intéressons uniquement aux équations autonomes à donnée initiale dans C,

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x_t), \qquad t > 0 \\ \qquad x_0 = \varphi \in C \end{cases} \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1 *[59] On suppose que f est continue sur C à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et vérifie:*

$$|f(\varphi)| \leq g(\| \varphi \|),$$

pour tout $\varphi \in C$, où $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et croissante.
Si toute solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t)), \forall t > 0 \\ \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

est définie pour tout $t > 0$, alors toute solution du problème de Cauchy (2.2) est définie sur l'intervalle $[-r, +\infty)$.

Corollaire 2.2.1 *Si f est une fonction localement lipschitzienne, vérifiant*

$$|f(\varphi)| \leq c_1 \| \varphi \| + c_2, \qquad c_1, c_2 \geq 0.$$

Alors , pour toute donnée initiale φ dans C, le problème de Cauchy (2.2) associé admet une solution unique, définie sur l'intervalle $[-r, +\infty)$.

En particulier toute équation différentielle à retard linéaire autonôme continue possède une solution et une seule définie sur $[-r, +\infty[$.

2.3 Semi-groupe associé

Définition 2.3.1 *Soit X un espace de Banach, et $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés, définis de X à valeurs dans lui même. La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires fortement continus, ou C_0-semi-groupe, si les propriétés suivantes sont satisfaites:*
i) $T(0) = I$, (I est l'opérateur identité),

ii) $T(t_1+t_2)=T(t_1)T(t_2)$, $t_1,t_2\geq 0$,

iii)

$$\lim_{t\to 0}\|T(t)\phi-\phi\|=0, \qquad \phi\in X.$$

Pour chaque C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, on associe l'opérateur

$$A: D(A)\longrightarrow X$$

défini par:

$$A\phi=\lim_{t\to 0}\frac{T(t)\phi-\phi}{t}, \qquad \phi\in D(A).$$

où

$$D(A)=\{\varphi\in C:\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}\text{ existe dans }C\}$$

est le domaine de l'opérateur A.

A est appelé: Générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Théorème 2.3.1 *[75] Si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe, alors:*

i) pour chaque $\phi\in X$, $t\longrightarrow T(t)\phi$ est continu sur $\mathbb{R}^+$,

ii) le domaine du générateur A est dense dans X: $\overline{D(A)}=X$,

iii) pour chaque $\phi\in D(A)$, $t\longrightarrow T(t)\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d}{dt}T(t)\phi=T(t)A\phi=AT(t)\phi.$$

Pour plus de détail sur la théorie des semi-groupes voir par exemple Nagel [71] ou Pazy [75].

D'après les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, si L est un opérateur linéaire borné de C dans $\mathbb{R}^n$, alors pour toute donnée initiale $\phi\in C$, l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt}=Lx_t, \qquad t>0 \tag{2.3}$$

possède une et une seule solution $x(.,\phi)$ vérifiant:

$$x_t(\phi)(\theta)=\begin{cases} x(t+\theta),\text{ si } t+\theta\geq 0\\ \phi(t+\theta),\text{ sinon}\end{cases}$$

Soit $T(t) : C \longrightarrow C$ l'opérateur solution de l'équation (2.3) défini par

$$T(t)\phi = x_t(\phi), \qquad t \geq 0, \tag{2.4}$$

Proposition 2.3.1 *[46] l'opérateur solution $T(t)$, $t \geq 0$, défini par le relation (2.4), est un C_0-semi-groupe, de générateur infinitésimal donné par:*

$$D(A) = \{\phi \in C : \frac{d\phi}{d\theta} \in C \ \textit{et} \ \frac{d\phi}{d\theta}(0) = L\phi\},$$

avec

$$A\phi = \frac{d\phi}{d\theta}.$$

De plus, $T(t)$ est complétement continu pour $t \geq r$; c'est à dire que $T(t)$, $t \geq r$, est continu et que l'image de tout borné est relativement compact.

2.4 Décomposition spectrale de l'espace de phases

Définition 2.4.1 *Soit $B : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire, où X est un espace de Banach.*
L'ensemble résolvant de B noté $\rho(B)$ est l'esemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'opérateur $\lambda I - B$ (I étant l'opérateur identité), a un inverse borné de domaine dense dans X, et on écrit:

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)^{-1} \textit{existe et } \overline{D(\lambda I - B)} = X\}.$$

Le complémentaire de $\rho(B)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de B et est noté $\sigma(B)$, et on écrit:

$$\sigma(B) = \mathbb{C} \smallsetminus \rho(B).$$

Notons que le spectre $\sigma(B)$ d'un opérateur linéaire B est constitué de trois parties disjointes:
Le spectre ponctuel:

$$P\sigma(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : (\lambda I - B)^{-1} \ \textit{n'existe pas}\},$$

ou ensemble des valeurs propres de B.

Le spectre continu:

$$C\sigma(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : (\lambda I - B)^{-1} \textit{ existe , non borné et } \overline{D((\lambda I - B)^{-1})} = X\},$$

Le spectre résiduel:

$$R\sigma(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : (\lambda I - B)^{-1} \textit{ existe et } \overline{D((\lambda I - B)^{-1})} \neq X\}.$$

Lemme 2.4.1 *[46] Soit* A *l'opérateur défini par (2.4), alors:*
i) $\sigma(A) = P\sigma(A)$,
ii) λ *est dans* $\sigma(A)$ *si et seulement s'il satisfait l'équation caractéristique*

$$\det \Delta(\lambda) = 0 \tag{2.5}$$

associé à (2.3); $\Delta(\lambda)$ *est la matrice définie par:*

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - Le^{\lambda}.$$

iii) le sous espace propre généralisé noté $M_\lambda(A) := \cup_{k\geq 0} Ker(A - \lambda I)^k$ *associé à chaque* $\lambda \in \sigma(A)$ *a pour dimension la multiplicité de* λ *en tant que racine de l'équation (2.5).*
iv) si λ *est un élément de* $\sigma(A)$, *alors il existe un entier naturel* k *tel que le sous espace propre généralisé associé à* λ, *est donné par:*

$$M_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I)^k.$$

De plus, on a la décomposition suivante:

$$C = Ker(A - \lambda I)^k \oplus Im(A - \lambda I)^k$$

v) le sous espace $M_\lambda(A)$ *est invariant par* A, *et par conséquent par* $(T(t))_{t\geq 0}$.

Du lemme 2.4.1, on déduit que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $M_\lambda(A)$ est de dimension finie. Soient d la dimension de $M_\lambda(A)$, $\{\phi_1^\lambda,...,\phi_d^\lambda\}$ une base de $M_\lambda(A)$ et $\Phi_\lambda = \{\phi_1^\lambda,...,\phi_d^\lambda\}$. Puisque $AM_\lambda(A) \subseteq M_\lambda(A)$, il existe une matrice carrée constante B_λ d'ordre d telle que

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda.$$

De plus, on a le résultat suivant:

Proposition 2.4.1 *[46]*
i) pour tout $\theta \in [-r,0]$,

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}$$

ii) la restriction du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ *au sous espace propre* $M_\lambda(A)$ *est donné par:*

$$T(t)\Phi_\lambda a = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}a$$

avec, $t \geq 0$ *et* $a \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 2.4.1 *La relation ii) permet de définir* $T(t)$ *sur* $M_\lambda(A)$ *pour tout* $t \in (-\infty, +\infty)$. *De plus, si* λ *est la valeur caractéristique de (2.3) de plus grande partie réelle, l'équation à retard (2.3) a les mêmes comportements asymptotiques que l'équation différentielle ordinaire suivante:*

$$\frac{d}{dt}y(t) = B_\lambda y(t) \tag{2.6}$$

Théorème 2.4.1 *[46] Soient* $\Lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ *un ensemble fini de valeurs caractéristiques de l'équation (2.3),*

$$\Phi_\Lambda = \{\Phi_{\lambda_1},...,\Phi_{\lambda_p}\}$$

et

$$B_\Lambda = diag(B_{\lambda_1},...,B_{\lambda_1}\},$$

où Φ_{λ_j}, $j = 1,...,p$ *est une base du sous espace propre généralisé associé à* λ_j, $j = 1,...,p$, *et* B_{λ_j} *est la matrice définie par*

$$A\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j}B_{\lambda_j}, \qquad j = 1,...,p.$$

Alors, l'unique valeur propre de B_{λ_j} *est* λ_j, *et pour tout vecteur* a *ayant la même dimension que l'ordre de la matrice* Φ_Λ, *la solution* $T(t)\Phi_\Lambda a$, *de condition initiale* $\Phi_\Lambda a$ *en* $t = 0$, *est définie sur* $(-\infty, +\infty)$ *par la relation*

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t}a, \qquad t \neq 0$$

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda \theta}, \qquad -r \leq \theta \leq 0.$$

De plus, il existe un sous espace Q_Λ *de* C *invariant par le semi groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$*;*

$$T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$$

pour tout $t \geq 0$ *et vérifiant la décomposition*

$$C = Q_\Lambda \oplus P_\Lambda$$

où

$$P_\Lambda = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda a, \text{ où } a \text{ est un vecteur } \}$$

est l'espace engendré par la famille Φ_Λ*.*

Le théorème 2.4.1, donne une image très claire du comportement des solutions du système (2.3). En fait, sur les sous espaces généralisés, le système (2.3) se comporte comme une équation différentielle ordinaire en dimension finie. La décomposition précédente de C joue un rôle très important pour l'étude des systèmes qui sont perturbations de systèmes linéaires.

2.4.1 Décomposition de C par l'équation formelle adjointe

Soit $C^* = C([-r,0],\mathbb{R}^{n*})$, où $\mathbb{R}^{n*}$ est l'espace des vecteurs lignes de dimension n. Pour tout α dans C^*, on définit la forme bilinéaire suivante:

$$(\alpha,\phi) = \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi. \tag{2.7}$$

où $\eta(\theta)$ est une fonction matricielle d'ordre n, $\theta \in [-r,0]$, à variation bornée, normalisée, continue à gauche sur $(-r,0)$ et $\eta(0) = 0$, associé à l'opérateur L:

$$L\phi = \int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \qquad \phi \in C.$$

L est l'opérateur défini dans l'équation (2.3).

On définit l'opérateur A^* adjoint formel de A (relativement au produit (2.7) par:

$$(\alpha,A\phi) = (A^*\alpha,\phi), \text{ pour } \phi \in D(A) \text{ et } \alpha \in D(A^*).$$

Alors A^* est de domaine dense dans C^*,

$$D(A^*) = \{\alpha \in C^*, \frac{d}{ds}\alpha \in C^* \text{ et } \frac{d\alpha(0)}{ds} = -\int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)d\eta(\theta)\}$$

et

$$A^*\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds}, & 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)d\eta(\theta), & s = 0 \end{cases}$$

pour tout $\alpha \in D(A^*)$.

L'équation adjointe de l'équation (2.3) est donnée par:

$$\frac{d}{d\tau}y(\tau) = -\int_{-r}^{0} y(\tau - \theta)d\eta(\theta). \tag{2.8}$$

Si y est une solution de l'équation (2.8) sur l'intervalla $(-\infty,\sigma + r]$, alors, pour $\tau \in (-\infty,r]$, on désigne par y^τ l'élément de C^* défini par

$$y^\tau(\xi) = y(\tau + \xi), \qquad 0 \leq \xi \leq r.$$

Si x est une solution de l'équation (2.3) pour $\omega - r \leq t \leq \infty$ et y une solution de l'équation (2.8) sur $(-\infty,\sigma + r]$, $\sigma > \omega$. Alors

$$(y^t,x_t) = \text{constante}, \qquad \forall t \in [\omega,\sigma]. \tag{2.9}$$

En particulier, si y est définie sur $(-\infty, +\infty)$, alors l'identité (2.9) est définie pour tout $t \geq \omega$.

Si $y(\alpha)$ est une solution de l'équation (2.8) sur $(-\infty,r]$ de condition initiale α en 0, définissons

$$T^*(\tau)\alpha = y^\tau(\alpha), \qquad -\infty < \tau \leq 0.$$

Alors $T^*(\tau)$ a les mêmes propriétés que le semi-groupe $T(t)$ associé à l'équation (2.3) et on a:

$$\frac{d}{d\tau}T^*(\tau)\alpha = -A^*T^*(\tau)\alpha = -T^*(\tau)A^*\alpha.$$

pour tout $\alpha \in D(A^*)$.

Lemme 2.4.2 *[44] λ est un élément de $\sigma(A)$ si et seulement si λ est un élément de $\sigma(A^*)$. L'opérateur A^* a seulement un spectre ponctuel et pour tout λ dans $\sigma(A^*)$, le sous espace propre généralisé associé à λ est de dimension finie.*

Lemme 2.4.3 *[46] Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$(A - \lambda I)^k \phi = \psi, \qquad \psi \in C \tag{2.10}$$

ait une solution ϕ dans C, c'est à dire que $\psi \in Im(A^* - \lambda I)^k$, est que $(\alpha,\psi) = 0$ pour tout α dans $Ker(A^* - \lambda I)^k$.

Lemme 2.4.4 *[46] Soit $\lambda \in \sigma(A)$, soient $\Psi_\lambda = col(\psi_1,...,\psi_p)$ et $\Phi_\lambda = (\phi_1,...,\phi_p)$ des bases de $M_\lambda(A^*)$ et $M_\lambda(A)$ respectivement, et soit*

$$(\Psi_\lambda,\Phi_\lambda) = (\psi_i,\phi_j), \qquad i,j = 1,2,...,p.$$

Alors $(\Psi_\lambda,\Phi_\lambda)$ est non singulière et peut être choisie égale à la matrice identité.

Par le théorème 2.4.1, la décomposition de C est donée par:

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}, \qquad \phi \in C, \qquad \phi^{P_\lambda} \in P_\lambda, \qquad \phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda$$

où

$$P_\lambda = M_\lambda(A) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\lambda b, b \in \mathbb{R}^p\};$$

$$Q_\lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda,\phi) = 0\}$$

$$\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b, \qquad b = (\Psi_\lambda,\phi), \qquad \phi^{Q_\lambda} = \phi - \phi^{P_\lambda}.$$

Lemme 2.4.5 *[46]* $\dim M_\lambda(A) =$ *multiplicité de λ comme racine de* $\det \Delta(\lambda) = 0$.

Lemme 2.4.6 *[46] Si $\lambda \neq \mu$, alors pour tout ψ dans $M_\mu(A^*)$, ϕ dans $M_\lambda(A)$, on a :*

$$(\psi,\phi) = 0$$

Théorème 2.4.2 *[46] Soit $\Lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ un ensemble fini de $\sigma(A)$, on définit $\Psi_\Lambda = col\{\psi_{\lambda_1},...,\psi_{\lambda_p}\}$ comme étant une base du sous espace*

$$P_\Lambda^* = \oplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A^*)$$

et $\Phi_\Lambda = col\{\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_p}\}$ une base du sous espace

$$P_\Lambda = \oplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A).$$

L'espace C se décompose comme suit:

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda.$$

où $Q_\Lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\Lambda,\phi) = 0\}$ et $P_\Lambda = \{\Phi_\Lambda(\Psi_\Lambda,\phi),\phi \in C\}$
De plus, pour tout ϕ dans C, on a

$$\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda}$$

avec $\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda(\Psi_\Lambda,\phi)$.
Dans ce cas on dit que C se décompose par Λ.

2.4.2 Estimations sur le sous espace complémentaire

Soit $\Lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ un ensemble fini de valeurs propres de A. D'après le théorème 2.4.1, il existe une matrice $B = B_\Lambda$, dont les valeurs propres coincident avec Λ, telle que pour tout $\phi \in C$

$$T(t)\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda e^{Bt}a,$$

où $\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda a$ est la projection de ϕ sur le sous espace P_Λ et Φ_Λ la base de P_Λ.
Le théorème qui suit, donne des éstimations des solutions sur les sous-espaces P_Λ et Q_Λ.

Théorème 2.4.3 *[46] Pour tout réel β, soit*

$$\Lambda = \Lambda(\beta) = \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda > \beta\}.$$

On suppose que C se décompose par Λ sous la forme

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

alors il existe des constantes positives γ *et* $K = K(\gamma)$ *telles que:*

$$\| T(t)\phi^{P_\Lambda} \| \leq Ke^{(\beta-\gamma)t} \| \phi^{P_\Lambda} \| , \qquad t \leq 0 \tag{2.11}$$

$$\| T(t)\phi^{Q_\Lambda} \| \leq Ke^{(\beta-\gamma)t} \| \phi^{Q_\Lambda} \| , \qquad t \geq 0 \tag{2.12}$$

pour tout $\phi \in C$.

Corollaire 2.4.1 *Si toutes les racines de l'équation caractéristique (2.5) sont à parties réelles négatives, alors il existe des constantes positives* K *et* δ *telles que:*

$$\| T(t)\phi \| \leq Ke^{-\delta t} \| \phi \| , \qquad t \geq 0;$$

pour tout $\phi \in C$.

Exemple[46] : Considérons l'équation à retard scalaire:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) \tag{2.13}$$

L'espace de phase est $C = C([-1,0])$, l'opérateur L est défini par:

$$L\varphi = -\frac{\pi}{2}\varphi(-1),$$

pour tout $\varphi \in C$.

Le produit de dualité formel s'écrit

$$(\psi,\phi) = \psi(0)\phi(0) - \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{0}\psi(\tau+1)\phi(\tau)d\tau$$

pour $\phi \in C$ et $\psi \in C^*$.

Les opérateurs A et A^* sont donnés respectivement par:

$$\begin{cases} D(A) = \{\phi \in C : \frac{d\phi}{d\theta} \in C, \dot{\phi}(0) = -\frac{\pi}{2}\phi(-1)\} \\ A\phi = \frac{d\phi}{d\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(A^*) = \{\psi \in C^* : \frac{d\psi}{ds} \in C^*, \dot{\psi}(0) = \frac{\pi}{2}\psi(1)\} \\ A^*\psi = -\frac{d\psi}{ds} \end{cases}$$

De plus, ϕ est dans $Ker(A-\lambda I)$ si et seulement si $\phi(\theta)=e^{\lambda\theta}b$, $-r\leq\theta\leq 0$, où b est une constante et λ satisfait l'équation caractéristique,

$$\lambda+\frac{\pi}{2}e^{-\lambda}=0 \tag{2.14}$$

On a aussi, ψ appartient à $Ker(A^*-\lambda I)$ si et seulement si $\psi(\tau)=e^{-\lambda\tau}c$, $0\leq\tau\leq r$, où c est une constante et λ satisfait l'équation(2.14).

Soit $\lambda=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, λ une racine de l'équation (2.14) si et seulement si

$$\begin{cases}\alpha+\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\cos\beta=0\\ \beta-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\sin\beta=0\end{cases} \tag{2.15}$$

ce qui donne la relation

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{\pi^2}{4}e^{-2\alpha} \tag{2.16}$$

Si $\alpha>0$, alors $\cos\beta<0$ et $\beta\in]\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi[,k\in\mathbb{Z}$.

Donc $\alpha^2+\beta^2>\frac{\pi^2}{4}$, ce qui contredit (2.16).

Si $\alpha=0$, alors $\cos\beta=0$ ce qui implique $\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

D'après (2.15) on a $\beta=\frac{\pi}{2}\sin\beta=\mp\frac{\pi}{2}$

Donc, les seules racines imaginaires de (2.14) sont $\mp i\frac{\pi}{2}$, et toutes les autres racines sont à parties réelles strictement négatives.

Si $\Lambda=\{+i\frac{\pi}{2},-i\frac{\pi}{2}\}$, alors on a:

$$\phi_1(\theta)=\sin\frac{\pi}{2}\theta,\qquad \theta\in[-1,0]$$

$$\phi_2(\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\theta,\qquad \theta\in[-1,0]$$

$\Phi=\{\phi_1,\phi_2\}$ est une base du sous espace propre généralisé $P=P_\Lambda$ de l'équation (2.13) associé à Λ

$$\psi_1^*(s)=\sin\frac{\pi}{2}s,\qquad s\in[-1,0]$$
$$\psi_2^*(s)=\cos\frac{\pi}{2}s,\qquad s\in[-1,0].$$

$\Psi^*=\{\psi_1^*,\psi_2^*\}$ est une base du sous espace propre généralisé $P^*=P_\Lambda^*$ de l'équation adjointe associé à (2.13).

Comme $(\Psi^*,\Phi) = (\psi_i^*,\phi_j); i,j = 1,2$, est différente de la matrice identité, on peut choisir une nouvelle base Ψ de P^* de la façon suivante:

$$\Psi = (\Psi^*,\Phi)^{-1}\Psi^*$$

et alors $(\Psi,\Phi) = I$, la forme explicite de Ψ est:

$$\Psi = col(\psi_1,\psi_2),$$

où

$$\begin{cases} \psi_1 = 2\mu[\sin\frac{\pi}{2}s + \cos\frac{\pi}{2}s] \\ \psi_2 = 2\mu[-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}s + \cos\frac{\pi}{2}s] \end{cases}$$

et $\mu = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}$.

On décompose C par Λ, alors pour tout $\phi \in C$, ϕ s'écrit

$$\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda}, \qquad \phi^{P_\Lambda} = \Phi b, \qquad b = col(b_1,b_2) = (\Psi,\Phi)$$

$$\begin{cases} b_1 = \mu\gamma\phi(0) - \mu\pi\int_{-1}^0[\cos\frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}s]\phi(s)ds \\ b_2 = 2\mu\phi(0) + \mu\pi\int_{-1}^0[\sin\frac{\pi}{2}s + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}s]\phi(s)ds. \end{cases}$$

D'après le théorème 2.4.3, il existe des constantes positives K et γ telles que:

$$\| T(t)\phi^{Q_\Lambda} \| \leq Ke^{-\gamma t} \| \phi^{Q_\Lambda} \|, \qquad t \geq 0.$$

Par conséquent, le sous espace P de C est asymptotiquement stable.

Plus précisement, on a :

$$A\Phi = \Phi B,$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et $T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$.

Comme $\phi^Q = \phi - \phi^P$, $\phi^P = \Phi b$, $b = (\Psi,\Phi)$, on déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \| T(t)\phi - \Phi e^{Bt}b \| = 0$$

exponentiellement pour tout $\phi \in C$, c'est à dire que toute solution de l'équation (2.13) approche une fonction périodique en t donnée par

$$b_1\sin(\frac{\pi t}{2}) + b_2\cos(\frac{\pi t}{2}).$$

2.5 Formule de variation de la constante

Considérons l'équation différentielle à retard linéaire non homogène suivante:

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(t), \qquad \text{pour } t > 0 \tag{2.17}$$

où L est un opérateur linéaire borné de C à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ le semi groupe solution associé à l'équation linéaire (2.3) et A son générateur infinitésimal.

Définition 2.5.1 *On dit que $X(t)$ est une matrice fondamentale solution de l'équation (2.3), si $X(t)$ est une solution de l'équation (2.3) de condition initiale*

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, & \text{pour } \theta = 0 \\ 0, & \text{pour } -r \leq \theta < 0. \end{cases}$$

Théorème 2.5.1 *[46] Soit $x_t = x_t(.,\sigma,\phi,f)$ la solution de l'équation (2.17) issue de ϕ en $t = \sigma$. Alors, elle satisfait la formule de variation de la constante suivante:*

$$x_t = T(t-\sigma)\phi + \int_\sigma^t d[K(t,\alpha)]f(\alpha) \tag{2.18}$$

où $K(t,.) : [\sigma,t] \longrightarrow C$ est donnée par

$$K(t,s)(\theta) = \int_\sigma^s X(t+\theta-\alpha)d\alpha, t \geq \sigma$$

et X est la matrice fondamentale solution de l'équation (2.3).

2.5.1 Décomposition de la formule de variation de la constante

Avec les notations de la section précédente, on a les résultats suivants.

Lemme 2.5.1 *[46] Soient Φ, Ψ les bases respectives des sous espaces propres généralisés P_Λ et Q_Λ assosiés à Λ,*

$$\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda > \beta\}, \text{ pour un certain réel } \beta$$

telles que $(\Psi,\Phi) = I$.
Si $K(t,s)$ *est définie en (2.18) et* $K(t,s)^{Q_\Lambda} = K(t,s) - \Phi(\Psi,K(t,s))$, *alors, il existe des constantes* γ, $M > 0$ *telles que*

$$\| K(t,s)^{Q_\Lambda} \| \leq Me^{(\gamma+\beta)t}, \qquad t \geq s$$

le théorème suivant donne la décomposition de la formule de variation de la constante (2.18).

Théorème 2.5.2 *[46] Soient pour un certain réel* β, $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda > \beta\}$, Φ *une base du sous espace propre généralisé* P *associé à* Λ, Ψ *une base du sous espace propre généralisé adjoint formel associé à* Λ, *telles que* $(\Psi,\Phi) = I$. *Si* C *se décompose par* Λ *comme*

$$C = P \oplus Q$$

alors la solution $x = x(\sigma,\phi)$ *de l'équation (2.17) est donnée par:*

$$\begin{cases} x_t^P = T(t-\sigma)\phi^P + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^P f(s)ds \\ x_t^Q = T(t-\sigma)\phi^Q + \int_\sigma^t d[K(t,s)^Q]f(s)ds \end{cases}$$

où $X_0^P = \Phi\Psi(0)$ *et* $K(t,s)^Q = K(t,s) - \Phi(\Psi,K(t,s))$.
Si on pose $x_t^P = \Phi y(t)$, y *vérifie l'équation différentielle ordinaire:*

$$\dot{y}(t) = By(t) + \Psi(0)f(t).$$

2.6 Stabilité de l'équilibre

Dans l'étude des équations différentielles ordinaires et les équations différentielles à retard, on s'interesse au problème de la stabilité des solutions stationnaires (points d'équilibre).
Considérons l'équation à retard, autonôme suivante:

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \qquad t > 0. \tag{2.19}$$

Définition 2.6.1 *un point d'équilibre de (2.19) est une solution* x_0 *telle que* $f(x_0) = 0$, *où* x_0 *est une fonction constante de* C *égale à* x_0.

Définition 2.6.2 *Supposons que $f(0) = 0$. La solution nulle de l'équation (2.19) est dite stable si:*
Pour tout réel positive t_0 et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de (2.19) satisfaisant $x_{t_0} \in B(0,\delta)$, satisfait $x_t \in B(0,\varepsilon)$, pour tout $t \geq t_0$, où $B(0,\delta)$ est la boule de centre 0 et de rayon δ.

Définition 2.6.3 *la solution $x = 0$ de l'équation (2.19) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si $x(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$.*

Remarque 2.6.1 *Si $x(t)$ est une solution quelconque de l'équation (2.19), alors x est stable (resp. asymptotiquement stable), si la solution $z = 0$ de l'équation*

$$\dot{z}(t) = f(z_t + x_t) - f(x_t)$$

est stable (resp. asymptotiquement stable).

Dans le cadre des équations différentielles linéaires à retard, la stabilité et l'asymptotique stabilité peuvent être détérminées grâce à la localisation des racines de l'équation caractéristique.

Proposition 2.6.1 *La solution $x = 0$ de l'équation linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les racines de l'équation caractéristique associée sont à parties réelle négatives.*

S'il existe une racine de l'équation caractéristique à partie réelle strictement positive, alors la solution $x = 0$ est instable.

Remarque 2.6.2 *Si x_0 est un point d'équilibre non nul de f et si f est continûment différentiable dans un voisinage de x_0, alors la stabilité du point d'équilibre x_0 est déterminée par la localisation des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation linéarisée de (2.19) autour de x_0.*

2.7 Théorème de la variété centre

La théorie de la variété centre joue un rôle très important dans l'étude de la dynamique des systèmes non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, en particulier pour l'étude des problèmes de bifurcation de Hopf.

Pour cette théorie on fait références à Kelley (1967) [57],Carr (1981) [19], Vanderbauwhede/Iooss [96], Hale (1985) [45], Diekmann et Van Gils (1991) [26], par exemple.

Le théorème de la variété centre, nous permet de réduire un système de dimension infinie en un système de dimension finie sur la variété centre.

Soit E un espace de Banach.

On considère le système suivant:

$$\frac{du}{dt} = L(\alpha)u + N(u,\alpha) := G(u,\alpha) \tag{2.20}$$

avec $u(0) = u_0 \in E$ et $L(\alpha)$ est un opérateur linéaire défini de $D(L(\alpha)) \subset E$ vers E, où $D(L(\alpha))$ est le domaine de $L(\alpha)$.

On suppose que $L(\alpha)$ est le générateur infinitesimal d'un semi-groupe $S(t)$ fortement continu sur E et $N : E \times \mathbb{R} \longrightarrow E$ est une fonction assez réguliére telle que $N(0,\alpha) = 0$, $\forall \alpha$ et $D_u N(0,\alpha_0) = 0$, pour un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

On fait les hypothèses suivantes:

(H_1) $E = E_0 \oplus E_h$, où E_0 est de dimension fini et E_h est fermé dans E.

(H_2) E_0 est invariant par $L(\alpha_0)$ et la partie réelle de toutes les valeurs propres de la restriction de $L(\alpha_0)$ à E_0: $L_0 := L(\alpha_0)/_{E_0}$ est égale à zéro.

(H_3) E_h est invariant par la restriction $W(t)$ de $S(t)$ sur E_h: $W(t) = S(t)/_{E_h}$ et il existe des constantes positives $a,b > 0$, telles que:

$$\|W(t)\| \leq ae^{-bt},\ t \geq 0.$$

Remarque 2.7.1 *L'hypothèse (H_3) correspond au cas ou le spectre de l'opérateur $L_h := L(\alpha_0)/_{E_h}$ est inclu dans l'ensemble $\mathbb{C}_- := \{\sigma \in \mathbb{C}/Re(\sigma) \leq -b\}$.*

D'après l'hypothèse (H_1), pour chaque $u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique décomposition

$$\begin{cases} u = v + w,\ v \in E_0, w \in E_h, \\ \alpha = \alpha_0 + \beta, \qquad\qquad \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et le système (2.20) s'écrit sous la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = L_h w + f(v+w,\beta), \\ \frac{dv}{dt} = L_0 v + g(v+w,\beta), \\ \frac{d\beta}{dt} = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

où

$$L_h := QL(\alpha_0),\ L_0 := (I-Q)L(\alpha_0),$$

avec

$$f(v+w,\beta) := Q[L(\alpha_0+\beta) - L(\alpha_0)(v+w) + N(v+w,\alpha_0+\beta)],$$

$$g(v+w,\beta) := (I-Q)[L(\alpha_0+\beta) - L(\alpha_0)(v+w) + N(v+w,\alpha_0+\beta)].$$

où Q est la projection de E sur E_h.

Une variété invariante locale du système (2.20) est un ensemble M de E qui pour toute solution du système (2.20) de condition initiale $u(0) \in M$ reste dans M pour tout $0 <\mid t \mid \leq T$. Si T est infini, alors M est dite une variété invariante.

Une variété centre est une variété invariante qui est tangente à E_0 en $(0,\alpha_0)$

Théorème 2.7.1 *[96] Sous les hypothèses de* (H_1) *à* (H_3) *Il existe une variété centre du système (2.20), donnée par*

$$M_0 := \{v + h(v,\beta)/(v,\beta) \in E_0 \times \mathbb{R}, \|(v,\beta)\| < \delta\},$$

M_0 *est une variété invariante tangente à* E_0 *en* $(0,\alpha_0)$ *c'est à dire:*

$$\frac{\mid Qu \mid}{\mid (I-Q)u \mid} \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ \mid u \mid \to 0 \ \textit{dans} \ M_0; u \in E$$

ou h *est définie de* $E_0 \times \mathbb{R}$ *vers* E_h *satisfait:* $h(0) = 0$ *et* $D_v h(0) = 0$*, et l'équation réduite de (2.21) sur* M_0 *s'écrit:*

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = L_0 v + g(v + h(v,\beta),\beta) \\ \dot{\beta} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

De plus, on a (w,v,β) *solution de (2.21)* $\Longleftrightarrow$ $w = h(v,\beta)$ *et* v *solution de (2.22) à une translation de phase près.*

De plus si $N(u,\alpha)$ est de classe C^k, la fonction $h(v,\beta)$ est aussi de classe C^k. La variété centre M_0 est localement attractive, c'est à dire, toute solution du système (2.20) à donnée initiale dans un voisinage U de M_0 tend exponentiellement vers une solution du système (2.20) sur M_0 et on écrit:
il existe un voisinage U de M_0, $\gamma > 0/\forall u_0 \in U$ et $x(t)$ solution de (2.22) dans M_0 : $x(t) \in M_0, \forall t$, telle que $\mid u(t) - x(t) \mid \leq Ke^{-\gamma t}$ pour t grand $K > 0$, où $u(t)$ est la solution de (2.22) de donnée initiale u_0.

La stabilité du système (2.20) est déduite de celle de l'équation réduite (2.22) comme suit:

Théorème 2.7.2 *[96] 1) Si* $(0,0)$ *est une solution stable de l'équation (2.22) (resp. asymptotiquement stable, instable), alors la solution $(0,\alpha_0)$ du système (2.20) est stable (resp. asymptotiquement stable, instable).*
2) Si la solution zéro de l'équation (2.22) est stable et si $(v(t),w(t))$ est solution du système (2.21) avec $\|(v(0),w(0))\|$ suffisament petit, alors il existe une solution $x(t)$ dans M_0 de l'équation (2.22) et une constante $\gamma > 0$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{c} v(t) = x(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ et \\ w(t) = h(x(t),\beta) + O(e^{-\gamma t}), \ pour\ t \to \infty. \end{array} \right. \tag{2.23}$$

2.8 Stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique

Cette section est consacré à un bref exposé des résultats présentés par H. Talibi [90] dans le cas des équations différentielles ordinaires et à retard pour montrer la stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique.
Dans toute cette section on se situe sous les hypothèses $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_2})$ et $(\mathbf{H_3})$ du théorème de la bifurcation de Hopf supercritique, introduites dans le chapitre introduction.

2.8.1 Cas des équation différentielles ordinaires

On considère le système différentiel ordinaire:

$$\frac{du(t)}{dt} = F(\alpha,u(t)) \tag{2.24}$$

Soit $\lambda(\alpha) = r(\alpha) + i\beta(\alpha)$ la branche continue de la valeur propre associée à l'équation linéarisée de (2.24) autour de 0 bifurquée à partir de $i\omega_0 : \lambda(\alpha_0) = i\omega_0$. A cette branche, on associe une branche continue de vecteur propre : $v(\alpha) = a(\alpha) + b(\alpha)$; $a,b \in \mathbb{R}^n$.
L'espace $N(\alpha) = \{a(\alpha),b(\alpha)\}$ est invariant par $D_uF(\alpha,0)$ et possède un espace supplémentaire $S(\alpha)$, et relativement à cette décomposition de $\mathbb{R}^n$, $D_uF(\alpha,0)$ peut prendre la forme:

$$D_uF(\alpha,0) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{pmatrix}$$

où

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} r(\alpha) & \beta(\alpha) \\ -\beta(\alpha) & r(\alpha) \end{pmatrix}$$

et $B(\alpha)$ matrice d'ordre $(n-2)$, de valeurs propres à parties réelles nulles.
Par décomposition de l'équation (2.24) on obtient:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(\alpha)x + f(\alpha,x,y) \\ \frac{dy}{dt} = B(\alpha)y + g(\alpha,x,y) \end{cases} \tag{2.25}$$

où $x \in N(\alpha)$, $y \in S(\alpha)$ et,

$$\begin{cases} f(\alpha,0,0) = 0, \qquad g(\alpha,0,0) = 0 \\ D_{x,y}f(\alpha,0,0) = 0, \qquad D_{x,y}g(\alpha,0,0) = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Lemme 2.8.1 *(Réduction de Lyapunov Schmidt)[90] On suppose* $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_1})$ *et* $(\mathbf{H_2})$. *Alors il existe une fonction* Φ *définie dans un voisinage de* $(\alpha_0,\frac{2\pi}{\omega_0},0)$ *dans* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times N(\alpha)$ *à valeurs dans* $S(\alpha)$, *telle que*

$$\Phi(\alpha,T,0) = 0, \qquad D_x\Phi(\alpha,T,0) = 0$$

et le problème de recherche des solutions $T-$*périodiques de l'équation (2.25) dans un voisinage de* $(\alpha_0,\frac{2\pi}{\omega_0},0)$ *est réduit au même problème pour le système*

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha)x + f(\alpha,x,\Phi(\alpha,T,x)) \tag{2.27}$$

Remarque 2.8.1 *De cette transformation on a:*

$$(x,y) \text{ solution de } (2.25) \Longrightarrow x \text{ solution de } (2.27) \text{ et } y = \Phi(\alpha,T,x).$$

On donne à l'équation (2.25) une autre forme, en la centrant autour de$y = \Phi(\alpha,T,x)$.
Soit $y = z + \Phi(\alpha,T,x)$, on obtient l'équation en (x,z) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(\alpha)x + \widetilde{f}(\alpha,T,x,z) \\ \frac{dz}{dt} = B(\alpha)z + \widetilde{g}(\alpha,T,x,z) \end{cases} \tag{2.28}$$

où

$$\begin{cases} \widetilde{f}(\alpha,T,x,z) = f(\alpha,x,z + \Phi(\alpha,T,x)) \\ \widetilde{g}(\alpha,T,x,z) = g(\alpha,x,z + \Phi(\alpha,T,x)) + B(\alpha)\Phi(\alpha,T,x) \\ \quad -D_x\Phi(\alpha,T,x)\{A\alpha)x + \widetilde{f}(\alpha,T,x,z)\} \end{cases} \tag{2.29}$$

Notons que les solutions $T-$périodiques bifurquées de (2.27) correspondent aux solutions $T-$périodiques bifurquées de (2.28) pour $z = 0$. On note une telle solution par $p = (P,0)$ et on prend $P(0) = (p_0,0)$, avec $p_0 > 0$.
Soit (x_0,z_0) une condition initiale proche de $(P,0)$, avec $x_0 = (\xi_0,0)$; $\xi_0 > 0$.
On note: x^* la solution de (2.27) telle que: $x^*(0) = x_0$, et par $(x^{\#},z)$ la solution de (2.28) telle que: $x^{\#}(0) = x_0$, $z_{t=0} = z_0$, et soient

-$T^* = T^*(\alpha,x_0) > 0$ le premier temps de retour de x^*, c'est à dire tel que: $x^*(T^*) = (\zeta,0)$, $\zeta > 0$, et

-$T^{\#} = T^{\#}(\alpha,x_0,z_0)$ le premier temps de retour de $x^{\#}$.

On a le résultat suivant sur la stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique.

Théorème 2.8.1 *(Stabilité de la branche bifurquée)[89] [90] Sous les hypothèses*$(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *et* $(\mathbf{H_3})$, *il existe* $\varepsilon_1 > 0$, $\eta > 0$, $K > 0$ *telles que : pour chaque* ε,$0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *;* θ, $0 \leq \theta \leq 1$, *les relations :* $p_0 = (\varepsilon,0)$ *;* $\xi_0 = c$ *;* $|\varepsilon - c| \leq \theta\varepsilon^2$, *et* $\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$ *impliquent*

i) $\left\|x^{\#}(T^{\#}) - (p_0,0)\right\| \leq \theta(\varepsilon^2 - K\varepsilon^4)$, *ii)* $\left\|z(T^{\#})\right\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$, *où* $\alpha = \alpha(\varepsilon)$

De plus,

iii) $\left\|z(T^{\#})\right\| \leq \eta\theta\varepsilon^3(1-K\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}$.

2.8.2 Cas des équations différentielles à retard

On considère le système suivant:

$$\dot{u}\ (t) = Lu_t + R(\alpha,u_t) = F(\alpha,u_t) \tag{2.30}$$

On note par $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à l'équation linearisée de (2.30) autour de 0, et par A_α générateur infinitésimal.
Soit $\lambda(\alpha) = r(\alpha) + i\beta(\alpha)$, la branche des racines caractéristiques de l'équation caractéristique associée à l'équation linéarisée de (2.30) autour de 0 bifurquée à partir de$i\omega_0$.
A cette branche continue des racines caractéristiques on associe la branche continue de vecteurs propres $\phi_\alpha = a_\alpha + ib_\alpha$.
Soit $N_\alpha = vect\{a(\alpha),b(\alpha)\}$ l'espace propre généralisé associé à $\lambda(\alpha)$ et S_α tels que C se décompose comme suit:

$$C = N_\alpha \oplus S_\alpha.$$

Notons par $A = A(\alpha_0)$, $T_{\alpha_0}(t) = T(t)$, $N = N(\alpha_0)$, $a = a(\alpha_0)$, $b = b(\alpha_0)$, $S = S(\alpha_0)$, et considérons la décomposition de l'espace C, pour $\alpha = \alpha_0$

$$C = N \oplus S$$

D'après la formule de variation de la constante introduite par Hale (1977) [44], l'équation intégrale équivalente à l'équation (2.30) s'écrit:

$$u_t = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)X_0R(\alpha,u_s)ds \tag{2.31}$$

avec X_0 est la matrice $(n \times n)$ définie sur $[-r,0]$ par:

$$X_0(\theta) = \begin{cases} Id & \text{si } \theta = 0 \\ 0 & \text{si } \theta \neq 0 \end{cases}$$

Soit $(X_{0,n})$ la suite des fonctions matricielles définies dans ([90] Chapite 7) approchant la matrice X_0:

- $\| X_{0,n} \| \leq M$, uniformément en n.
- $X_{0,n}(0) = Id, \forall n$.
- $X_{0,n} \subset D(A^j)$ le domaine des itérés A^j, et converge simplement vers X_0 quand n tend vers l'infini.

l'équation approchée de l'équation (2.31) est définie comme suit (voir [90]),

$$u_t = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)X_{0,n}R(\alpha,u_s)ds \tag{2.32}$$

Par la projection de l'équation (2.32) dans N et S respectivement, on obtient:

$$\begin{cases} x_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)X_{0,n}^1 R(\alpha,x_s,y_s)ds \\ y_t = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)X_{0,n}^2 R(\alpha,x_s,y_s)ds \end{cases} \tag{2.33}$$

avec $x_t \in N$, $y_t \in S$ et $u_t = x_t + y_t$, de même $X_{0,n} = X_{0,n}^1 + X_{0,n}^2$. En cherchant y_t tel que $y_\omega = y_0$, pour $\omega > 0$, on obtient $y_0 = \Phi_n(\alpha,\omega,x_0)$, où Φ_n est du même type que la fonction solution $u_t^n(\alpha,\varphi)$ (ω à la place de t, et x_0 à la place de φ) et telle que, pour tout n, α, et ω

$$\Phi_n(\alpha,\omega,0) = 0 \text{ et } D_x\Phi_n(\alpha_0,\omega,0) = 0, \tag{2.34}$$

Le problème de recherche de solutions $\omega-$périodiques ρ de l'équation (2.32) peut se ramener à celui de l'équation réduite

$$x_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)X_{0,n}^1 R(\alpha,x_x,\Phi_n(\alpha,\omega,x_s))ds \tag{2.35}$$

Dans [90], on a exploité l'équation (2.35) pour obtenir une branche de solutions périodiques bifurquées $\rho = (p,\Phi_n(\alpha,\omega,p))$ de l'équation (2.32) qui tend vers la branche de solutions périodiques bifurquées de l'équation (2.30) quand n tend vers l'infini, où p est la solution périodique bifurquée de (2.35).

Par la même technique que celle utilisée dans le cas des équations différentielles ordinaires, on centre l'équation (2.33) autour de la fonction $\Phi_n(\alpha,\omega,x)$ avec ω est la période de la branche bifurquée pour la valeur α du paramètre.

Soit $(x_0,z_0) \in N \times S$ voisin de $(0,0)$, avec $x_0 = (\xi_0,0)$ où $\xi_0 > 0$.

Posons $y_0 = z_0 + \Phi_n(\alpha,\omega,x_0)$ et soit (x_t,y_t) la solution de (2.33) correspondant à la donnée initiale (x_0,y_0). Faisons le changement

$$z_t = y_t - \Phi_n(\alpha,\omega,x_t),$$

et substituons dans (2.33), on obtient l'équation en (x,z) au lieu de (x,y) suivante:

$$\begin{cases} x_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)R_{1,n}(\alpha,\omega,x_s,z_s)ds \\ z_t = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)R_{2,n}(\alpha,\omega,x_s,z_s)ds \end{cases} \tag{2.36}$$

avec

$$\begin{cases} R_{1,n}(\alpha,\omega,x,z) = X^1_{0,n}R(\alpha,x,z+\Phi_n(\alpha,\omega,x)) \\ R_{2,n}(\alpha,\omega,x,z) = X^2_{0,n}R(\alpha,x,z+\Phi_n(\alpha,\omega,x)) + A\Phi_n(\alpha,\omega,x) \\ -D_x\Phi_n(\alpha,\omega,x)[Ax + R_{1,n}(\alpha,\omega,x,z)] \end{cases} \tag{2.37}$$

On note par:

-ρ_t la solution $\omega-$périodique de la branche bifurquée de (2.33) et soit p_t sa projection sur l'espace N.

- x^*_t la solution de l'équation (2.35) correspond à la donnée initiale x_0,

-$(x^{\#}_t,z_t)$ celle du système (2.36) correspondant à la donnée initiale (x_0,z_0).

Alors d'après (2.34) et (2.35) on a,

$$\begin{cases} p_t = T(t)p_0 + \int_0^t T(t-s)R_{1,n}(\alpha,\omega,p_s,0)ds \\ x^*_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)R_{1,n}(\alpha,\omega,x^*_s,0)ds \\ x^{\#}_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)R_{1,n}(\alpha,\omega,x^{\#}_s,z_s)ds \\ z_t = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)R_{2,n}(\alpha,\omega,x^{\#}_s,z_s)ds \end{cases} \tag{2.38}$$

Soient

-$\omega^* = \omega^*_n(\alpha,x_0)$ le premier temps de retour de x^*. C'est à dire, $x^*_{\omega^*} = (\xi^*,0)$, avec $\xi^* > 0$.

-$\omega^{\#} = \omega_n^{\#}(\alpha,x_0,z_0)$ celui de $x^{\#}$, $x^{\#}_{\omega^{\#}} = (\xi^{\#},0)$, avec $\xi^{\#} > 0$.

Le résultat principal dans [90] sur la stabilité de la branche de bifurcation de Hopf supercritique pour les équations différentielles à retard s'énnonce comme suit:

Théorème 2.8.2 *(Stabilité de la branche bifurquée)[90] Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *et* $(\mathbf{H_3})$, *il existe des constantes* $\varepsilon_1 > 0$, $\eta > 0$, $K > 0$ *indépendantes de* n *telles que: pour chaque* ε,$0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *;* θ, $0 \leq \theta \leq 1$, *les relations:* $p_0 = (\varepsilon,0)$ *;* $|p_0 - x_0| \leq \theta\varepsilon^2$, *et* $\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$ *impliquent*

i) $\left\|x^{\#}_{\omega^{\#}} - p_0\right\| \leq \theta(\varepsilon^2 - K\varepsilon^4)$,

ii) $\|z_{\omega^{\#}}\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$,

plus précisement,

iii) $\|z_{\omega^{\#}}\| \leq \eta\theta\varepsilon^3(1 - K\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}$.

Cette méthode est directe, n'utilise pas la méthode standard basée sur la théorie de Floquet. Il est noté qu'on peut passer par une sorte de variété centre, dans le cas des équations différentielles ordinaires ou celles à retard.

A cause de la régularité dans le cas des équations differentielles à retard on était obligé de passer par la méthode d'approximation.

Dans notre travail nous montrons ce résultat, en utilisant la formule de variation de la constante introduite par Hale en (1993) (voir [46]) et le théorème de la variété centre habituel.

Chapitre 3

Bifurcation de Hopf supercritique, une démonstration de l'échange de stabilité

3.1 Introduction

Le théorème de la bifurcation de Hopf établit le passage continu de la stabilité de la branche triviale (une certaine position d'équilibre du système) vers la branche périodique bifurquée. Il est connu que la bifurcation de Hopf ne peut se produire que d'un seul côté de la valeur critique du paramètre de bifurcation, ce qui donne lieu, soit à une bifurcation sous-critique, soit à une bifurcation critique, soit à une bifurcation supercritique. Il est aussi connu que la bifurcation sous-critique est instable et que la bifurcation supercritique est uniformément stable (voir [90]).

Notre objectif ici est de donner une démonstration du passage de la stabilité de la branche triviale à la branche bifurquée supercritique. Nous obtenons ainsi un domaine de stabilité de la branche bifurquée supercritique (Talibi et Yafia [93]).

Nous suivons les mêmes techniques que celles utilisées dans [90], à savoir :

(1)-Réduction du système initial à un système différentiel ordinaire de dimension deux par le théorème de la variété centre.

(2)-Estimation de la distance entre la solution de l'équation initiale et celle de l'équation réduite.

3.2 Généralités et système réduit

On considère l'équation à retard suivante:

$$\dot{u}\ (t) = Lu_t + R(\alpha,u_t) \tag{3.1}$$

on se situe sous les hypothèses du théorème de bifurcation de Hopf:

($\mathbf{H_0}$) $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur linéaire borné, $R : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, k est un entier naturel ≥ 1 donné, telle que $R(\alpha,0) = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et $D_2R(\alpha_0,0) = 0$ et $D_2^2R(\alpha_0,0) = 0$, pour un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$; où $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u_t(\theta) = u(t+\theta)$ pour $\theta \in [-r,0]$, $u_t \in C$.
Où D_2 est la première par rapport à la deuxième variable, et D_2^2 est la deuxième par rapport à la deuxième variable.
($\mathbf{H_1}$) l'équation caractéristique

$$\det \Delta(\lambda,\alpha) = 0 \tag{3.2}$$

avec

$$\Delta(\lambda,\alpha) = (\lambda I_d - (L + D_2R(\alpha,0))e^{\lambda(.)}I_d).$$

de l'équation linéarisée autour de 0 (I_d est l'opérateur identité)

$$\dot{u}\ (t) = [L + D_2R(\alpha,0)]u_t \tag{3.3}$$

de l'équation (3.1), possède en $\alpha = \alpha_0$, deux racines conjuguées pûrement imaginaires $\pm i\omega_0$, et ne possède pas d'autres racines de type $im\omega_0$, $\omega_0 > 0$ avec $m \in \{0,1,2,....\}$.
Soit $\lambda(\alpha)$ la racine caractéristique de (3.2), bifurquée de $i\omega_0$, en $\alpha = \alpha_0$.
On suppose que:
($\mathbf{H_2}$)

$$\frac{d}{d\alpha}Re\lambda(\alpha)_{|\alpha=\alpha_0} > 0.$$

On note par $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à l'équation linearisée (3.3) de l'équation (3.1) autour de 0, et par A_α son générateur infinitésimal.

Le résultat suivant est un résultat d'existence et continuité par rapport à α de la branche des valeurs caractéristiques bifurquées.

Lemme 3.2.1 *[46] Soit $\{L(\alpha),\alpha \in \mathbb{R}\}$ une famille d'opérateurs linéaires continus, et dérivables par rapport à α.*

Si λ_0 est une racine de l'équation caractéristique de l'équation à retard associée à $L(0)$

$$\dot{y}(t) = L(0)y_t,$$

alors il existe α_0 et une racine $\lambda(\alpha)$ de l'équation caractéristique de l'équation

$$\dot{y}(t) = L(\alpha)y_t$$

continue et dérivable par rapport à α pour $|\alpha| < \alpha_0$ telle que $\lambda(0) = \lambda_0$.

A cette branche continue de valeurs propres $\lambda(\alpha) = r(\alpha) + i\beta(\alpha)$, on associe la branche continue de vecteurs propres: $\phi_\alpha(\theta) = \phi_\alpha(0)e^{\lambda(\alpha)\theta} = a(\alpha)(\theta) + ib(\alpha)(\theta)$, pour $\theta \in [-r,0]$, où $\phi_\alpha(0)$ est déterminé à partir de l'équation suivante,

$$\Delta(\lambda,\alpha)\phi_\alpha(0) = 0.$$

Soit $N_\alpha = vect\{a(\alpha),b(\alpha)\}$ et $\Phi_\alpha = \{a(\alpha),b(\alpha)\}$. D'après le théorème 2.4.1 il existe une matrice $B(\alpha)$ (2×2), telle que

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} r(\alpha) & \beta(\alpha) \\ -\beta(\alpha) & r(\alpha) \end{pmatrix}$$

vérifiant $A_\alpha \Phi_\alpha = \Phi_\alpha B(\alpha)$.

En utilisant la théorie de l'adjoint formel (voir [46]) on a:

$$N_\alpha = \{\Phi_\alpha < \Psi_\alpha,\varphi > ,\varphi \in C\}$$

et C peut se décomposer comme suit:

$$C = N_\alpha \oplus S_\alpha$$

où $\Psi_\alpha = col(e(\alpha),f(\alpha))$ est une base du sous espace adjoint N_α^* de N_α, telle que $< \Psi_\alpha,\Phi_\alpha >= I$ (I est la matrice identité 2×2) et $< .,. >$ la forme bilinéaire définie (voir Chapitre 2) sur $C^* \times C$.

D'après la formule de variation de la constante (voir Chapitre 2), l'équation intégrale équivalente à l'équation (3.1) est donnée comme suit

$$u_t = T_\alpha(t-\sigma)\phi + \int_\sigma^t d[K_\alpha(t,\tau)]F(\alpha,u_\tau) \tag{3.4}$$

où $K_\alpha(t,.) : [\sigma,t] \longrightarrow C$ est donnée par

$$K_\alpha(t,s)(\theta) = \int_\sigma^s X_\alpha(t+\theta-\tau)d\tau, t \geq \sigma$$

et X_α est la matrice fondamentale solution de l'équation linéarisée (3.3).

En utilisant la décomposition $u_t = \Phi_\alpha x(t) + y_t$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $y_t \in S_\alpha$ dans l'équation (3.4) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{B(\alpha)t}x_0 + \int_0^t e^{B(\alpha)(t-\tau)}\Psi_\alpha(0)F(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau),y_\tau)d\tau \\ \\ y_t = T_\alpha(t)y_0 + \int_0^t d[K_\alpha(t,\tau)^S]F(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau),y_\tau) \end{array} \right. \tag{3.5}$$

où $F(\alpha,\varphi,\psi) = R(\alpha,\varphi+\psi) - D_2R(\alpha,\varphi+\psi)$, $\varphi \in N_\alpha$, $\psi \in S_\alpha$.

Lemme 3.2.2 *[46] Si $u_t(.,\phi)$ est une solution de l'équation (3.1), définie et bornée pour $t \leq 0$, alors pour $u_t = \Phi_\alpha x(t) + y_t$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $y_t \in S_\alpha$, le système (3.5) s'écrit sous la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{B(\alpha)t}x_0 + \int_0^t e^{B(\alpha)(t-\tau)}\Psi_\alpha(0)F(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau),y_\tau)d\tau \\ y_t = \int_{-\infty}^t d[K_\alpha(t,\tau)^S]F(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau),y_\tau) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

et inversement, si (x,y) est solution du système (3.6) telle que $u_t = \Phi_\alpha x(t) + y_t$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $y_t \in S_\alpha$, définie est bornée pour $t \leq 0$, alors $u_t(.,\phi)$ est solution de l'équation (3.1).

Par application du théorème de la variété centre, il existe une fonction $g(\alpha,.)$ définie d'un voisinage de 0 de N_α vers un voisinage de 0 de S_α telle que $y_t = g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))$ sur la variété centre, pour α dans un voisinage de α_0, avec g de classe C^{k+1}, telle que

$g(\alpha,0) = 0$ et $D_2 g(\alpha_0,0) = 0$.

Alors le système (3.6) se réduit sur la variété centre au système suivant:

$$x(t) = e^{B(\alpha)t}x_0 + \int_0^t e^{B(\alpha)t}\Psi_\alpha(0)F(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau),g(\alpha,\Phi_\alpha x(\tau))d\tau \tag{3.7}$$

Remarque 3.2.1 *De cette transformation, on a :*
$(x(t),y_t)$ solution de l'équation (3.6) sur la variété centre $\Leftrightarrow$ $x(t)$ solution de l'équation (3.7) et $y_t = g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))$.

Par passage en coordoonées polaires $x = (\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)$, le système (3.7) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = r(\alpha)\rho + h_1(\alpha,\rho,\phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = \beta(\alpha) + h_2(\alpha,\rho,\phi) \end{cases} \tag{3.8}$$

où $h_1(\alpha,\rho,\phi)$ et $h_2(\alpha,\rho,\phi)$ sont de la forme :

$$h_1(\alpha,\rho,\phi) = \cos\phi f_1(\alpha,\rho\cos\phi,\rho\sin\phi) + \sin\phi f_2(\alpha,\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)$$

et

$$h_2(\alpha,\rho,\phi) = \frac{1}{\rho}\left[-\sin\phi f_1(\alpha,\rho\cos\phi,\rho\sin\phi) + \cos\phi f_2(\alpha,\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\right]$$

où f_1, f_2 sont les composantes de $\Psi_\alpha(0)F(\alpha,\Phi_\alpha x(t),g(\alpha,\Phi_\alpha x(t)))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Lemme 3.2.3 *Pour $\alpha = \alpha_0$ et ρ voisin de 0, t est difféomorphe à ϕ*

Démonstration. Comme $F(\alpha,\varphi,\psi) = R(\alpha,\varphi+\psi) - D_2F(\alpha,\varphi+\psi)$,
alors $D_{2,3}F(\alpha_0,0,0) = 0$
et on a pour $\rho = 0$, $h_i(\alpha_0,0,\phi) = 0$, $i = 1,2$.
Par intégration de la dauxième équation de l'équation (3.8) de 0 à t, on obtient :

$$\phi(t) = \beta(\alpha)t + \int_0^t h_2(\alpha,\rho(s),\phi(s))ds$$

en $\alpha = \alpha_0$ on a :

$$\phi(t) = \omega_0 t + \int_0^t h_2(\alpha,\rho(s),\phi(s))ds.$$

En faisant tendre ρ vers 0, on obtient $\phi \simeq \omega_0 t$ et par suite t est difféomorphe à ϕ pour $\alpha = \alpha_0$ et ρ voisin de 0 ■

D'après le le lemme 3.2.3, on peut éléminer t entre les deux équations dans (3.8), on obtient:

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{r(\alpha)\rho + h_1(\alpha,\rho,\phi)}{\beta(\alpha) + h_2(\alpha,\rho,\phi)}. \tag{3.9}$$

Soit $\rho(\phi,c)$ la solution de l'équation (3.9) de condition initiale c.

Rechercher la solution périodique de condition initiale c revient à trouver c et α tels que

$$G(\alpha,c) = 0 \tag{3.10}$$

où

$$G(\alpha,c) = \int_0^{2\pi} \frac{r(\alpha)\rho(s,c) + h_1(\alpha,\rho(s,c),s)}{\beta(\alpha) + h_2(\alpha,\rho(s,c),s)} ds. \tag{3.11}$$

G s'appelle l'équation de bifurcation.

Par application du théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\alpha : [0,\varepsilon_0[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\varepsilon,\alpha(\varepsilon))$ est solution de l'équation (3.10). On obtient le résultat du théorème de bifurcation de Hopf :

Il existe des fonctions $P(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ et $\alpha(\varepsilon)$ suffisamments régulières telles que $P(\varepsilon)$ est une solution $\omega(\varepsilon)-$périodique de l'équation (3.7) pour $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ du paramètre, telle que $P(0) = 0$, $\omega(0) = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\alpha(0) = \alpha_0$.

De plus, la bifurcation est sous-critique si $\alpha''(0) < 0$, et supercritique si $\alpha''(0) > 0$.

introduisons maintenant l'hypothèse de la bifurcation supercritique suivante :

$(\mathbf{H_3})$

$$\alpha''(0) > 0.$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer que sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$ la bifurcation supercritique est asymptotiquement stable. Il est à noter que notre procédure est directe et n'utilise pas la théorie des exposants de Floquet (voir [47]).

3.3 Stabilité, stabilité asymptotique le long de la branche bifurquée

Dans tout le reste de ce chapitre nous supposons que les hypothèses($\mathbf{H_0}$)-($\mathbf{H_3}$) sont vérifiées.
Dans un premier temps, on donne à l'équation (3.6) une autre forme, en la centrant autour de $y_t = g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))$.
On considère le changement de variable suivant :

$$y_t = z_t + g(\alpha,\Phi_\alpha x(t)) \tag{3.12}$$

En substituant dans le système (3.7) on obtient le système en (x,z) suivant:

$$\begin{cases} x(t) = e^{B(\alpha)t}x_0 + \int_0^t e^{B(\alpha)(t-\tau)}R_1(\alpha,x(\tau),z_\tau)d\tau \\ \\ z_t = \int_{-\infty}^t d[K_\alpha(t,\tau)^S]R_2(\alpha,x(\tau),z_\tau) \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$R_1(\alpha,x(t),z_t) = \Psi_\alpha(0)F(\alpha,\Phi_\alpha x(t),z_t + g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))) \tag{3.14}$$

$$R_1(\alpha_0,0,0) = 0, \qquad D_{2,3}R_1(\alpha_0,0,0) = 0,$$

et

$$R_2(\alpha,x(t),z_t) = F(\alpha,\Phi_\alpha x(t),z_t + g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))) - F(\alpha,\Phi_\alpha x(t),g(\alpha,\Phi_\alpha x(t))) \tag{3.15}$$

$$R_2(\alpha_0,0,0) = 0, \qquad D_{2,3}R_2(\alpha_0,0,0) = 0.$$

où $D_{2,3}$ désigne la dérivée par rapport à la deuxième et troisième variables.
Notons que les solutions bifurquées de (3.7) correspondent à celles bifurquées de (3.13) pour $z = 0$. Notons une telle solution par $p = (P,0)$, et prenons $P(0) = P_0 = (\varepsilon,0)$, $\varepsilon > 0$.
Soit (x_0,z_0) une condition initiale proche de $(P_0,0)$, avec $x_0 = (c,0)$, $c > 0$.
On note par x^* la solution de (3.7) telle que : $x^*(0) = x_0$, et par $(x^\#,z)$ la solution de (3.13) telle que : $x^\#(0) = x_0$, $z_{t=0} = z_0$.

La proposition suivante donne l'existence des premiers temps de retour des solutions x^* et $x^\#$.

Proposition 3.3.1 *Il existe $\omega^* > 0$ et $\omega^\# > 0$, tels que :*

i) $\omega^* = \omega^*(\alpha,x_0) > 0$ est le premier temps de retour de la solution x^* de l'équation (3.7).

ii) $\omega^\# = \omega^\#(\alpha,x_0,z_0)$ est le premier temps de retour de la solution $x^\#$ de la première équation de (3.13).

Démonstration. i)-Soient (ρ^*,ϕ^*) les coordonnées polaires correspondantes à la solution en x^*.

De l'équation (3.8) on peut exprimer ρ^* en fonction de ϕ^* et par intégration de la deuxième équation (3.8), de 0 à t, on obtient :

$$\phi^*(t) = \beta(\alpha)t + \int_0^t h_2(\alpha,\rho^*(\phi^*(s)),\phi^*(s))ds$$

$$\phi^*(0) = 0.$$

Le premier temps de retour de x^* correspond à trouver ω tel que

$$\phi^*(\omega) = 2\pi.$$

Posons

$$J(\alpha,c,\omega) = \beta(\alpha)\omega - 2\pi + \int_0^\omega h_2(\alpha,\rho^*(\phi^*(s)),\phi^*(s))ds$$

avec c condition initiale de la solution ρ^* de la première équation (3.8). Comme $\rho^* \longrightarrow 0$ quand $c \longrightarrow 0$, alors $h_i(\alpha,\rho^*,\phi^*) \longrightarrow 0$ quand $c \longrightarrow 0$ et on obtient :

$$J(\alpha_0,0,\frac{2\pi}{\omega_0}) = 0.$$

Par différentiation de J par rapport à ω on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega}J(\alpha,c,\omega) &= \beta(\alpha) + h_2(\alpha,\rho(\phi(\omega)),\phi(\omega)) + \int_0^\omega \{\frac{\partial}{\partial\omega}h_2(\alpha,\rho(\phi(s)),\phi(s)) \\ &+ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2(\alpha,\rho(\phi(s)),\phi(s))\frac{\partial\rho}{\partial\omega} + \frac{\partial}{\partial\phi}h_2(\alpha,\rho(\phi(s)),\phi(s))\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\}ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial\omega}J(\alpha_0,0,\frac{2\pi}{\omega_0}) = \omega_0 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un premier temps de retour $\omega^* = \omega^*(\alpha,x_0)$ de x^*.

ii)-De la même façon que pour i), par passage en coordonnées polaires dans la première équation de (3.13), et par aplication du théorème des fonctions implicites, on obtient le résultat. ■

Soient maintenant

$\omega^* = \omega^*(\alpha,x_0) > 0$ le premier temps de retour de x^*, c'est à dire $x^*(\omega^*) = (\zeta,0)$, $\zeta > 0$,

et

$\omega^\# = \omega^\#(\alpha,x_0,z_0) > 0$ le premier temps de retour de $x^\#$.

Dans ce qui suit nous allons déterminer une zone de stabilité de la branche bifurquée supercritique.

Le résultat principal est donné par le théorème suivant qui donne l'estimation entre la condition initiale $P(0)$ de la solution bifurquée et la solution $x^\#$ aprés un temps de retour $\omega^\#$:

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_0})$-$(\mathbf{H_3})$*, il existe* $\varepsilon_1 > 0$, $\eta > 0$, $K > 0$ *telles que, pour chaque* ε, $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$ θ, $(0 \leq \theta \leq 1)$, *les relations :* $P_0 = (\varepsilon,0)$ $|\varepsilon - c| \leq \theta\varepsilon^2$, *et* $\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$ *impliquent*

i) $\left\|x^\#(\omega^\#) - P_0\right\| \leq \theta(\varepsilon^2 - K\varepsilon^4)$;

ii) $\|z_{\omega^\#}\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$.

Avant de démontrer ce théorème, donnons le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1 *Supposant que les hypothèses* $(\mathbf{H_0})$-$(\mathbf{H_3})$ *soient vérifiées. Alors les orbites bifurquées de l'équation (3.1) pour* α *dans un voisinage de* α_0 *sont asymptotiquement stable.*

Démonstration. (du corrollaire) Soit (x_0,z_0) une donnée initiale de (3.13) telle que:

$$| \varepsilon - c | \leq \theta\varepsilon^2,$$

et

$$\| z_0 \| \leq \eta\theta\varepsilon^3.$$

On note par $(c^1,0) = x^\#(\omega^\#)$, $z_0^1 = z_{\omega^\#}$ et c^j, z_0^j les termes correspondants après $j-$rotations, avec $c^j = x^\#(\omega_j^\#)$ où $\omega_j^\#$ le temps de retour après j-rotations: $\phi^\#(\omega_j^\#) =$

$2j\pi$.

D'après i) et ii) du théorème 3.3.1 on obtient:

$$\begin{aligned} \|x^{\#}(\omega^{\#}) - P_0\| &= |\varepsilon - c^1| \\ &\leq \theta(1 - K\varepsilon^2)\varepsilon^2 \end{aligned}$$

et

$$\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3.$$

d'une façon récurrente, on obtient:

$$\left|\varepsilon - c^j\right| \leq \theta(1 - K\varepsilon^2)^j \varepsilon^2,$$

et

$$\left\|z_0^j\right\| \leq \eta\theta\varepsilon^3.$$

Ce qui implique que $(x(t), z_t)$ approche l'orbite de p. ■

La démonstration du théorème 3.3.1 est basée sur les deux lemmes suivants:

Lemme 3.3.1 *Pour θ, $0 \leq \theta \leq 1$, et $\varepsilon > 0$ telles que $|\varepsilon - c| \leq \theta\varepsilon^2$, et $\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que:*

$$\|x^*(\omega^*) - P_0\| \leq \theta(\varepsilon^2 - K_1\varepsilon^4).$$

Lemme 3.3.2 *Pour ω_1 fixé tel que $0 < \frac{2\pi}{\omega_0} < \omega_1$ et θ, $0 \leq \theta \leq 1$, $\varepsilon > 0$ telles que $|\varepsilon - c| \leq \theta\varepsilon^2$, et $\|z_0\| \leq \eta\theta\varepsilon^3$, il existe une constante $K_2 > 0$ telle que pour tout t, $0 \leq t \leq \omega_1$:*

i) $\left\|x^{\#}(t) - P(t)\right\| \leq \theta K_2 \varepsilon^2$

ii) $\|z_t\| \leq \theta\varepsilon^3 K_2 \eta$

iii) $\left\|x^{\#}(t) - x^*(t)\right\| \leq \theta K_2 \varepsilon^4 \eta$.

Pour la démonstration du lemme 3.3.1, nous avons besoin de plus de précision sur les éléments de la bifurcation $(\alpha(\varepsilon), \omega(\varepsilon))$.

Proposition 3.3.2 *[91] Les éléments de la bifurcation (α, ω, p) vérifient,*

$$\begin{cases} \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon^2\alpha_2 + \varepsilon^4\alpha_4 + ... \\ \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^4\omega_4 + ... \end{cases} \quad (3.16)$$

où (α, ω) sont donnés par le théorème de bifurcation de Hopf.

Démonstration. (du lemme 3.3.1) Soit (ρ,ϕ) la solution en coordoonnées polaires correspondante à la solution $\omega-$périodique P donnée par le théorème de la bifurcation de Hopf et (ρ^*,ϕ^*) celle correspondante à la solution x^* telles que $\rho(0)=\varepsilon$ et $\rho^*(0)=c$.
D'après l'équation (3.11), on obtient:

$$\begin{aligned}\|x^*(\omega^*)-P_0\| &= |\rho^*(2\pi)-\varepsilon| \\ &= |c-\varepsilon+G(\alpha,c)|\,.\end{aligned}$$

Par le développement de Taylor de $G(\alpha,c)$ au voisinage de $c=\varepsilon$, on obtient:

$$G(\alpha,c)=G(\alpha,\varepsilon)+(c-\varepsilon)D_cG(\alpha,\varepsilon)+\frac{1}{2}(c-\varepsilon)^2D^2_{cc}G(\alpha,\varepsilon+\nu(c-\varepsilon));$$

pour $\nu\in[0,1]$, et $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$.
D'après la relation (3.10), on a

$$G(\alpha,\varepsilon)=0,\ \text{pour}\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0).$$

Par différentiation de G par rapport à ε et comme $\alpha=\alpha(\varepsilon)$, on obtient:

$$\begin{aligned}D_cG(\alpha,\varepsilon) &= -\alpha^{'}(\varepsilon)D_\alpha G(\alpha,\varepsilon) \\ &= -\varepsilon\alpha^{'}(\varepsilon)D_\alpha \tilde{G}(\alpha,\varepsilon)\end{aligned}$$

où

$$\tilde{G}(\alpha,c)=\begin{cases}\frac{1}{c}G(\alpha,c), & \text{pour}\quad c\neq 0\\ \frac{\partial}{\partial c}G(\alpha,c), & \text{pour}\quad c=0\end{cases}$$

Posons

$$K(c,\varepsilon)=\frac{\alpha^{'}(\varepsilon)}{\varepsilon}D_\alpha \tilde{G}(\alpha,\varepsilon)-\frac{1}{2\varepsilon^2}(c-\varepsilon)D^2_{cc}G(\alpha,\varepsilon+\nu(c-\varepsilon))$$

Alors

$$G(\alpha,c)=-(c-\varepsilon)\varepsilon^2K(c,\varepsilon).$$

Dans ce qui suit, calculons

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon\to 0}}K(c,\varepsilon)$$

Proposition 3.3.3

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon\to 0}}K(c,\varepsilon)=\frac{\alpha^{''}(0)2\pi r^{'}(\alpha_0)}{\omega_0}>0$$

Démonstration. (du proposition 3.3.3) D'après la proposition 3.3.2 et les hypothèses du théorème 3.3.1, on a $\alpha^{'}(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ et $c - \varepsilon = o(\varepsilon^2)$.

Lemme 3.3.3

$$D_\alpha \widetilde{G}(\alpha,\varepsilon) \to \frac{2\pi r^{'}(\alpha_0)}{\omega_0} \quad quand \quad \varepsilon \to 0$$

Démonstration. D'après l'expression (3.11) de G , on a

$$G(\alpha_0,c) = \int_0^{2\pi} \frac{h_1(\alpha_0,\rho(s),s)}{\beta(\alpha_0) + h_2(\alpha_0,\rho(s),s)} ds$$

en divisant chaque terme par c et en faisant tendre c vers 0, on obtient:

$$\tilde{G}(\alpha_0,0) = 0.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\tilde{G}(\alpha_0,0) = \frac{2\pi r^{'}(\alpha_0)}{\omega_0}.$$

■

Du lemme 3.3.3, on a:

$$\frac{\alpha^{'}(\varepsilon)}{\varepsilon} D_\alpha \widetilde{G}(\alpha,\varepsilon) \to \alpha^{''}(0)\frac{2\pi r^{'}(\alpha_0)}{\omega_0} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

Le développement de Taylor de h_1 et h_2 au voisinage de $\rho = 0$ est donné comme suit :

$$\begin{aligned} h_1(\alpha,\rho,s) &= \rho^2 C_3(\alpha,s) + \rho^3 C_4(\alpha,s) + ... \\ h_2(\alpha,\rho,s) &= \rho D_3(\alpha,s) + \rho^2 D_4(\alpha,s) + ... \end{aligned}$$

où C_j et D_j sont des polynômes de degrée j par rapport à $\cos(s), \sin(s)$.

Par substitution dans la relation (3.10), on a

$$\begin{aligned} G(\alpha,c) &= \frac{1}{\beta(\alpha)} \int_0^\phi \Big[r(\alpha)\rho^* + \Big(C_3 - D_3^{'} r(\alpha)\Big) (\rho^*)^2 \\ &\quad + \Big(C_4 - C_3 D_3^{'} + r(\alpha)\Big((D_3^{'})^2 - D_4^{'}\Big)\Big) (\rho^*)^3 + ...\Big] \end{aligned} \tag{3.17}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \rho^*(\phi) &= c + \frac{1}{\beta(\alpha)} \int_0^\phi \Big[r(\alpha)\rho^* + \Big(C_3 - D_3^{'} r(\alpha)\Big) (\rho^*)^2 \\ &\quad + \Big(C_4 - C_3 D_3^{'} + r(\alpha)\Big((D_3^{'})^2 - D_4^{'}\Big)\Big) (\rho^*)^3 + ...\Big] ds \end{aligned} \tag{3.18}$$

où $D_j^{'} = \frac{1}{\beta(\alpha)} D_j$ pour chaque j.

De (3.18), on a:

$$\begin{aligned} D^2_{cc}G(\alpha,c) &= \frac{1}{\beta(\alpha)}\int_0^{2\pi} \Big[r(\alpha)D^2_{cc}\rho^* + \Big(C_3 - D_3^{'} r(\alpha)\Big) D^2_{cc}(\rho^*)^2 \\ &\quad + \Big(C_4 - C_3 D_3^{'} + r(\alpha)\Big((D_3^{'})^2 - D_4^{'}\Big)\Big) D^2_{cc}(\rho^*)^3 + ...\Big] ds. \end{aligned} \tag{3.19}$$

On déduit que

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon \to 0}} D_c\rho^* = 1;$$

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon \to 0}} D^2_{cc}(\rho^*)^2 = 2,$$

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon \to 0}} D^2_{cc}(\rho^*)^j = 0 \text{ pour } j \geq 3.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{c\to 0\\ \varepsilon \to 0}} D^2_{cc}G(\alpha,c) &= \frac{1}{\beta(\alpha_0)}\int_0^{2\pi} C_3(\alpha_0,s) D^2_{cc}(\rho^*)^2 ds \\ &= \frac{2}{\beta(\alpha_0)}\int_0^{2\pi} C_3(\alpha_0,s) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

(car C_3 est un polynôme en $(\cos(s), \sin(s))$ de degrée 3).

D'ou le résultat du proposition 3.3.3 ■

Par continuité de K, on déduit que :

$$K(c,\varepsilon) \geq K_1 > 0 \tag{3.20}$$

pour (c,ε) dans un voisinage de (0,0) où K_1 est une constante positive.

Pour c satisfaisant les hypothèses du lemme 3.3.1, la condition 3.20 est satisfaite, et on a,

$$\|x^*(\omega^*) - P_0\| \leq |c - \varepsilon|\, \varepsilon^2(1 - \varepsilon^2 K_1).$$

Ce qui complète la démonstration du lemme 3.3.1. ■

Démonstration. (du lemme 3.3.2) D'après les équations (3.7) et la première équation de (3.13), on obtient

$$x^{\#}(t) - P(t) = e^{B(\alpha)t}(x_0 - P_0) + \int_0^t e^{B(\alpha)(t-\tau)} \left[R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),z_\tau) - R_1(\alpha,P(\tau),0)\right] d\tau. \tag{3.21}$$

De l'expression de R_1 on a:

$$\begin{aligned}\left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),z_\tau) - R_1(\alpha,P(\tau),0)\right\| &\leq \left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),z_\tau) - R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),0)\right\|.\\ &+ \left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),0) - R_1(\alpha,P(\tau),0)\right\|\end{aligned} \tag{3.22}$$

D'après le théorème des accroissements finis on obtient :

$$\left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),z_\tau) - R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),0)\right\| \leq \left\|D_3R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),\theta z_\tau)\right\| \|z_\tau\| \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),0) - R_1(\alpha,P(\tau),0)\right\| &\leq\\ \left\|D_2R_1(\alpha,P(\tau) + \nu(x^{\#}(\tau) - P(\tau)),0)\right\| \left\|x^{\#}(\tau) - P(\tau)\right\|\end{aligned} \tag{3.24}$$

pour certains $\theta,\nu \in [0,1]$.

D'après les hypothèses du lemme 3.3.2, si $\varepsilon \to 0$, $(x_0,z_0) \to (0,0)$ et on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x^{\#}(t) = 0, \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0} z_t = 0.$$

Donc

$$x^{\#}(t) = o(1), \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ et } z_t = o(1), \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

On déduit que pour $0 \leq t \leq \omega_1$ on a:

$$\begin{cases} D_3R_1(\alpha,x^{\#}(t),\theta z_t) = o(1), \text{ quand } \varepsilon \to 0 \\ \text{et} \\ D_2R_1(\alpha,P(t) + \nu(x^{\#}(t) - P(t)),0) = o(1), \text{ quand } \varepsilon \to 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

D'après les relations (3.21) et (3.25), on obtient:

$$\|x^{\#}(t) - P(t)\| \leq M\left\{\|x_0 - P_0\| + o(1)\max_{0\leq\tau\leq t}\|x^{\#}(\tau) - P(\tau)\| + o(1)\max_{0\leq\tau\leq t}\|z_\tau\|\right\} \tag{3.26}$$

où $M = \sup\limits_{0\leq t\leq \omega_1} \|e^{B(\alpha)t}\|$.
D'après l'inégalité (3.26), on déduit

$$\|x^{\#}(t) - P(t)\| \leq M \left\{ \|x_0 - P_0\| + o(1) \max_{0\leq\tau\leq t} \|z_\tau\| \right\}$$

D'après la deuxième équation de (3.13), on a :

$$\|z_t\| \leq \|T_\alpha(t) z_0\| + \int_0^t \left\| d[K_\alpha(t,\tau)^S] R_2(\alpha, x^{\#}(\tau), z_\tau) \right\| .$$

Par application du théorème des accroissement finis on a:

$$\begin{aligned} \left\| R_2(\alpha, x^{\#}(\tau), z_\tau) \right\| &= \left\| R_2(\alpha, x^{\#}(\tau), z_\tau) - R_2(\alpha, x^{\#}(\tau), 0) \right\| \\ &\leq \left\| D_3 R_2(\alpha, x^{\#}(\tau), \theta z_\tau) \right\| \|z_\tau\| \end{aligned}$$

car $R_2(\alpha, x, 0) = 0$.

Alors

$$\|z_t\| \leq N \left\{ \|z_0\| + o(1) \max_{0\leq\tau\leq t} \|z_\tau\| \right\}. \tag{3.27}$$

où $N = \sup\limits_{0\leq t\leq \omega_1} = \|T_\alpha(t)\|$.
Posons $K_2 = sup(M,N)$, on déduit les inégalités:

$$\|x^{\#}(t) - P(t)\| \leq K_2 \left\{ \|x_0 - P_0\| + o(1) \max_{0\leq\tau\leq t} \|z_\tau\| \right\} \tag{3.28}$$

et

$$\|z_t\| \leq K_2 \|z_0\| \tag{3.29}$$

D'après les hypothèses du lemme 3.3.2, et les estimations (3.28) (3.29), on obtient i) et ii) du lemme 3.3.2.

Les équations (3.7) et la première équation de (3.13), impliquent,

$$\left\| x^{\#}(t) - x^*(t) \right\| \leq \int_0^t \left\| e^{B(\alpha)(t-\tau)} (R_1(\alpha, x^{\#}(\tau), z_\tau) - R_1(\alpha, x^*(\tau), 0)) \right\| d\tau. \tag{3.30}$$

Et par application du théorème des accroissement finis, on a l'inégalité,

$$\left\| R_1(\alpha, x^{\#}(\tau), z_\tau) - R_1(\alpha, x^*(\tau), 0) \right\| \leq \left\| D_3 R_1(\alpha, x^{\#}(\tau), \theta z_\tau) \right\| \|z_\tau\|$$

$$+\left\|D_2R_1(\alpha,x^*(\tau)+\nu(x^{\#}(\tau)-x^*_\tau),0)\right\|\left\|x^{\#}(\tau)-x^*(\tau)\right\|$$

pour, $\theta,\nu \in [0,1]$.

Proposition 3.3.4 *Il existe K_1' et K_2', telles que*

$$\left\|D_3R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),\theta z_\tau)\right\| \leq \varepsilon K_1^{'}$$

et

$$\left\|D_2R_1(\alpha,x^*(\tau)+\nu(x^{\#}(\tau)-x^*(\tau)),0)\right\| \leq \varepsilon K_2^{'}.$$

Démonstration. (du proposition 3.3.4) comme $x^{\#}$, z et x^* sont au moins d'ordre ε,.

Alors:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\|D_3R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),\theta z_\tau)\right\|$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\|D_2R_1(\alpha,x^*(\tau)+\nu(x^{\#}(\tau)-x^*(\tau)),0)\right\|$$

sont bornées. ■

D'après la proposition 3.3.4 et l'inégalité (3.30) on a:

$$\left\|R_1(\alpha,x^{\#}(\tau),z_\tau)-R_1(\alpha,x^*(\tau),0)\right\| \leq K^{''}\varepsilon\left[\max_{0\leq\tau\leq t}\left\|x^{\#}(\tau)-x^*(\tau)\right\|+\max_{0\leq\tau\leq t}\|z_\tau\|\right]$$

où $K^{''}=\max(K_1^{'},K_2^{'})$

et

$$\left\|x^{\#}(t)-x^*(t)\right\| \leq \varepsilon K_3\max_{0\leq\tau\leq t}\|z_\tau\| \text{ où } K_3 \text{ est une constante positive}$$

de cette dérniére inégalité et de l'estimation ii) du lemme 3.3.2, on obtient iii) du lemme 3.3.2. ■

Démonstration. (du théorème 3.6) i)-

$$\|x^{\#}(\omega^{\#})-P_0\| \leq \|x^{\#}(\omega^{\#})-x^*(\omega^{\#})\|+\|x^*(\omega^{\#})-x^*(\omega^*)\|+\|x^*(\omega^*)-P_0\|$$

Posons

$$(1)=\|x^{\#}(\omega^{\#})-x^*(\omega^{\#})\|,$$

$$(2)=\|x^*(\omega^{\#})-x^*(\omega^*)\|$$

et

$$(3) = \|x^*(\omega^*) - P_0\|$$

(1) et (3) sont estimés respectivement en utilisant le lemme 3.3.1 et le lemme 3.3.2. Pour estimer (2) nous avons besoin d'estimer $\left|\omega^\# - \omega^*\right|$.

Proposition 3.3.5

$$\left|\omega^* - \omega^\#\right| \leq \eta\theta K_2^{''}\varepsilon^3, K_2^{''} > 0.$$

Démonstration. (du proposition 3.3.5) Au voisinage du point de bifurcation, en coordoonnées polaire on a, $\frac{d}{dt}\phi \simeq \beta(\alpha_0)$ et $\frac{d}{dt}\rho = o(\rho)$.
D'où

$$C\|x_0\| \leq \|x^*(t)\| \leq C^{'}\|x_0\|,$$

et

$$\left|\frac{d}{dt}\phi\right| \geq C^{''},$$

pour $0 \leq t \leq \omega_1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $C, C^{'}, C^{''} > 0$ sont des constantes.
Soit

$$\begin{aligned}
\psi &= angle(x^\#(\omega^\#), x^*(\omega^\#)) \\
&= angle(x^*(\omega^*), x^*(\omega^\#)) \\
&= \phi^*(\omega^\#).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3.2 iii) et par application du théorème des accroissement finis, on a

$$\begin{aligned}
|\tan\psi| &= \tan\phi^*(\omega^\#) \\
&\simeq \frac{\|x^*(\omega^\#) - x^\#(\omega^\#)\|}{\|x^*(\omega^*)\|} \\
&\simeq |\ \phi^*(\omega^\#) - \phi^*(\omega^*)\ | \\
&= |\ \frac{d\phi^*(s)}{dt}\ ||\ \omega^\# - \omega^*\ | \\
&\leq \frac{\theta K_2\varepsilon^3\eta}{C},
\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation

$$\left|\omega^* - \omega^{\#}\right| \leq \eta\theta K_2^{''}\varepsilon^3.$$

■

En utilisant maintenant l'estimation

$$\left\|x^*(\omega^{\#}) - x^*(\omega^*)\right\| \leq \sup_{0<t<\omega_1}\left\|\frac{dx^*(t)}{dt}\right\|\left|\omega^* - \omega^{\#}\right|$$

et d'après le fait que $\|R_1(\alpha,x,0)\| = o(x)$ et la démonstration du claim 3.3.5, on obtient:

$$\left\|\frac{dx^*(t)}{dt}\right\| \leq C^{'}C^{'''}\varepsilon,$$

pour une constante $C^{'''}$. Du claim 3.3.5, on a:

$$\left\|x^*(\omega^{\#}) - x^*(\omega^*)\right\| \leq \eta\theta\varepsilon^4 K_4.$$

Pour obtenir i) du théorème 3.6, on choisit η assez petit tel que $K_2\eta < \frac{K_1}{4}$ (lemme 3.3.1 et lemme 3.3.2) et $K_4\eta < \frac{K_1}{4}$; on pose $K = \frac{K_1}{2}$, et on remplace (1), (2) et (3) par leurs estimations.

Du lemme 3.3.2, nous déduisons le second résultat ii). ■

Chapitre 4

Stabilité et bifurcation de Hopf dans un modéle d'hématopoïese

4.1 Introduction

Il existe diverses méthodes pour approximer des phénomènes biologiques par des outils mathématiques. Ces méthodes se sont développées et améliorées au cours du 20^{me} siécle et continuent à nous permettre de concevoir la réalité biologique de façon toujours plus fine et plus réaliste. La littérature mathématique compte désormais de nombreux modèles décrivant des problèmes aussi divers que la déscription de poisson (civelle, anchois,...) des épidémies (SIDA,...), les thérapies du cancer et du SIDA,....

Il existe différents modèles de dynamique de population cellulaire, tout dépend en fait de l'étude du type de population cellulaire que l'on effectue. Par exemple certaines maladies comme le développement incontrôlé de cellules dans le cas du cancer, ou bien l'attaque massive d'une population par des virus comme le SIDA, engendrent des comportements complétement différents suivant les cas de figure. c'est pourquoi tous les modèles de la dynamique de population cellulaire sont différents, et sont décrits selon l'observation que l'on fait.

Dans ce chapitre, nous traîtons un modèle de la dynamique de population et plus exactement un modèle de prolifération des cellules sanguines avec un seul retard. Nous étudions la stabilité des points d'équilibre en fonction du retard. Nous obtenons une branche de solutions périodiques bifurquées pour un modèle approché en considérant le retard comme paramètre de bifurcation (voir Talibi et Yafia [92]) et nous donnons un algorithme de calcul des éléments de la bifurcation (voir Talibi, Yafia et Aziz ALAOUI [94]).

4.2 Modèle mathématique

Plusieurs maladies Comme présenté dans le cycle cellulaire (voir Chapitre Introduction générale), après qu'une cellule entre dans la phase de prolifération, la cellule ne se divise qu'après un temps τ, le temps τ est composé de quatre phases: G_1 est la phase pre-synthétique, S phase synthétique de DNA , G_2 phase post-synthétique et M la phase de division. Après la division, chaque cellule entre dans la phase de repos G_0. Dans cette phase la cellule peut retourner pour proliférer et continue son cycle cellulaire ou mourir avant de terminer son cycle. Le modèle complet décrivant cette situation consiste de deux équations d'évolution (strcturé en âge) de réaction convection avec des conditions initiales et aux bords (voir [63, 64, 81, 66]). En utilisant la méthode des charactéristiques [100] ces équations se transforment en un système d'équations différentielles à retard (voir [?, 33, 63, 67, ?])

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N + 2e^{-\gamma\tau}\beta(N_\tau)N_\tau \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P + \beta(N)N - e^{-\gamma\tau}\beta(N_\tau)N_\tau \end{cases} \tag{4.1}$$

où β est une fonction décroisante vérifiant:

$$\lim_{x\to+\infty} \beta(x) = 0.$$

N est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de repos, $N_\tau = N(t-\tau)$, P est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de prolifération, γ le taux de mortalité des cellules proliférantes, δ le taux de mortalité des cellules non-proliférantes.

Ce modèle a été introduit par Mackey (voir [63, 64, 65, 6, 62, 33]), pour décrire certaines maladies périodiques comme anémie aplasique, les leucémie, ect. (voir [48, 49, 50, 13, 68, 99, 82, 32]).

Ce modèle a été étudié d'une façon intense par plusieurs auteurs, voir par exemple, [6, 17, 18, 31, 33, 63, 64, 67, 62, 79, 80] et la liste n'est pas exhaustive.

Pour l'étude numérique, nous trouvons Mackey (1978), (1997) [63, 67] et Fowler and Mackey, (2002) [33], etc.

Dans [63, 64] les auteurs ont montré que le modèle possède une bifurcation de Hopf en utilisant γ comme paramètre de bifurcation.

Dans [79], les auteurs ont étudié numériquement l'influence de chaque paramètre (τ,δ,γ,β_0 and n) sur les oscillations, voir [80]. Dans [80], les auteurs ont étudié le cas limite ($n = +\infty$) dans le but de donner une explicite forme des solutions, de la période et de l'amplitude des oscillations. Ils ont illustré ces résultats numériquement et l'influence des paramètres (τ,δ,γ,β_0 and n) sur l'amplitude. Dans cette étude les auteurs prend $n = 12$ est la meilleure valeur de coefficient de Hill, pour des valeurs plus grand de la valeur de n voir, [31, 17, 18, 80].

En générale il est constaté que le cycle cellulaire des cellules normales et les cellules malines se différe (Andersen and Mackey (2000) [6],Baserga (1981) [12]). En particulier, dans les leucémies non traités le taux de mortalité des celluls attaquéesγ est assez petit (Andersen and Mackey (2000) [6],Baserga (1981) [12]), et le tempsτ de prolifération est grand relativement aux cellules normales dans la moelle osseuse (Andersen and Mackey 2001) [6].

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'influence du retardτ sur le changement de la stabilité des points d'équilibre trivial et non trivial (dépendant du retard) du modèle (pour γ petit [6, 63, 64] i.e. le cas des leucémie non traitées) et l'existence d'une famille de solutions périodiques d'un modèle approché bifurquées à partir du point d'équilibre non trivial via le théorème de la bifurcation de Hopf. Enfin, nous donnons un algorithme explicite pour déterminer la stabilité da la branche bifurquée et la direction de la bifurcation. Notre étude est une étude analytique basée essentiellement sur la théorie des équations différentielles à retard.

4.3 Position d'équilibre et stabilité

On considère le système (4.1), dans lequel β (le taux d'entrée dans la phase de prolifération) est une fonction de Hill (voir [16, 31, 63, 72]) :

$$\beta(N) = \beta_0 \frac{\theta^n}{\theta^n + N^n} \tag{4.2}$$

où β_0 est le taux maximal d'entré dans la phase de prolifération, $\theta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

4.3.1 Stabilité pour le retard nul

Pour $\tau = 0$ le système (4.1) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N + \beta(N)N \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P \end{cases} \tag{4.3}$$

Théorème 4.3.1 *Supposant* $\delta \in (0,\beta_0]$. *Le système (4.3) possède un point d'équilibre non-trivial* $(N^*,0) = (\beta^{-1}(\delta),0)$ *qui est asymptotiquement stable, en plus du point trivial* $(0,0)$ *qui est instable.*

Démonstration. L'équation caractéristique de l'équation linéarisée de l'équation (4.3) autour du point d'équilibre $E^* = (N^*,0)$, possède deux racines, données par:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\delta + \alpha^{'}(N^*) \\ \lambda_2 &= -\gamma. \end{aligned}$$

où $\alpha(N) = \beta(N)N$ et $\alpha^{'}(N)$ sa dérivée au point N.

Comme β est décroissante, alors E^* est aymptotiquement stable.

Pour le point trivial $(0,0)$, les racines de l'équation caractéristique de l'équation linéarisé de l'équation (4.3) autour de (0,0) sont:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\delta + \alpha^{'}(0)\\ \lambda_2 &= -\gamma.\end{aligned}$$

Comme $\alpha^{'}(0) = \beta_0 > \delta$, (0,0) est instable. ∎

4.3.2 Stabilité pour le retard positive

Dans cette section, nous supposons que le retard $\tau > 0$, et nous montrons l'existence et la stabilité d'une branche de solutions stationnaires positives, dépendant continûment du retard.

Par les changements de variables suivants:

$$t \to \frac{t}{\tau}, \qquad u(t) = N(t\tau) \qquad \text{et} \qquad v(t) = P(t\tau),$$

le système (4.1) devient:

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = \tau[-\delta u(t) - \alpha(u(t)) + 2e^{-\gamma\tau}\alpha(u(t-1))] \\ \dot{v}\ (t) = \tau[-\gamma v(t) + \alpha(u(t)) - e^{-\gamma\tau}\alpha(u(t-1))] \end{cases} \tag{4.4}$$

où $\alpha(N) = \beta(N)N$.

Soit l'hypothèse suivante :

$(\mathbf{A_0})$:

$$0 < \tau < \overline{\tau}, \qquad \overline{\tau} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{2}{1+\frac{2\delta}{\beta_0}}\right).$$

Proposition 4.3.1 *On suppose que* $(\mathbf{A_0})$ *soit vérifiée. Alors, le système (4.4) possède un point d'équilibre non-trivial positive,*

$$E^*(\tau) = (u^*(\tau), v^*(\tau))$$

où

$$u^*(\tau) = \theta\left(\frac{\beta_0(2e^{-\gamma\tau}-1)-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

et

$$v^*(\tau) = \frac{\delta u^*}{\gamma}\left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{2e^{-\gamma\tau}-1}\right)$$

et le point d'équilibre trivial (0,0).

Démonstration. L'hypothèse $(\mathbf{A_0})$ implique que $\beta_0(2e^{-\gamma\tau}-1) > \delta$.

Les points d'équilibre du système (4.4) correspondent à

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = 0 \\ \dot{v}\ (t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} -\delta u - \alpha(u) + 2e^{-\gamma\tau}\alpha(u) = 0 \\ -\gamma v + \alpha(u) - e^{-\gamma\tau}\alpha(u) = 0 \end{cases}$$

comme $\beta_0(2e^{-\gamma\tau}-1) > \delta$ et β est une fonction strictement décroissante (inversible), il existe un seul point d'équilibre non trivial $E^*(\tau) = (u^*(\tau),v^*(\tau))$ avec :

$$u^*(\tau) = \theta\left(\frac{\beta_0(2e^{-\gamma\tau}-1)-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

et

$$v^*(\tau) = \frac{\delta u^*}{\gamma}\left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{2e^{-\gamma\tau}-1}\right)$$

■

L'équation linéarisée autour du point d'équilibre $E^*(\tau)$ est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = \tau[-\delta u(t) - \alpha^{'}(u^*)u(t) + 2e^{-\gamma\tau}\alpha^{'}(u^*)u(t-1)] \\ \dot{v}\ (t) = \tau[-\gamma v(t) + \alpha^{'}(u^*)u(t) - e^{-\gamma\tau}\alpha^{'}(u^*)u(t-1)] \end{cases} \tag{4.5}$$

La matrice caractéristique $M(\lambda,\tau)$ de l'équation (4.5) est obtenue en posant $u(t) = c_1e^{\lambda t}$ et $v(t) = c_2e^{\lambda t}$. Alors:

$$M(\lambda,\tau) = \begin{pmatrix} \lambda - \tau(\delta - \alpha^{'}(u^*)) + 2\tau e^{-\gamma\tau}\alpha^{'}(u^*)e^{-\lambda} & 0 \\ \\ \tau\alpha^{'}(u^*) - \tau e^{-\gamma\tau}\alpha^{'}(u^*)e^{-\lambda} & \lambda - \tau\gamma \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de l'équation linéaire (4.5) est donnée par:

$$\begin{aligned} W(\lambda,\tau) &= \det M(\lambda,\tau) \\ &= (\lambda+\tau\gamma)(\lambda-\tau a(\tau)-\tau b(\tau)e^{-\lambda}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $a(\tau) = -(\delta + \alpha^{'}(u^*))$,$b(\tau) = 2e^{-\gamma\tau}\alpha^{'}(u^*)$

et

$$\alpha^{'}(u^*) = \frac{\delta}{\beta_0(2e^{-\gamma\tau}-1)^2}\left[\beta_0(1-n)(2e^{-\gamma\tau}-1)+n\delta\right].$$

Comme $-\tau\gamma < 0$, la stabilité du point d'équilibre $E^*(\tau)$ est déduite de l'étude des racines de l'équation

$$\Delta(\lambda,\tau) = \lambda - \tau a(\tau) - \tau b(\tau)e^{-\lambda} = 0 \tag{4.7}$$

qui correspond à l'équation caractéristique associée à l'équation en u.

Pour chercher le changement de la stabilité de $E^*(\tau)$, on a besoin de chercher les racines purement imaginaire de l'équation (4.7).

Soit $\lambda = i\zeta$, alors

$$\Delta(i\zeta,\tau) = 0$$

si et seulement si

$$i\zeta - \tau a(\tau) - \tau b(\tau)e^{-i\zeta} = 0$$

si et seulement si

$$\begin{cases} b(\tau)\cos(\zeta) = -a(\tau) \\ \text{et} \\ \tau b(\tau)\sin(\zeta) = -\zeta. \end{cases}$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin(\zeta) &= \sqrt{1-\cos^2(\zeta)} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\right)^2}, \text{ si } 0 < |\frac{a(\tau)}{b(\tau)}| < 1, \end{aligned}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{c} \zeta = \arccos\left(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\right) \in (0,\pi) \text{ pour } 0 < \left|\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\right| < 1 \\ \text{et} \\ \tau\sqrt{b^2(\tau) - a^2(\tau)} = \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}), \text{ pour } 0 < \left|\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\right| < 1. \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Soit maintenant les hypothèses:

$(\mathbf{A_1})$:

$$a(\tau) < 0 \text{ et } |b(\tau)| < -a(\tau), \text{ pour tout } \tau > 0.$$

$(\mathbf{A_2})$:

$$\tau a(\tau) < 1 \text{ et } |a(\tau)| \leq |b(\tau)|.$$

Remarque 4.3.1 *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{A_0})$*,* $b(\tau) < 0$ *pour tout* $0 < \tau < \overline{\tau}$*.*

Théorème 4.3.2 *Supposons* $(\mathbf{A_0})$*. Alors :*

(1) *le point d'équilibre trivial* $(0,0)$ *est instable.*

(2) (i) *Si* a *et* b *vérifient* $(\mathbf{A_1})$*, alors* $E^*(\tau)$ *est asymptotiquement stable pour* $0 < \tau < \overline{\tau}$*.*

(2) (ii) *Si* a *et* b *vérifient* $(\mathbf{A_2})$*,* $n \geq 2$ *et* γ *proche de* 0*, il existe* τ_0 *dans* $(0,\overline{\tau})$ *tel que* $E^*(\tau)$ *est asymptotiquement stable pour* $\tau \in (0,\tau_0)$ *et instable pour* $\tau \in (\tau_0,\overline{\tau})$*.*

Démonstration. (1) : l'équation caractéristique de l'équation linéarisée de l'équation (4.4) autour de (0,0) est donnée par,

$$\lambda + \tau(\delta + \beta_0) - 2\tau e^{-\gamma\tau}\beta_0 e^{-\lambda} = 0 \tag{4.9}$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{A_0})$, on a $\beta_0(2e^{-\gamma\tau} - 1) > \delta$. On en déduit que l'équation (4.9) possède une racine réelle positive. Alors le point (0,0) est instable, pour tout $0 < \tau < \overline{\tau}$.

2) (i) soit $\lambda = \mu + i\nu$ une racine de l'équation (4.7) pour $0 < \tau < \overline{\tau}$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \mu - \tau a(\tau) - \tau b(\tau)e^{-\mu}\cos(\nu) = 0 \\ \\ \nu + \tau b(\tau)e^{-\mu}\sin(\nu) = 0 \end{array}\right. \tag{4.10}$$

On suppose qu'il existe une racine $\mu_0 \geq 0$ de (4.10). Alors

$$-a(\tau) \leq b(\tau)e^{-\mu_0}\cos(\nu).$$

Comme

$$-1 \leq \cos(\nu) \leq 1, \qquad 0 < e^{-\mu_0} < 1,$$

et

$$b(\tau) < 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < \tau < \overline{\tau}$$

on a

$$b(\tau) \leq a(\tau),$$

ce qui contredit l'hypothèse $(\mathbf{A_1})$.

Donc pour tout $0 < \tau < \overline{\tau}$, toutes les racines de l'équation caractéristique (4.7) sont à partie reélle négative et $E^*(\tau)$ est asymptotiquement stable.

Pour la démonstration de la stabilité dans 2) *(ii)*, on a besoin des lemmes suivants:

Lemme 4.3.1 *(Hale 1993 [46]) Toutes les racines de l'équation* $(z+c)e^z + d = 0$, *où* c *et* d *sont des réelles,sont à partie réelle négative si et seulement si*

(i) $c > -1$

(ii) $c + d > 0$

(iii) $\sqrt{d^2 - c^2} < \zeta$ *où* ζ *est la racine de l'équation*

$$\zeta = \begin{cases} -c\tan\zeta, 0 < \zeta < \pi, \; si\ c \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \qquad\qquad si\ c = 0. \end{cases}$$

Lemme 4.3.2 *Supposons* $(\mathbf{A_0})$ *et* $(\mathbf{A_2})$. *Pour* $n \geq 2$ *et* γ *voisin de* 0, *il existe une unique solution* τ_0 *de l'équation (4.7)*$_2$ *sur* $(0,\overline{\tau})$ *telle que* $i\zeta_0$ *est une racine purement imaginaire de l'équation (4.7)*$_1$, *avec* $\zeta_0 = \arccos(-\frac{a(\tau_0)}{b(\tau_0)})$. *De plus:*

$$\begin{cases} \tau\sqrt{b^2(\tau) - a^2(\tau)} < \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) \; pour\ \tau \in (0,\tau_0) \\ \\ \tau\sqrt{b^2(\tau) - a^2(\tau)} > \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) \; pour\ \tau \in (\tau_0,\overline{\tau}) \end{cases} \tag{4.11}$$

Lemme 4.3.3 *Soit la fonction* $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$; *définie par*

$$f(x) = \alpha \tan x, \qquad \alpha < 1 \qquad et \qquad \alpha \neq 0.$$

Alors f *possède un point fixe unique* $\zeta \in (0,\pi)$, *tel que:*
pour $0 < \alpha < 1$;

$$\begin{aligned} f(x) &< x \text{ si } x \in (0,\zeta) \cup (\frac{\pi}{2},\pi) \\ &et \\ f(x) &> x \text{ si } x \in (\zeta,\frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

et pour $\alpha < 0$;

$$\begin{aligned} f(x) &< x \text{ si } x \in (0,\frac{\pi}{2}) \cup (\zeta,\pi) \\ &et \\ f(x) &> x \text{ if } x \in (\frac{\pi}{2},\zeta). \end{aligned}$$

Preuve de (2) (ii) du théorème 4.3.2.
Il suffit de vérifier les trois conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 4.3.1. Les assertions (i) et (ii) proviennent de l'hypothèse $(\mathbf{A_2})$ en prenant $c = -\tau a(\tau)$ et $d = -\tau b(\tau)$. Pour (iii), soit $\tau \in (0,\tau_0)$ et $f(\zeta) = \tau a(\tau) \tan \zeta$. De la première équation de (4.11) on a:
Si $a(\tau) = 0$, la première inégalité de (4.11) devient $-\tau b(\tau) < \frac{\pi}{2}$, et (iii) est satisfaite.
Si $0 < \tau a(\tau) < 1$ ou $a(\tau) < 0$, comme

$$f\left(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})\right) = \tau\sqrt{b(\tau)^2 - a(\tau)^2},$$

La première de (4.11) implique que

$$f\left(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})\right) < \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}), \text{ avec } \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) \in (0,\pi).$$

Du lemme 4.3.3 et la graphe de f si ζ est le point fixe de f dans l'intervalle $(0,\pi)$, on a:

$$f\left(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})\right) < \zeta; \tag{4.12}$$

implique que

$$\sqrt{(\tau b(\tau))^2 - (\tau a(\tau))^2} < \zeta$$

Ce qui donne l'assertion (iii) du lemme 4.3.1 et achève la démonstration de la stabilité de $E^*(\tau)$ pour $0 < \tau < \tau_0$.

Pour prouver l'instabilité de $E^*(\tau)$ dans (2)-(ii), pour $\tau_0 < \tau < \overline{\tau}$, montrons que l'équation caractéristique (4.7) possède au moins une racine à partie réelle strictement positive.

On suppose que toutes les racines de l'équation (4.7) sont à parties réelles négatives pour $\tau_0 < \tau < \overline{\tau}$. Les assertions (i), (ii) et (iii) du lemme 4.3.1 sont alors vérifiées. De la deuxième équation de (4.11) et de (4.12), on a:

$$\begin{cases} f\left(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})\right) > \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) \\ \text{et} \\ f\left(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})\right) < \overline{\zeta} \end{cases}$$

Alors, du lemme 4.3.3 et le du graphe de f, on a:

$$\begin{cases} \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) < \overline{\zeta} \\ \text{et} \\ \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}) > \overline{\zeta}. \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Maintenant, supposons qu'il existe une racine de l'équation (4.7) à partie réelle nulle et que toutes les autres racines sont à parties réelles négatives. D'après la relation (4.8) et le lemme 4.3.2, on déduit que $\tau = \tau_0$, ce qui contredit l'hypothèse $\tau > \tau_0$.

Alors $E^*(\tau)$ est instable pour $\tau_0 < \tau < \overline{\tau}$ ■

Démonstration. (du lemme 4.3.2)

D'après les hypothèses $(\mathbf{A_0})$ et $(\mathbf{A_2})$, chercher une racine de la deuxième équation de (4.8) revient à chercher une racine de l'équation

$$\tau = -\frac{\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})}{b(\tau)\sin(\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}))}. \tag{4.13}$$

On pose

$$y(\tau) = \arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}),$$

et

$$F(\tau) = -\frac{y(\tau)}{b(\tau)\sin(y(\tau))}.$$

Comme $F(0) > 0$ pour $n \geq 2$ et $F(\overline{\tau}) < \overline{\tau}$ pour γ dans un voisinage de 0, la continuité de F implique qu'il existe au moins un $\tau_0 \in (0,\overline{\tau})$ tel que $F(\tau_0) = \tau_0$.

Pour l'unicité de τ_0, soit

$$g(\tau) = \tau - F(\tau).$$

Par différentiation par rapport à τ on a:

$$g^{'}(\tau) = 1 - \frac{y^{'}(\tau)b(\tau)\sin(y(\tau)) - y(\tau)b^{'}(\tau)\sin(y(\tau))}{(b(\tau)\sin(y(\tau)))^2}$$

$$-\frac{y(\tau)b(\tau)\cos((\tau))y^{'}(\tau)}{(b(\tau)\sin(y(\tau)))^2}$$

où

$$y^{'}(\tau) = -\sqrt{1-\left(\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\right)^2}\frac{a^{'}(\tau)b(\tau) - a(\tau)b^{'}(\tau)}{b^2(\tau)}.$$

D'après la définition de $a(\tau)$ et $b(\tau)$ on a:

$$\lim_{\gamma\to 0} b'(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\gamma\to 0} a'(\tau) = 0.$$

uniformément pour $\tau \in (0,\overline{\tau})$, Alors:

$$\lim_{\gamma\to 0} g^{'}(\tau) = 1 > 0$$

uniformément pour $\tau \in (0,\overline{\tau})$ et g est une fonction croissante sur l'intervalle $(0,\overline{\tau})$ pour γ au voisinage de 0.

On déduit que τ_0 est unique dans $(0,\overline{\tau})$. ∎

D'après le théorème 4.3.2, on ne peut pas déterminer ni la stabilité du point d'équilibre $E^*(\tau_0)$ ni l'existence d'une branche de solutions périodiques. Dans le reste de ce chapitre nous proposons un modèle approché du modèle (4.1) en fonction du valeur critique τ_0 du retard. Nous montrons le changement de la stabilité de $E^*(\tau_0)$ et l'existence d'une branche de solutions périodiques bifurquées à partir du point d'équilibre $E^*(\tau_0)$ du modèle approché. Enfin, nous donnons un algorithme de calcul des éléments de la bifurcation de Hopf pour déterminer la direction de la bifurcation et la stabilité de la branche de solutions périodiques bifurquées à partir du point d'équilibre non trivial $E^*(\tau_0)$.

Rappelons que, pour l'étude du problème de bifurcation de Hopf, le point d'équilibre doit être indépendant du paramètre de bifurcation (voir [46, 27]). Malheureusement ce qui n'est pas le cas pour notre système (4.1), où le point d'équilibre non trivial dépend du paramètre de bifurcation (retard) τ.

Pour remédier à ce problème, nous introduisons une approximation du modèle (4.1). Comme dans le théorème 4.3.2 (2) (ii) γ proche de 0 et n assez grand.

Soit $\tau - \tau_0 = \varepsilon$ petit, par developpement de Taylor, le système (4.4) s'écrit comme suit,

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = \tau[-\delta u(t) - \alpha(u(t)) + 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] - 2\gamma\varepsilon\tau_0 e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1)) + O(\gamma\varepsilon^2) \\ \\ \dot{v}\ (t) = \tau[-\gamma v(t) + \alpha(u(t)) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] - 2\gamma\varepsilon\tau_0 e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1)) + O(\gamma\varepsilon^2) \end{cases} \tag{4.14}$$

Pour γ et ε assez petit, $\gamma\varepsilon$ devient plus petit et aussi negligeable, et nous écrivons le système (4.14) sous la forme approximée comme suit:

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = \tau[-\delta u(t) - \alpha(u(t)) + 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] \\ \\ \dot{v}\ (t) = \tau[-\gamma v(t) + \alpha(u(t)) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] \end{cases} \tag{4.15}$$

4.4 Modèle approché et bifurcation de Hopf

4.4.1 Modèle approché

Dans ce qui suit nous montrons que le système suivant possède une bifurcation de Hopf en $\tau = \tau_0$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N + 2e^{-\gamma\tau_0}\beta(N_\tau)N_\tau \\ \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P + \beta(N)N - e^{-\gamma\tau_0}\beta(N_\tau)N_\tau \end{cases}$$

4.4.2 Position d'équilibre et stabilité

Comme précédemment, pour $\tau > 0$ ce système se ramène au système approximé (4.15) :

$$\begin{cases} \dot{u}\ (t) = \tau[-\delta u(t) - \alpha(u(t)) + 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] \\ \\ \dot{v}\ (t) = \tau[-\gamma v(t) + \alpha(u(t)) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha(u(t-1))] \end{cases} \tag{4.16}$$

avec $u(t) = N(t\tau)$, $v(t) = P(t\tau)$ et $\alpha(N) = \beta(N)n$

Le système (4.16) possède un unique point d'équilibre positive $E^* = (u^*,v^*)$, avec $u^* = u^*(\tau_0)$ et $v^* = v^*(\tau_0)$.

Par translation, on pose

$$z(t) = (u(t),v(t)) - (u^*,v^*),$$

le système (4.16) s'écrit dans l'espace $C := C([-1,0],\mathbb{R}^2)$ comme suit:

$$\dot{z}\ (t) = L(\tau)z_t + f_0(z_t,\tau) \tag{4.17}$$

où

$$L(\tau)\varphi = \tau \begin{pmatrix} -(\delta + \alpha'(u^*))\varphi_1(0) + 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha'(u^*)\varphi_1(-1) \\ \\ -\gamma\varphi_2(0) + \alpha'(u^*)\varphi_1(0) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha'(u^*)\varphi_1(-1) \end{pmatrix}$$

et

$$f_0(\varphi,\tau) = \tau \begin{pmatrix} -\alpha(\varphi_1(0) + u^*) + \alpha'(u^*)\varphi_1(0) - 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha'(u^*)\varphi_1(-1) \\ +2e^{-\gamma\tau_0}\alpha(\varphi_1(-1) + u^*) - \delta u^* \\ \\ \alpha(\varphi_1(0) + u^*) - \alpha'(u^*)\varphi_1(0) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha(\varphi_1(-1) + u^*) \\ +e^{-\gamma\tau_0}\alpha'(u^*)\varphi_1(-1) - \gamma v^*. \end{pmatrix}$$

pour tout $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in C$.

Soit:

$(\mathbf{A_3})$:

$$a(\tau_0) < \frac{1}{\overline{\tau}} \quad \text{et} \quad |a(\tau)| \leq |b(\tau)|, \quad \text{pour} \quad 0 < \tau < \overline{\tau}.$$

Théorème 4.4.1 *Supposant* $(\mathbf{A_0})$ *et* $(\mathbf{A_3})$*. Pour* $n \geq 2$ *et* γ *voisin de* 0, E^* *est asymptotiquement stable pour* $\tau \in (0,\tau_0)$ *et instable pour* $\tau \in (\tau_0,\overline{\tau})$*, où* τ_0 *est donné par le lemme 4.3.2.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à la démonstration du théorème 4.3.2 (2) (ii) ■

4.4.3 Bifurcation de Hopf

Dans cette section nous allons appliquer le théorème de bifurcation de Hopf pour montrer l'existence d'une branche de solutions périodiques non-triviales du système (4.16), en considèrant le retard comme paramètre de bifurcation.

Théorème 4.4.2 *Supposant* $(\mathbf{A_0})$ *et* $(\mathbf{A_3})$*. Pour* $n \geq 2$ *et* γ *voisin de* 0*, il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que: pour chaque* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$*, l'équation (4.16) possède une famille de solutions periodiques* $p(\varepsilon)$ *de période* $T = T(\varepsilon)$*, pour la valeur du paramètre* $\tau = \tau(\varepsilon)$ *telle que* $p(0) = E^*$, $T(0) = \frac{2\pi}{\zeta_0}$ *et* $\tau(0) = \tau_0$ *où* τ_0 *est donné par le lemme 4.3.2 et* $\zeta_0 = \arccos\left(-\frac{a(\tau_0)}{b(\tau_0)}\right)$.

Démonstration. Pour la démonstration, nous allons appliquer le théorème de bifurcation de Hopf (voir Hale 1993 [46]).

D'après l'expression (4.17) de f_0 , on a

$$f_0(0,\tau) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_0(0,\tau)}{\partial \varphi} = 0, \text{ pour tout } \tau > 0$$

L'équation caractéristique de l'équation linéarisée de l'équation (4.16) autour deE^* est donnée par:

$$\Delta_0(\lambda,\tau) = \lambda - \tau a(\tau_0) - \tau b(\tau_0) e^{-\lambda} = 0, \tag{4.18}$$

Soit $\lambda = i\zeta$.

D'après (4.8) et le lemme 4.3.2, on a:

$$\Delta_0(i\zeta,\tau) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \zeta_0 = \arccos\left(-\frac{a(\tau_0)}{b(\tau_0)}\right) \\ \text{et} \\ \tau = \tau_0 \end{cases}$$

avec τ_0 est unique dans $(0,\overline{\tau})$.

Alors l'équation caractéristique (4.18) possède deux racines conjuguées purement imaginaire $\lambda_0 = i\zeta_0$ et $\overline{\lambda}_0 = -i\zeta_0$ en $\tau = \tau_0$.

Montrons maintenant la condition de transversalité.

D'après l'équation (4.18),

$$\Delta_0(\lambda_0,\tau_0) = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta_0(\lambda_0,\tau_0) = 1 - \tau_0 a(\tau_0) + \lambda_0 \neq 0.$$

Par application du théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\lambda = \lambda(\tau)$ définie dans un voisinage de τ_0, telle que

$$\lambda(\tau_0) = \lambda_0, \qquad \Delta_0(\lambda(\tau),\tau) = 0$$

et

$$\lambda^{'}(\tau) \; = -\frac{\partial\Delta_0(\lambda,\tau)/\partial\tau}{\partial\Delta_0(\lambda,\tau)/\partial\lambda}, \text{ pour } \tau \text{ dans un voisinage de } \tau_0. \tag{4.19}$$

On pose

$$\lambda(\tau) = p(\tau) + iq(\tau).$$

D'après l'équation (4.19) et l'hypothèse $(\mathbf{A_3})$, on déduit que

$$p^{'}(\tau)_{/\tau=\tau_0} = \frac{\tau_0(b^2(\tau_0) - a^2(\tau_0))}{(1 + \tau_0 b(\tau_0)\cos\zeta_0)^2 + (\tau_0 b(\tau_0)\sin\zeta_0)^2}$$

et

$$p^{'}(\tau)_{/\tau=\tau_0} > 0.$$

4.4.4 Direction de la bifurcation de Hopf

Dans cette section on suit la méthode présentée par O. Diekmann [27], où la direction de bifurcation est obtenue par développement de Taylor de la function τ du paramètre de bifurcation au voisinage de la valeure critique τ_0 (voir théorème 4.4.2). Cette direction est determinée à partir du premier terme non nul du developpement de Taylor, i.e.

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 + \tau_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{4.20}$$

Si $\tau_2 > 0$ la bifurcation est supercritique et les orbites periodiques existent pour $\tau > \tau_0$.
Si $\tau_2 < 0$ la bifurcation est souscritique et les orbites periodiques existent pour $\tau < \tau_0$.
Le terme τ_2 peut être calculer (voir [27]) en utilisant la formule:

$$\tau_2 = \frac{Re(c)}{Re(qD_2M_0(i\zeta_0,\tau_0)p}, \tag{4.21}$$

ou

* M_0 est la matrice caractéristique de (4.17) donnée par:

$$M_0(\lambda,\tau) = \begin{pmatrix} \lambda - \tau a - \tau b e^{-\lambda} & 0 \\ \tau\alpha'(u^*)(-1 + e^{-\gamma\tau_0}e^{-\lambda}) & \lambda + \gamma\tau \end{pmatrix}, \text{ avec } a = a(\tau_0),\ b = b(\tau_0)$$

* $D_2M_0(i\zeta_0,\tau_0)$ est la dérivée de M_0 par rapport à τ au point critique $(i\zeta_0,\tau_0)$,

* la constante c est définie comme suit:

$$c = \frac{1}{2}qD_1^3f_0(0,\tau_0)(P^2(\theta),\overline{P}(\theta))$$

$$+qD_1^2f_0(0,\tau_0)(e^{0\cdot}M_0^{-1}(0,\tau_0)D_1^2f_0(0,\tau_0)(P(\theta),\overline{P}(\theta)),P(\theta))$$

$$+\frac{1}{2}qD_1^2f_0(0,\tau_0)(e^{2i\zeta_0\cdot}M_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0)D_1^2f_0(0,\tau_0)(P(\theta),P(\theta)),\overline{P}(\theta))$$

f_0 est le terme nonlinéaire de (4.17), $D_1^if_0, i = 2,3$ est la i-th dérivée de f_0 par rappor à φ.

On désigne par $P(\theta)$ le vecteur propre de A associé à la valeur propre $i\zeta_0$ et par $\overline{P}(\theta)$ le vecteur propre conjuqué.

Maintenant, donnons les expressions des opérateurs et des vecteurs intervenant dans l'expression de c de manière plus présise.

soit $L := L(\tau_0) : C([-1,0],\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le terme linéaire de (4.17). Par la théorème de representation de Riesz (voir [46]), on obtient:

$$L\varphi = \int_{-1}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta) \tag{4.22}$$

où

$$d\eta(\theta) = \tau_0 \begin{pmatrix} -(\delta + \alpha^{'}(u^*))\delta(\theta) + 2e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{'}(u^*)\delta(\theta+1) & 0 \\ \alpha^{'}(u^*)\delta(\theta) - e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{'}(u^*)\delta(\theta+1) & -\gamma\delta(\theta) \end{pmatrix} d\theta \tag{4.23}$$

δ est la fonction de Dirac.

Soit A le générateur du semigroupe associé à la partie linéaire de (4.17).

Alors

$$A\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta) \text{ pour } \theta \in [-1,0) \\ L\varphi \text{ pour } \theta = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

et son domaine

$$D(A) = \{\phi \in C : \frac{d\phi}{d\theta} \in C, \frac{d\phi}{d\theta}(0) = L\phi\},$$

Pour étudier la direction de la bifurcation de Hopf on a besoin de calculer les dérivées secondes et troisièmes de la partie nonlinéaire de (4.17):

$$D_1^2 f_0(\varphi,\tau)\psi\chi = \tau \begin{pmatrix} -\alpha^{"}(u^* + \varphi_1(0))\psi_1(0)\chi_1(0) \\ +2e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{"}(u^* + \varphi_1(-1))\psi_1(-1)\chi_1(-1) \\ \\ \alpha^{"}(u^* + \varphi_1(0))\psi_1(0)\chi_1(0) \\ -e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{"}(u^* + \varphi_1(-1))\psi_1(-1)\chi_1(-1) \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

et

$$D_1^3 f_0(\varphi,\tau)\psi\chi\upsilon = \tau \begin{pmatrix} -\alpha^{'''}(u^* + \varphi_1(0))\psi_1(0)\chi_1(0)\upsilon_1(0) \\ +2e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{'''}(u^* + \varphi_1(-1))\psi_1(-1)\chi_1(-1)\upsilon_1(-1) \\ \\ \alpha^{'''}(u^* + \varphi_1(0))\psi_1(0)\chi_1(0)\upsilon_1(0) \\ -e^{-\gamma\tau_0}\alpha^{'''}(u^* + \varphi_1(-1))\psi_1(-1)\chi_1(-1)\upsilon_1(-1) \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Alors

$$D_1^2 f_0(0,\tau_0)\psi\chi = \tau_0\alpha^{''}(u^*)\left[\psi_1(0)\chi_1(0)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\gamma\tau_0}\psi_1(-1)\chi_1(-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \tag{4.27}$$

et

$$D_1^3 f_0(0,\tau_0)\psi\chi\upsilon = \tau_0\alpha^{'''}(u^*)\left[\psi_1(0)\chi_1(0)\upsilon_1(0)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\gamma\tau_0}\psi_1(-1)\chi_1(-1)\upsilon_1(-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]. \tag{4.28}$$

$\psi = (\psi_1,\psi_2),\chi = (\chi_1,\chi_2),\upsilon = (\upsilon_1,\upsilon_2) \in C([-1,0],\mathbb{R}^2)$.

Comme $(i\zeta_0,\tau_0)$ est une solution de

$$W_0(\lambda,\tau) = (\lambda + \gamma\tau)\Delta_0(\lambda,\tau) = 0 \tag{4.29}$$

($\Delta_0(\lambda,\tau)$ est donnée par (4.18)), alors $i\zeta_0$ est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre de la forme $P(\theta) = pe^{i\zeta_0\theta}$ où les composantes $p_i,i = 1,2$ de p sont des nombres complexes vérifiant le système suivant :

$$Mp = 0$$

avec

$$M = M_0(i\zeta_0,\tau_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_0\alpha^{'}(u^*)(-1 + e^{-\gamma\tau_0}e^{-i\zeta_0}) & i\zeta_0 + \gamma\tau_0 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Alors on peut prendre

$$p_1 = 1,$$

et par simple calcul, on obtient:

$$p_2 = \tau_0\alpha^{'}(u^*)\frac{1 - e^{-\gamma\tau_0}e^{-i\zeta_0}}{i\zeta_0 + \gamma\tau_0}.$$

Maintenant on considère l'opérateur adjoint de A, $A^* : C^* := C([0,1],\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par:

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}(s) \text{ for } s \in (0,1] \\ -\int_{-1}^{0}\psi(-s)d\eta(s) \text{ for } s = 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

son domaine:

$$D(A^*) = \{\psi \in C^* : \frac{d\psi}{d\theta} \in C^*, \frac{d\psi}{d\theta}(0) = -\int_{-1}^{0} \psi(-\theta)d\eta(\theta)\},$$

Soit $Q(s) = qe^{i\zeta_0 s}$ le vecteur propre de A^* associé à la valeur propre $i\zeta_0$, $q = (q_1,q_2)^T$.

On choisit q tel que le produit de dualité (voir [46]):

$$< Q,\overline{P} >= Q(0)\overline{P}(0) - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} Q(\xi-\theta)d\eta(\theta)\overline{P}(\xi)d\xi$$

soit égale à 1.

En prenant

$$q_2 = 0$$

on obtient

$$q_1 = \frac{1}{1-\tau_0 a + i\zeta_0}.$$

De (4.27) et (4.28), on trouve:

$$D_1^2 f_0(0,\tau_0)(P(\theta),\overline{P}(\theta)) = \tau_0\alpha^{''}(u^*)\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\gamma\tau_0}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \tag{4.32}$$

$$D_1^2 f_0(0,\tau_0)(P(\theta),P(\theta)) = \tau_0\alpha^{''}(u^*)\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\gamma\tau_0}e^{-2i\zeta_0}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \tag{4.33}$$

et

$$D_1^3 f_0(0,\tau_0)(P^2(\theta),\overline{P}(\theta)) = \tau_0\alpha^{'''}(u^*)\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\gamma\tau_0}e^{-i\zeta_0}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]. \tag{4.34}$$

et

$$\frac{1}{2}qD_1^3 f_0(0,\tau_0)(P^2(\theta),\overline{P}(\theta)) = q_1\frac{\alpha^{'''}(u^*)}{2\alpha^{'}(u^*)}(i\zeta_0 + \tau_0\delta) \tag{4.35}$$

De l'expression de M_0 et de l'hypothèse ($\mathbf{A_3}$), on a

$$M_0^{-1}(0,\tau_0) = -\frac{1}{\gamma\tau_0(a+b)}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \alpha^{'}(u^*)(1-e^{-\gamma\tau_0}) & -(a+b) \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

et

$$M_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0) = W_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0)\begin{pmatrix} 2i\zeta_0 + \gamma\tau_0 & 0 \\ \tau_0\alpha^{'}(u^*)(1-e^{-\gamma\tau_0}e^{-2i\zeta_0}) & 2i\zeta_0 - \tau_0 a - \tau_0 b e^{-2i\zeta_0} \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

De (4.27),(4.32), (4.33),(4.36), (4.37) et ($\mathbf{A_3}$), on a:

$$qD_1^2 f_0(0,\tau_0)(e^{0\cdot}M_0^{-1}(0,\tau_0)D_1^2 f_0(0,\tau_0)(P(\theta),\overline{P}(\theta)),P(\theta)) = -q_1 \frac{\alpha''(u^*)^2}{\alpha'(u^*)(a+b)}(2e^{-\gamma\tau_0}-1)(i\zeta_0+\tau_0\delta) \tag{4.38}$$

et

$$\begin{aligned} &qD_1^2 f_0(0,\tau_0)(e^{2i\zeta_0\cdot}M_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0)D_1^2 f_0(0,\tau_0)(P(\theta),P(\theta)),\overline{P}(\theta)) \\ &= q_1\tau_0 \frac{\alpha''(u^*)^2}{\alpha'(u^*)}\Delta_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0)(i\zeta_0+\tau_0\delta)(2e^{-\gamma\tau_0}e^{2i\zeta_0}-1) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Alors

$$c = \frac{1}{2}q_1 \frac{i\zeta_0+\tau_0\delta}{\alpha'(u^*)}\left[\alpha'''(u^*) - 2\alpha''(u^*)^2 \frac{2e^{-\gamma\tau_0}-1}{a+b} + \tau_0\alpha''(u^*)^2\Delta_0^{-1}(2i\zeta_0,\tau_0)(2e^{-\gamma\tau_0}e^{-2i\zeta_0}-1)\right]$$

et

$$\begin{aligned} Re(c) = \frac{1}{2\alpha'(u^*)\left[(1-\tau_0 a)^2+\zeta_0^2\right]} &\left\{\left((1-\tau_0 a)\tau_0\delta + \zeta_0^2\right)\left(\alpha'''(u^*) - 2\alpha''(u^*)^2\frac{2e^{-\gamma\tau_0}-1}{a+b}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\tau_0\alpha''(u^*)^2 X}{\|\Delta_0(2i\zeta_0,\tau_0)\|^2}\right) - \zeta_0(1-\tau_0 a - \tau_0\delta)\frac{\tau_0\alpha''(u^*)^2 Y}{\|\Delta_0(2i\zeta_0,\tau_0)\|^2}\right\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

avec

$$X = (1-2e^{-\gamma\tau_0}\cos(2\zeta_0))(\tau_0 a + \tau_0 b\cos(2\zeta_0)) - 2e^{-\gamma\tau_0}\sin(2\zeta_0)(2\zeta_0 + \tau_0 b\sin(2\zeta_0))$$

$$Y = 2e^{-\gamma\tau_0}\sin(2\zeta_0)(\tau_0 a + \tau_0 b\cos(2\zeta_0)) + (1-2e^{-\gamma\tau_0}\cos(2\zeta_0))(2\zeta_0 + \tau_0 b\sin(2\zeta_0)).$$

Comme

$$Re(qD_2M_0(i\zeta_0,\tau_0)p) = \frac{b\zeta_0\sin(\zeta_0)}{(1-\tau_0 a)^2+\zeta_0^2} > 0,$$

on déduit le résultat suivant:

Théorème 4.4.3 *Soit $Re(c)$ donnée par (4.40). Alors*

(a) on a une bifurcation de Hopf quand τ passe par τ_0 vers la droite si $Re(c) > 0$ et vers la gauche si $Re(c) < 0$; et

(b) la solution periodique bifurquée est stable si $Re(c) > 0$ et instable si $Re(c) < 0$.

Notons que, la formule (4.40) donne un algorithme explicite pour determiner la direction et la stabilité de la bifurcation de Hopf.

4.5 Conclusions

Il est connu (Mackey (1997) [65]) quand on considère γ comme paramètre de bifurcation et on fait croître γ, on a une bifurcation de Hopf supercritique du système (4.1). Considèrons le retard τ comme paramètre de bifurcation le problème de bifurcation devient plus compliqué.

Dans [6] les conditions de stabilité du point d'équilibre non-trivial de (4.1) sont proposées $\mid \frac{a(\tau)}{b(\tau)} \mid > 1$ ou $\mid \frac{a(\tau)}{b(\tau)} \mid \leq 1$ et $\tau < \frac{\arccos(-\frac{a(\tau)}{b(\tau)})}{\sqrt{b(\tau)^2 - a(\tau)^2}}$ où $0 < \tau < \frac{1}{\gamma}\ln(\frac{2}{1+\frac{\delta}{\beta_0}}), \delta < \beta_0$.

Dans ce chapitre nous avons montré que si le taux de mortalité γ des cellules prolifé-rantes est plus petit et $n \geq 2$, alors le point d'équilibre $E^*(\tau)$ peut être stable pour $\tau = 0$ et aussi stable pour $0 < \tau < \tau_0$ et instable pour $\tau_0 < \tau < \overline{\tau}$, où $\overline{\tau} = \frac{1}{\gamma}\ln(\frac{2}{1+\frac{2\delta}{\beta_0}}), 2\delta < \beta_0$.

Mais en $\tau = \tau_0$ on ne peut donné aucun résultat de stabilité du point $E^*(\tau_0)$, a cause de la dépendance du point d'équilibre $E^*(\tau)$ du retard τ, ce qui rend l'étude de la bifurcation de Hopf plus difficile.

Dans le reste de ce chapitre, pour étudier la bifurcation de Hopf autour du valeur critique $\tau = \tau_0$, on a proposé un modèle approché (4.16) du modèle (4.1). Alors $E^*(\tau_0)$ est l'unique point d'équilibre non-trivial de (4.16) pour tout $0 < \tau < \overline{\tau}$, qui est stable pour $0 < \tau < \tau_0$ est instable pour $\tau_0 < \tau < \overline{\tau}$ et on a bifurcation de Hopf en $\tau = \tau_0$. $\blacksquare$

Perspectives

1)-D'après les travaux faites sur la bifurcation de Hopf, il existe différentes méthodes qui donnent le calcul des éléments de la bifurcation.

En utilisant la formule de variation de la constante exposé par Hale (1993), et en suivant la méthode adopté par O. Dieckmann, peut-on calculer les élément de la bifurcation de Hopf?

2)-determiner numériquement les valeurs de τ_0 et Rec.

3)-Etudier (par les mêmes techniques) le modèle structuré (soit par la taille, la maturité, l'âge, taille+âge,...). Par la moyennisation (Talibi+El Adnani) ramener l'étude au modèle non structuré.

4)-Poser le problème sur le système avec deux retards.

Bibliographie

[1] M. Adimy, *Bifurcation de Hopf Locale parSemigroupes Integrés*, C. R. Acad. Sci. Paris, t311, 423-428, 1990.

[2] M. Adimy and L. Pujo-Menjouet. *A Singular transport model describing cellular division.* C. R. A. S. Paris, t.322, série I,1-6, (2001).

[3] M. Adimy and L. Pujo-Menjouet. *Asymptotic behavior of a singular transport equation modelling cell division.* Disc. Cont. Dyn. Sys. ser. B3, 439-456, (2003).

[4] M. Adimy and L. Pujo-Menjouet. *A mathematical model describing cellular division with a proliferation phase duration depending on the maturity of cells.*(submitted).

[5] M. Adimy and F. Crauste. *Existence, positivity and stability for a nonlinear model of cellular proliferation .*

[6] L. K. Andersen and M. C. Mackey. *Resonance in Periodic Chemotherapy: A Case Study of Acute Myelogenous Leukemia.* J. theor. Biol.(2001) 209, 113-130.

[7] O.Arino, *Thése d'état*, Université of Bordeaux I, 1980.

[8] O. Arino et M. Kimmel, *Asymptotic Analysis of a Cell Model Based on Unequal Division*, SIAM J. Math., 47, 128-145, (1987).

[9] O. Arino et M. Kimmel, *Asymptotic Behavior of a nonLinear Functional-Integral equation of Cell Kinetics with Unequal Division*, Journal of Math. Biology, 27, 341-354, (1989).

[10] O. Arino et M. Kimmel, *Asymptotic Behavior of anonLinear Semigroup Describing a Model of Selective Cell Growth Regulation*, Journal of Math. Biology, 29, 289-314, (1991).

[11] O. Arino et M. Kimmel, *Comparison of Approches to Modeling of Cell Population Dynamics*, SIAM J. Math., 53, 1482-1504, (1993).

[12] R. Baserga, *The cell cycle*, New Engl. J. Med. 304 (1981) 453-459.

[13] J. Bélair, J. M. Mahaffy and M. C. Mackey, *Age structured and two delay models for erythropoiesis*, Math. Biosc. 128 (1995) 317-346.

[14] G. I. Bell et E. C. Anderson, *Cell Growth and Division. I. A Mathematical Model with Application to Cell Volume Distribution in Mammalian Suspension Cultures*, Biophys. J. 7, 329-351, (1967).

[15] , R. Bellman et Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, (1963).

[16] W. S. Bullough, *Mitotic control in adult mammalian tissues*, Biol. Rev. 50 (1975) 99-127.

[17] S. Bernard, B. Cajavec, L. Pujo-Menjouet, M. C. Mackey and H. Herzel, *Modeling transcriptional feedback loops : The role of Gro/TLE1 in Hes1 oscillations*, submitted to Biophys. J. (2004).

[18] H. Bolouri and E. H. Davidson, *Transcriptional regulatory cascades in developemnt : Initial rates, not steady state, determine network kinetics*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 100 (2003) 9371-9376.

[19] J. L. Carr, *Application of Center Manifolds Theory*, Springer-Verlag, New York, (1981).

[20] N. Chafee, *A Bifurcation Problem for Functional Differential Equation of Finitely Retarded Type.* J. Math. Ana. Appl. 35(1971), 312-348. MR 43, 3587.

[21] S. N. Chow et J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1982).

[22] S. N; Chow et J. Mallet Paret, *Integral Averaging and Bifurcation*,J. D. E, 26,112-159, 1977.

[23] J. M. Cushing, *Periodic Solutions of Two Species Interaction models with Lags*, (1977).

[24] J. C. F. De Oliveira et J. K. Hale, *Dynamic Behaviour from Bifurcation Equations*, Tóhoku Math. J., 32, 577-592, (1980).

[25] J. C. F. De Oliveira, *Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations*, Nonlinear Anal. T. M. A.,4, 217-229, (1980).

[26] O. Diekmann et S. A. Van Gils,*The Center Manifold for Delay Equations in the Light of Suns and Stars,Singularity Theory and it's Application, Part II (M. Roberts and I. stewart, eds)* , Lecture Notes, Vol.1463, Springer-Verlag, Berlin, pp.122-141, (1991).

[27] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel et H. O. Walther*Delay Equations: Functional, Complex, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1995).

[28] A. Diliddo, *A-S-R-I Vector Disease Model with Delay* , Pergamon Journals Ltd,Mathematical Modelling , 7,793-802, (1986).

[29] , L. E. El'sgol'ts et S. B. Norkin, *Introduction to the theory and Application of Differential Equations with deviating Arguments*, Mathematcs in science and Engineering, Vol. 105, Academic Press, (1973).

[30] T. Faria et M. L. Magalhaes, *Normal Form for Retarded Functional Differential Equations with Parameters and Applications to Hopf Bifurcation*, J. D. E, 122, 181-200, (1995).

[31] J. J. Ferrell, *Tripping the switch fantastic : How protein kinase cascade convert graded into switch-like outputs*, TIBS 21 (1996) 460-466.

[32] P. Fortin and M. C. Mackey, *Periodic chronic myelogenous leukemia : spectral analysis of blood cell counts and etiological implications*, Brit. J. Haematol. 104 (1999) 336-345.

[33] A. C. Fowler and M. Mackey, *Relaxation oscillations in a class of delay differential equations* SIAM. J. Appl. Math. 63, 299-323, (2002).

[34] A. G.Fredrickson, D. Ramkrishna, H. M. Tsuchiya, *Statistics and Dynamics of Procaryotic Cell Population*, Math. Biosc. 1, 327-374, (1967).

[35] L. Glass et M. Mackey, *Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems*, Science, 197, 287-289, (1977).

[36] M. E. Gurtin et R. MacCamy, *Nonlinear Age-dependant Population Dynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 54, 281-300, (1974).

[37] M. Gyllenberg, *Nonlinear Age-dependant Population Dynamics in Continously propagated Bacterial Cultures*, Math. Biosc., 62,45-74, (1982).

[38] M. Gyllenberg et H. J. A. M. Heijmans, *An Abstract Delay-Differential Equation Modelling Size Dependant Cell Growth and Division*, SIAM J. Math. Anal., 18, 74-88, (1987).

[39] M. Gyllenberg et G. F. Webb, *Age-size Structure in Population with Quiescence*, Mathematical Bioscience, 86, 67-95, (1987).

[40] M. Gyllenberg et G. F. Webb, *Quiescence as an Explanation of Gompertzian Tumor Growth*, Growth Development and Aging, 53,25-33, (1989).

[41] M. Gyllenberg et G. F. Webb, *A Nonlinear Structured Model of Tumor Growth with Quiescence*, J. Math. Biol., 28, 671-694, (1990).

[42] M. Gyllenberg et G. F. Webb, *Quiescence in Structured Population Dynamics*, Lecture Note in Pure and Applied Mathematics, Dekker,131, 45-62, (1991).

[43] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, (1969).

[44] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[45] J. K. Hale, *Flows on Center Manifolds for Scalar Functional Differential Equations*, Pro. Royal. Soc. Edinburgh, 101A, 193-201, 1985.

[46] J.K.Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional Differential equations.* Springer-Verlag, New-York, (1993).

[47] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff et Y. H. Wan, *Theory and Application of Hopf Bifurcation*, Combridge University Press, London Mathematical Society, Lecture notes Series 41, (1981).

[48] C. Haurie, D. C. Dale and M. C. Mackey, *Cyclical neutropenia and other periodic hematological disorders : A review of mechanisms and mathematical models*, Blood 92 (1998) 2629-2640.

[49] C. Haurie, D. C. Dale, R. Rudnicki and M. C. Mackey, *Mathematical modeling of complex neutrophil dynamics in the grey collie*, J. Theor. Biol. 204 (2000) 505-519.

[50] C. Haurie, D. C. Dale and M. C. Mackey, *Occurrence of periodic oscillations in the differential blood counts of congenital, idiopathic and cyclical neutropenic patients before and during treatment with G-CSF*, Exper. Hematol. 27 (1999) 401-409.

[51] M. H. Hbid, *Application à la méthode de Lyapunov à la Bifurcation d'équations à Retard*,

[52] H. J. A. M. Heijmans, *On the Stable Size Distribution ofPopulation Reproducing by Fission into Two Unequal Parts*, Mathematical Bioscience, 72, 196-50, (1984).

[53] H. J. A. M. Heijmans, *Structured Population, Linear Semigroup and Positivity*, Math. Z., 191, 599-617, (1986).

[54] E. Hopf, *Absweigung Einer Periodischen Lösung Eines Differential Systems*, Berichen Math. Phys. KI. Säch. Akad. Wiss. Leipzig,94, 1-22, (1942).

[55] L. N. Howard et N. Kopell, *Bifurcation Under nongeneric Conditions.* Advances in Math. 13(1974), 274-283.

[56] I. D. Hsu et H. D. Kazarinoff, *An Application Hopf Bifurcation Formula and Instability of Small Periodic Solutions of the Field Noyes Model*, J. for Math. and Appl.

[57] A. Kelley, *The Stable, Center-Stable, Center, Center-unstable, Unstable Manifolds*, J. Diff. Eqns., 3, 546-570, (1967).

[58] M. Kimmel, Z. Darzynkiewicz, O. Arino et F. Traganos, *Analysis of a Cell Cycle Model Based on Unequal Division of Metabolic Constituents to Daughter Cells During Cytokinesis*, J. Theor. Biol., 110,637-664, (1984).

[59] V. Lakhsmikantham et S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Academic Press, 2 (1969).

[60] A. Lasota et M. C. Mackey, *Globally Asymptotic Properties of Proliferating Cell Populations*, Journal of Math. Biology, 19,43-62, (1984).

[61] A. Leung, *Periodic Solutions for a Prey-Predator Differential Delay Equation*, J. D. E. 26,391-403, (1977).

[62] M. C. Mackey, *Cell Kenitec Status of Haematopoietic Stem Cells.* cell prolif. (2001), 34, 71-83.

[63] M. C. Mackey, *Unified Hypothesis of the Origin of Aplastic Anemia and Periodic Hematopoiesis*, Blood, 51, 941-956, (1978).

[64] M. C. Mackey, *Dynamic Haematological Disorders of Stem Cell Origin, Biophysical and Biochemical Information Transfer in Recognition*, 373-409, Eds. Vassileva-Propova J. G., Jensen E. V. New-york: Plenum Press, (1979).

[65] M. C. Mackey et J. G. Milton, *Feedback, Delays and the Origin of Blood Cell Dynamics*, Comm. Theor. Biol., 1, 299-327, (1990).

[66] M. C. Mackey and R. Rudnicki, *Global stability in a delayed partial differential equations describing cellular replication*, J. Math. Biol. 33 (1994) 89-109.

[67] M. C. Mackey, *Mathematical Models of Haematopoietic Cell Replication and Control. In: The Art of Mathematical Modelling: Case Studies in Ecology, Physiology and Biofluids* (Othmer, H. G., Adler, F. R., Lewis, M. A. and Dallon, J. C., eds), New York: Prentice-Hall (1997) 149-178.

[68] J. M. Mahaffy, J. Bélair and M. C. Mackey, *Hematopoietic model with moving boundary condition and state dependent delay*, J. Theor. Biol. 190 (1998) 135-146.

[69] J. E. Marsden et M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Application*, Applied Math. Sciences, Springer -Verlag New York, 19, (1976).

[70] H. Miyata, M. Miyata, M. Ito, *Cell Cycle in Fission Yeast, Schizoccharomyces Pombe, Ralationship between Cell Size and Cycle Time*,Cell Struct. Func., 3, 39-46, (1978).

[71] Nagel, *One-Parameter Semigroups of Positive Operators* Springer-Verlag, Berlin heidelberg New York Tokyo (1983).

[72] H. G. Othmer, F. R. Adler, M. A. Lewis and J. C. Dalton, eds., *The art of mathematical modeling : Case studies in ecology, physiology and biofluids*, Prentice Hall (1997).

[73] R. Ouifki, M. L. Hbid, O. Arino, *Attractiveness and Hopf bifurcation for ratrded differntial equations*, Communications on Pure and Applied Analysis, Volume: 2,

Number: 2, June (2003).

[74] P. G. Painter, A. G. Marr, *Mathematics of Microbial Population*, Ann. Rev. Microbiol., 22, 519-548, (1968).

[75] A. Pazy, *Semigroups of Linears Operators and Applications to Partial Differntial Equations.* Springer-Verlag New-York, (1983).

[76] A. B. Poore, *On the Theory and Application of the Hopf-Freidrichs Bifurcation Theory*, Archi. Rat. Mech. An.

[77] O. Polossuchin, *Über eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen*, Inaugural Dissertation, Zürich, (1910). (German).

[78] L. Pujo-Menjouet, *Contribution à l'étude d'une équation de transport à retards décrivant une dynamique de population cellulaire*, PhD Thesis, univ. de Pau et des Pays de l'Adour, France, (2001).

[79] L. Pujo-Menjouet and M. C. Mackey, *Contribution to the study of periodic chronic myelogenous leukemia*, C. R. Biologies (2003).

[80] L. Pujo-Menjouet, S. Bernard and M. C. Mackey, *Long period oscillations in a* G_0 *model of hematopoietic stem cells*, to appear.

[81] S. I. Rubinow and J. L. Lebowitz, *A mathematical model of neutrophil production and control in normal leukemia*, C. R. Biol. 1 (1975) 187-225.

[82] M. Santillan, J. M. Mahaffy, J. Bélair and M. C. Mackey, *Regulation of platelet production: The normal response to perturbation and cyclical platelet disease*, J. Theor. Biol. 206 (2000) 585-603.

[83] E. Schmidt, *Über eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen*, Math. Ann. 70 (1911), 499-524. (German)

[84] K. schumacher, *Hopf Bifurcation with Contraints*, Preprint, 1982.

[85] J. W. Sinko, W. Streifer, *A Model for Age-Size structure Population*, Ecology, 48, 910-918, (1967).

[86] O. Staffans, *Hopf Bifurcation for Functional and Functional Diferrential Equations with Infinite Delay* , J. D.E, 70, 114-151, (1987).

[87] H. Stech, *Hopf Bifurcation Calculations for Functional Differential Equations*, J. M. A. A, 1109,472-491, (1985).

[88] J. Swinburune and M. C. Mackey, *Cyclical thrombocytopenia : Characterization by spectral analysis and a review*, J. Theor. Med. 2 (2000) 81-91.

[89] H. Talibi Alaoui, *Supercritical Hopf Bifurcation, an Elementary Proof of Echange of Stability*, Facta Universitatis Journal (1995).

[90] H. Talibi Alaoui, *Contribution à l'étude du Problèmede Bifurcation de Hopf Locale dans le Cadre des équations différentielles avec Retard*, Thése d'état, Université Mohamed V Rabat, (1992).

[91] H.Talibi and A.Casal, *A perturbation approach to bifurcation branches periodic solutions for some functional differential equations.* Facta Univ. Ser. Math. Inform. 4 (1989), 27-43.

[92] H. Talibi and R. Yafia, *Stability and Hopf bifurcation in Heamatopoietic Stem Cells Model* , Electronic. J. Diff. Eqns. Conf. 11 (2004), pp. 167-173.

[93] H. Talibi and R. Yafia, *Supercritical Hopf Bifurcation in Delay Differential Equations, an Elementary Proof of Exchange of Stability* , soumis.

[94] H. Talibi, R. Yafia and M. Aziz Alaoui, *Dynamics and Hopf Bifurcation Analysis In a Delayed Haematopoietic Stem Cells Model*.

[95] L. Tavernini, *Numerical Methods for Volterra Functional Differential equations*, P.H.D. Thesis Univ. of Wisconsin, Madison,1969.

[96] A. Vanderbauwhede and G; Iooss, *Center manifold theory in infinite dimansions.* In: C. K. Johnes, U. Kirchgraber and H. O. Walter (Eds.), *Dynamics Reported: Expositions in Dynamical Systems* 1, pp. 125-163. Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[97] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, J. de Mathématiques 7 (1928), 249-298.

[98] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris (1931).

[99] J. Swinburune and M. C. Mackey, *Cyclical thrombocytopenia : Characterization by spectral analysis and a review*, J. Theor. Med. 2 (2000) 81-91.

[100] G. Webb, *Theory of nonlinear age-structured population dynamics*, vol. 89, of monographs and textbooks in Pure and Appl. Math. Series, Dekker (1985).

[101] G. F. Webb, A. Grabosh, *Asynchronous Exponentiel Growthin Transition Probability Models of the Cell Cycle*, SIAM J. Math. Anal., 18,897-908, (1987).