Applied Sciences *** **Monographs** # 6

Moulay Rchid SIDI AMMI

Mathematical study of several nonlinear problems from Physics and Industry

Etude mathématique de quelques problèmes non linéaires issus de la physique et de l'industrie

Geometry Balkan Press
Bucharest, Romania

Mathematical study of several nonlinear problems from Physics and Industry [Etude mathématique de quelques problèmes non linéaires issus de la physique et de l'industrie] (French)
Monographs # 6

Mathematical study of several nonlinear problems from Physics and Industry
[Etude mathématique de quelques problèmes non linéaires issus de la physique et de l'industrie]
(French)
Moulay Rchid SIDI AMMI
Bucharest: Applied Sciences * Monographs, 2007

Includes bibliographical references.

Etude mathématique de quelques problèmes non linéaires issus de la physique et de l'industrie.

Par

My. Rchid SIDI AMMI

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème communément appelé "problème du thermistor". De nos jours, l'industrie fait un large usage du chauffage électrique. Ce processus est basé sur la génération, dans une pièce conductrice, de courants électriques. L'ensemble des phénomènes se déroulant lors du chauffage est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles avec croissance quadratique en gradient.

L'étude mathématique de ce système, objet du présent travail, permet d'établir l'existence, et dans certains cas, l'unicité, d'une solution physiquement acceptable. Les résultats d'existence que nous obtenons au chapitre 3 découlent de l'application de méthode de point fixe de Schauder, combinée à des techniques de régularisation et de compacité de Lions.

A partir de considérations physiques, le système peut se réduire à une seule équation qui modélise le chauffage ohmique et le problème obtenu est parabolique et non local et est étudié au chapitre 4. Nous prouvons d'abord quelques résultats d'existence et d'unicité. Utilisant une approche des systèmes dynamiques, nous démontrons ensuite l'existence d'un attracteur compact. Au chapitre 5 on poursuit l'étude du problème parabolique non local et on propose une famille de schémas de discrétisation en temps du problème continu par un schéma de type Euler. On s'intéresse, à chaque pas de temps, à la résolution d'une équation elliptique non linéaire ; les conditions aux limites étant de type Dirichlet. Après avoir établi l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions du schéma semi-discrétisé, nous étudions le problème de la majoration de l'erreur. Finalement, l'étude du comportement asymptotique des solutions du problème semi-discrétisé via l'existence d'un attracteur global est obtenue.

Abstract

In this work, we are interested with the so-called thermistor problem. Recently, the electric heating has been extensively exploited in the industry. The whole proceeding phenomena, during the heating, are described by a system of non-linear partial differential equations with quadratical growth in the gradient.

In chapter 3, the mathematical study of this system allow us to obtain the existence and, in some cases, the uniqueness, of a physical admissible solution. The existence results ensues from the application of Schauder's fixed point theorem, associated with a regularization-troncature process together with the method of compacity of Lions.

On the other hand, the system can be reduced to a single, but still realistic non local parabolic equation, arising in Ohmic heating. In chapter 4, by using a dynamical systems approach, some existence and uniqueness results are proved and the existence of a compact attractor is shown. While, in chapter 5, the study of the corresponding non local parabolic problem is continued and a time discretization of the continuous problem by Euler forward scheme is presented. Then, a non linear elliptic problem has to be solved at each successive time point of a suitable time partition of the time interval. The boundary conditions are homogenous and of Dirichlet type. In addition to the standard existence, uniqueness and stability questions, we also address the problem of error estimate. Finally, the study of the long time behaviour of the solutions to the discrete problem is done and the existence of a compact attractor is obtained.

Notations et Conventions Utilisées

Notations générales pour le modèle

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, par $\partial\Omega$ le bord du domaine Ω et par $|\Omega|$ sa mesure.

On considère un intervalle de temps $]0; T[$ avec $T > 0$. On note par Q_T le cylindre ouvert de base Ω et de hauteur T :

$$Q_T = \Omega \times]0; T[,$$

et par S_T, la frontière latérale de cylindre :

$$S_T = \partial\Omega \times]0; T[.$$

Comme il s'agit d'un problème multidimensionnel, un point générique de $\mathbb{R}^N$ est noté par $x = (x_1, ..., x_N)$.

Soit h une fonction sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles et $e = (e_1, ..., e_N)$ une application de $\mathbb{R}^N$ dans lui même. On définit les opérateurs différentiels de la façon suivante :

$$\nabla h = (\frac{\partial h}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial h}{\partial x_N}),$$

$$\nabla . e = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} e,$$

$$\triangle h = \nabla . (\nabla h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla e).$$

Notations pour les grandeurs physiques

Les grandeurs physiques utilisées au cours de l'exposé sont définies la première fois qu'elles apparaissent. Par la suite, les notations suivantes sont respectées :

1. Pour les grandeurs liées à l'électromagnétisme :

$\overrightarrow{E}$:	Champ électrique.
j :	Densité de courant.
σ :	Conductivité électrique dans un conducteur.
ρ :	Densité de conducteur .

2. Pour les grandeurs liées à la thermique :

k :	Conductivité thermique dans un conducteur.
u :	Température dans un conducteur.
c :	Capacité thermique.

3. Pour les grandeurs physiques dépendantes d'une autre grandeur :

de façon générale, la dépendance est indiquée par les parenthéses contenant la (es) variable (s) de dépendance (s) :

$\sigma(u)$: Notation exprimant la variation par rapport à la température de la conductivité électrique.

$k(u)$: Notation exprimant la variation par rapport à la température de la conductivité thermique.

Chapitre 1

Motivation et position du problème

INTRODUCTION

Descriptions

Ce chapitre présente un modèle mathématique souvent connu sous le nom de thermistor (thermistance) décrivant le chauffage électrique d'un conducteur.

Les thermistors sont des appareils simples qui permettent de réguler la température. Ils sont basés sur le principe que leur conductivité éléctrique varie fortement en fonction de la température. Ils sont généralement composés de métaux oxydés tels que le manganese, nickel, cobalt, etc. Branchés en série avec un générateur, ils présentent une résistance variable, et se laissent donc traverser par un courant électrique également variable, en fonction de leur température et il se produit aussitôt un dégagement de chaleur. On distingue parmi les types de thermistors : les CTP(coefficient de température positif) et les CTN(coefficient de température négatif).

Le chauffage électrique remonte au début du siècle. Depuis, et avec l'apparition de nouveaux procédés industriels faisant intervenir ce type de chauffage, la théorie s'est développée et, de nombreux résultats et articles qui concernent ce phénomène sont publiés. Il fait partie de l'ensemble des techniques permettant la transformation directe de l'énergie électrique en énergie calorifique ; le corps à chauffer doit être un conducteur car le dégagement de chaleur résulte de l'effet de joule.

Les thermistors ont plusieurs applications d'intèrêt pratique notamment leur utilisation dans les systèmes de supervision, systèmes d'alarme, contrôle d'ouverture de portes, régulation de la température pour éteindre ou allumer le courant électrique, pour déclencher le ventilateur d'un automobile ou d'un ordinateur, etc...

Le paragraphe 1.1 donne la position du problème du thermistor associée à une large discussion ainsi que les motivations qui ont conduit à la réalisation de ce travail. Le paragraphe 1.2 présente le plan du présent document.

1.1 Position du problème et discussion

Cette partie présente un modèle mathématique décrivant le problème du thermistor (ou de thermistance). A partir des équations de la physique, nous construisons, sous certaines hypothèses, un couple d'équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution de la température et la conservation des charges électriques dans un conducteur. Le but est, ici, d'étudier un modèle multidimensionnel. Nous décrivons physiquement les phénomènes intervenant lors du chauffage électrique ; ce qui permet de mettre en évidence le couplage existant entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques et, de ce fait, le couplage qui doit exister entre les lois de l'électromagnétisme et de la thermique de notre formulation mathématique. Notre propos n'est pas, ici, l'établissement de ces lois mais leur utilisation pour obtenir, à travers différentes hypothèses, le modèle du thermistor qui fait intervenir deux équations aux dérivées partielles non-linéaires, une elliptique et l'autre parabolique. Nous donnons simplement les idées permettant d'établir ces équations. Pour des détails complémentaires, nous renvoyons le lecteur intéressé aux réferences [45, 3, 4].

Les problèmes concernant la combinaison du transfert de la chaleur et de courant sont considérés par Cimatti et Prodi [25], Cimatti [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], Howison, Rodrigues et Schillor [43], [13] et [14, 15] où différents aspects du problème du thermistor sont analysés. Dans de tels problèmes, la dépendance de la résistance électrique en fonction de la température fournit le couplage entre le problème de conduction de la chaleur et celui du potentiel électrique. Voyons comment sont obtenues les équations du modèle : si u est la température, φ le potentiel électrique et $\sigma = \sigma(u)$ est la conductivité électrique dépendante de la température, le taux d'énergie oú l'effet de joule ou ohmique s'est produit est égal à la résistivité électrique locale ρ multipliée par le carré de la densité de courant locale j. Bien que les résultats pratiques tiennent compte d'une complexité plus grande, on considère que la conductivité thermique est constante. La température u satisfait

$$u_t = \triangle u + \rho(u)|j|^2, \tag{1.1}$$

où l'on a aussi supposé que la densité et la chaleur spécifiques sont toutes les deux constantes. Par ailleurs, on permet à la résistivité, et par conséquent à la conductivité électrique $\sigma = \frac{1}{\rho}$, de varier significativement avec la température. Utilisant la loi d'Ohm, la densité de courant électrique à chaque point et à chaque instant est donnée par

$$j = -\sigma \nabla . \varphi, \tag{1.2}$$

et la quantité instantanée de la chaleur générée est donnée par la formule

$$-j \nabla \varphi = \sigma(u) |\nabla \varphi|^2,$$

où φ est le potentiel électrique.

On suppose que le temps de relaxation pour le potentiel est assez petit. Par conséquent, l'équation de conservation des charges électriques donne

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{1.3}$$

Cette relation est appelée encore équation de continuité.

En utilsant (1.2) dans (1.1) et (1.3), on obtient un système de deux équations, l'une parabolique décrivant la température, et l'autre elliptique pour le potentiel électrique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2, \\ \nabla.(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$\sigma(u)|\nabla\varphi|^2$ représentant la contribution de l'effet de joule.

Avec $|.|$ le module du vecteur $\nabla\varphi$, qui se calcule de la façon suivante :

$$|\nabla\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2.$$

Le modèle est à compléter avec une condition initiale et des conditions sur le bord pour la température et le potentiel électrique.

Ces problèmes proviennent pratiquement de plusieurs situations physiques, par exemple dans le cas d'un dispositif permetant de régulariser le courant électrique, (voir Fowler,1992 [37]), les fils électriques, les arcs électriques et les lumières fluorescentes. Suivant la nature du milieu conductif, la résistivité peut être une fonction croissante ou décroissante de la température mais peut aussi être non monotonne. Une étude détaillée du problème stationnaire associé à cette équation (permettant d'inclure la conductivité thermique k en compte) est faite par Cimatti (1989, 1990)[18, 24] (voir aussi Xie et Allegretto, 1991) [60].

Dans [37] Fowler a étudié le même problème avec symmetrie axiale, sous une condition au bord de type Robin, $u_n + \beta u = 0$, (refroidissement newotonien) sur le bord $\partial\Omega$ tout entier. Le dispositif est monté en série avec une résistance constante. Considérant la conductivité sous la forme $\sigma = \exp[-\frac{F(u)}{\epsilon}]$ avec $\epsilon \ll 1$, il prouve l'existence d'un état stationnaire. Une étude numérique est aussi faite dans le cas où β est petite. Le papier de Cimatti (1990) [24] donne l'existence d'un état stationnaire sous une condition de Dirichlet sur la température et avec le même circuit électrique que Fowler.

Le problème considéré dans [46] consiste en la première équation de (1.4) avec second membre nul, où l'existence et l'unicité de solutions faibles sont établies par une méthode des différences finies.

Les problèmes mathématiques relatives au problème du thermistor sont largement considérés dans un nombre important de travaux. Le problème dynamique est traité par Cimatti [17] dans le cas bidimensionnel. Notre résultat d'existence couvre ce cas et l'étend à toute dimension supérieure. Dans [18, 25], [37] et [43], différents aspects de modélisation, d'existence, d'unicité et de comportement asymptotique des solutions du problème stationnaire sont présentés.

Dans des cas d'intérêt pratique, σ est une fonction de température [45] donnée par $\sigma(u) = Au^c \exp(-\frac{B}{ku})$, où u désigne la température, A et B des quantités positives, k est la constante de Boltzmann et c est une constante réelle (Voir [16] pour d'autres formes de σ selon les applications industrielles). L'intérêt pratique de ce problème est dû à la présence de la croissance quadratique en gradient dans la non-linéarité. En général, une non-linéarité de cette nature rend difficile l'obtention de résultats de compacité et de régularité classique (absence d'estimations en espace de la température et d'estimations en temps du potentiel électrique). Plusieurs notions faibles de solutions sont développées pour étudier le système (1.4). Une notion de solution capacité est introduite par Xu dans [62]et dans [40] .

Dans certains dispositifs électriques, une trés haute température peut avoir des effets indésirables. Il est donc intéressant de savoir sous quelles conditions de σ on peut obtenir une température bornée. La difficulté d'établir le bornage de u est liée au fait que le système est quadratiquement non-linéaire et dégénéré. Le premier résultat de régularité est obtenu dans [5], où il est supposé que σ est au moins hôlderiènne et satisfait $m_1 \leq \sigma \leq M_1$ dans $\mathbb{R}$ pour certains $0 < m_1 \leq M_1$. On remarque que la deuxième équation du système est uniformément elliptique par rapport aux variables d'espaces. Cependant, dans plusieurs applications physiques, $\sigma(s) \to 0$ quand $s \to +\infty$. Ceci complique l'analyse mathématique du problème. Dans [66] , Xu obtient que u est holdériènne sous la condition $c_1 \exp(-\beta|s|) \leq \sigma(s) \leq c_2 \exp(-\beta|s|)$ sur $\mathbb{R}$; qui implique clairement que $\sigma(s) \to 0$ quand $s \to +\infty$.

Modèles non-locals.

Dans un second lieu, on considère le problème non-local suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\, dx\right)^2},$$

qui modélise la température lorsque un courant électrique se propage à travers un matériau avec résistivité électrique $f(u) > 0$ dépendante de la température, soumis à une différence de potentiel fixe.

On va considérer un cas spécial pour lequel les deux équations précédentes se ramènent sous forme d'une seule équation parabolique non-locale. Pour ce faire, On considére que Ω est un ouvert cylindrique ou sous forme de prisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que le bord est divisé en trois parties distinctes Γ_+, Γ_- et Γ_0. La surface courbée Γ_0 paralléle à l'axe des x est supposée électriquement isolée $u_n = \varphi_n = 0$ et les surfaces limites Γ_-, Γ_+ perpendiculaires à l'axe des x correspondent aux électrodes sur lesquelles $u = 0, \varphi = 0$ ou V. On désigne par (x, y, z) un point générique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que les solutions sont indépendantes des variables y et z : $\varphi = \varphi(x,t), u = u(x,t)$, pourvu que la condition initiale u de la température dépende au plus de x. On suppose que les positions des électrodes sont respectivement en $x = -1$ et $x = 1$. Les deux équations du système s'écrivent

$$u_t = u_{xx} + \sigma\varphi_x^2, \quad -1 < x < 1 \tag{1.5}$$

et

$$(\sigma\varphi_x)_x = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{1.6}$$

munies des conditions au bord

$$u = 0 \text{ en } x = \underline{+}1 \tag{1.7}$$

et

$$\varphi = 0 \text{ en } x = -1, \tag{1.8}$$

$$\varphi = V \text{ en } x = +1. \tag{1.9}$$

Intégrant (1.6), on obtient

$$\sigma\varphi_x = J(t) = \frac{I(t)}{A}, \tag{1.10}$$

où I est le courant électrique total passant à travers le dispositif (i. e. le long de toute section traversée) et A est l'aire de la section traversée. Substituant (1.10) dans (1.5) on a, pour $-1 < x < 1$,

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{I^2(t)}{A^2\sigma} \\ &= u_{xx} + \frac{I^2\rho(u)}{A^2}. \end{aligned}$$

Si le courant est supposé constant, on obtient le problème semi-linéaire standard

$$u_t = u_{xx} + \lambda\rho(u), -1 < x < 1,$$

avec $\lambda = \frac{I^2}{A^2}(\lambda \geq 0)$.

D'autre part, si la différence du potentiel est fixée, on a

$$V = \int_{-1}^{1} \varphi_x dx = \frac{I}{A}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sigma(u)}$$

ou

$$I = \frac{AV}{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sigma(u)}}.$$

Ce qui donne

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\rho(u)}{[\int_{-1}^{1} \rho(u)dx]^2}, -1 < x < 1,$$

en posant $\lambda = V^2(\geq 0)$.

Plus généralement, supposant que le dispositif fait partie d'un simple circuit en série avec une autre résistance R sous un voltage constant E, on a :

$$E = IR + V = I(R + \int_{-1}^{1} \rho \frac{dx}{A})$$

et le problème devient

$$u_t = u_{xx} + \frac{\rho(u)}{[a + b\int_{-1}^{1} \rho(u)dx]^2}, -1 < x < 1, \tag{1.11}$$

pour a, b des constantes positives.

Dans chacune de ces situations on suppose (pour simplifier) la condition aux limites (1.7) : $u = 0$ en $x = \pm 1$.

Le problème (1.11), (1.7), pour un courant fixé, est susceptible d'aboutir au phénomène d'explosion en temps fini "blow-up" dans le cas de ρ une fonction croissante suffisamment rapide (une température croissante permet une diffusion plus rapide de la chaleur à travers une grande résistance, voir Fujita (1969) [38] ou lacey (1983) [47]). Contrairement, le problème à voltage fixé (1.11), (1.7) suggère si V est constant, le blow-up (thermal run way) de la température peut se produire si ρ est suffisamment à décroissante rapide (si le courant électrique est élevé et la conductivité est bonne, la température croit plus vite).

Dans [12],Chafee considère le modèle suivant,

$$u_t = u_{xx} + \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_{-1}^{1} f(u)\,dx\right)^2} - g(u),$$

relatif à la température d'une résistance soumise à une différence de potentiel. Le terme forcé de stabilisation g, figurant au second membre représente le refroidissement (cooling) et vérifie $g' > 0, \quad g" \geq 0$ et $g(0) = 0$. Le bord est pris thermiquement isolé : $u_n = 0$ en $x = \underline{+}1$. Il prouve l'existence de certaines valeurs $\lambda * > 0$ tel que pour $\lambda < \lambda *$, l'état stationnaire est globalement asymptotiquement stable. Cependant, il y a des cas où la solution du problème stationnaire homogène est unstable.

Prenant notre conducteur lié entre $x = \underline{+}1$ avec $u = \varphi = 0$ en $x = -1$, $u = 0$ et $\varphi = V$ en $x = 1$, mais supposant maintenant que le dispositif est tel que $y^2 + z^2$ est assez grand sur le bord courbé. On néglige les effets de bord, u et φ sont encore indépendants de y et z et on retrouve le modèle antérieur. On suppose encore que le conducteur est cylindrique ou sous forme de prisme, maintenant avec des axes paralléles à la z-direction et que ces limites sont à $z = 0, L$ où $\varphi = 0, V$, respectivement. La base de cylindre est $D((x, y) \in D$ si $u(x, y, z) \in \Omega)$ avec le diamétre de D est plus petit que L. Sur la surface courbée, $(x, y) \in \partial D$, on a $\varphi_n = 0$ (isolé électriquement) et $u = 0$. La dernière condition de la température peut aisément être remplacée par une autre forme différente, non nécessairement la même en tout point de ∂D.

De $z = 0$ à L on néglige les effets de bord et on a $(\sigma\varphi_x)_x + (\sigma\varphi_y)_y = 0$ dans D. Appelant la condition sur le bord $\varphi_n = 0$ on voit que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 0$ dans D et φ dépend seulement de z et t. On a $(\sigma\varphi_z)_z = 0$, et $\sigma\varphi_z$ dépend alors seulement du temps et

$$\int_D \sigma\varphi_z dxdy = I(t)/A$$

avec I et A sont comme précédément $(A = |D|)$. Donc

$$\varphi_z = I/A \int_D \sigma dxdy$$

varie seulement avec le temps.

D'où

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sigma(u)\varphi_z^2$$

et u est indépendante de z. En supposant que la température est initialement indépendante de la position le long du conducteur ; il s'ensuit que u est aussi varie en fonction de x, y et t.

Soit $\triangle$ le laplacien en deux dimensions et supposant que I est fixé, on obtient

$$u_t = \triangle u + \lambda\sigma(u)/[\int_D \sigma(u)\, dx]^2 \quad \text{pour } x \in D,$$

avec la condition au bord

$$u = 0, \text{ sur } \partial D.$$

Ici $\lambda = I^2/A^2 (\geq 0)$.

Fixant désormais le voltage V, on a $\varphi_x = V/L$ et

$$u_t = \triangle u + \lambda\sigma(u) \quad x \text{ dans } D,$$

où maintenant $\lambda = V^2/L^2 (\geq 0)$.

Finalement, supposant que le conducteur est connecté en série avec une résistance R à travers un voltage constant E . Alors,

$$E = RI + V = (I + RA \int_D \sigma dx/L)V$$

d'où

$$u_t = \triangle u + \lambda\sigma(u)/[a + b \int_D \sigma(u)\, dx]^2 x \text{ dans } D,$$

pour certaines constantes positives a et b.

1.2 Plan du mémoire

Ce document est composé de six chapitres. Chaque chapitre est composé de plusieurs sections dans lesquelles nous développons les différents aspects du sujet chapitral, et précédé d'une introduction détaillée.

Aprés l'introduction, nous trouverons, au chapitre 2, un rappel de quelques résultats, lemmes, théorèmes et définitions que nous utiliserons dans toute la suite du mémoire.

Le chapitre 3 concerne l'analyse du modèle général lié au thermistor, formellement décrit par le système suivant :

trouver le couple (u, φ) vérifiant les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle\theta(u) = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 \quad u(0) = u_0, \\ \operatorname{div}(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{ dans un cylindre } Q_T = \Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{1.12}$$

associées à des conditions de bord mixtes selon un certain partitionnement de la frontière de Q_T.

Une carartéristique essentielle d'un tel système est le terme de diffusion dégénéré au sens de J. L. Lions [51], lorsque l'inconnue u atteint certains seuils (en général, les valeurs extrémales admissibles). On sait que les équations paraboliques non linéaires dégénérées ont fait l'objet de trés nombreux travaux théoriques, dûs notamment à J. L. Lions [51].

Le résultat d'existence d'une solution physiquement admissible obtenu découle de l'application de la méthode du point fixe dans le cadre hilbertien séparable, associée à des techniques de régularisation, de monotonie et de compacité. L'unicité de solutions faibles est établie au prix d'une condition supplémentaire : $\nabla\varphi \in L^\infty(\Omega)$.

Un effet rédhibitoire à l'obtention de résultats généraux d'unicité pour les solutions du système provient de la difficulté d'obtenir des propriétés de régularité assez fines pour le potentiel électrique, régi par l'équation elliptique.

L'ensemble des résultats énoncés ci-dessus et détaillés dans ce chapitre ont été d'abord communiqués dans les troisièmes Journées Internationales des Equations aux Dérivées Partielles, abritées par la Faculté Dhar Mehraz de Fès, à CIMASI 2002 [1] à Casablanca et ont fait l'objet d'une publication [32] dans Electronic Journal of Differential Equations.

Le chapitre 4 est entièrement consacré à une étude analytique approfondie des équations non locales de type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\, dx \right)^2}, \quad u(0) = u_0, \tag{1.13}$$

cette équation est, après hypothèses simplificatrices, obtenue en réduisant le système (1.12) .

Dans sa forme générale, le problème (1.13) reste réel et trouve son origine dans plusieurs domaines de la physique essentiellement liés au chauffage électrique.

On dégage des hypothèses suffisantes qui assurent que le problème est bien posé au sens où l'on dispose d'un résultat d'existence et d'unicité.

Par ailleurs, les attracteurs jouent un rôle important dans l'étude du comportement asymptotique de certains systèmes dynamiques régis par des équations aux dérivées partielles dites dissipatives.

L'existence d'un attracteur maximal qui attire toutes les trajectoires quand le temps devient trés grand a été démontrée pour divers types d'équations telles que les équations de Naviers-Stockes ou les équations de réaction-diffusion par R. Temam notamment cf [57].

Utilisant une approche des systèmes dynamiques cf [57], on s'attache à étudier

[1] Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur

certaines propriétés descriptives des solutions : régularité des solutions et existence d'un attracteur maximal $\mathbb{A}$ pour le problème (1.13) : conséquences de l'existence d'un semi-groupe associé à (1.13) et sous des hypothèses particulières.

La preuve de la compacité de $\mathbb{A}$ est basée sur l'estimation $L^{\infty}(\Omega)$ et la régularité de la solution unique du problème (1.13). De plus l'existence d'ensembles absorbants est liée au caractère dissipatif de (1.13), ce qui assure, avec la stabilité non linéaire, l'existence d'un atracteur maximal $\mathbb{A}$ (pour l'inclusion parmi les ensembles invariants). $\mathbb{A}$ décrit de façon complète le comportement asymptotique des solutions de (1.13).

Les principaux résultats mentionés ci-dessus et détaillés dans le chapitre 4, ont fait l'objet d'une communication orale lors des Journées de Mathématiques à la mémoire du Professeur Ovide Arino, organisées par la faculté Semlalia de Marrakech et sous la forme d'un projet d'article [33] soumis pour publication.

Ensuite, le chapitre 5 offre un prolongement à l'étude du problème (1.13) dans une direction différente que celle initiée ou présentée dans le chapitre précédent. Plus précisément, on propose d'étudier la discrétisation temporelle du problème continu (1.13) par un schéma de type Euler de la forme :

$$(\mathbb{D}_{\tau}^{n}) \qquad \begin{aligned} U^n - \tau \triangle U^n &= U^{n-1} + \lambda\tau \frac{f(U^n)}{\left(\int_\Omega f(U^n)\,dx\right)^2}, \ \text{dans } \Omega, \\ U^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ U^0 &= u_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$, $N\tau = T, T > 0$ (fixé) et $1 \leq n \leq N$.

On adopte la même démarche que dans [27]. On commence par étudier l'existence et l'unicité des solutions de $(\mathbb{D}_{\tau}^{n})$ par analogie avec le problème continu. Puis on s'intéresse à la question de stabilité du schéma. Ensuite on discute le problème de la majoration de l'erreur et on étudie finalement le comportement asymptotique des solutions du problème semi-discrétisé par l'analyse de l'existence d'attracteur global discret.

Les principaux résultats mentionés ci-dessus et détaillés dans le chapitre 5 ont été d'abord communiqués sous forme de poster au premier Colloque International de Mathématiques Appliquées à l'Industrie et la Physique organisé par la faculté des Sciences d'El Jadida puis au Colloque International des Problèmes non Linéaires en Mécanique (Fès) et présentés sous la forme d'un projet d'article [34] soumis pour publication.

Le dernier chapitre donne la conclusion du présent travail. Il comprend à la fois, les principaux résultats obtenus, les améliorations pouvant être apportées à l'étude du problème du thermistor et les perspectives concernant le présent travail.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Introduction générale

Les notations générales ainsi que les lemmes qui suivent seront constamment utilisés dans les chapitres à venir.

2.2 Principales notations et conventions

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega, T$ un réel strictement positif et Q_T représente le cylindre $\Omega\times]0, T[$.

2.3 Espaces de Sobolev

On désigne par (u, v) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e

$$(u, v) = \int_\Omega uv\, dx.$$

$L^p(\Omega)$= espace des fonctions de puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure $dx = dx_1 ... dx_N$.

On fera constamment usage des espaces de Sobolev et pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$ on définit $W^{m,p}(\Omega)$, cf. par exemple [1], par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega); 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où

$$D^\alpha u(\Omega) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \in L^p(\Omega),$$

avec $\sum_{i=1}^N \alpha_i = k$, dérivée au sens des distributions.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_p^p\}^{\frac{1}{p}};$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ est l' adhérence de l' ensemble $D(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω, dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Rappelons que si $p > 2$ et Ω est borné, l' injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, cf [1].

2.4 Espaces associés au problème d' évolution.

De façon générale, si X est un espace de Banach séparable et $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $L^p(0, T, X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \to f(t)$ de $]0, T[\to X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que :

$$\{\int_0^T |f(t)|_X^p\}^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} \|f\|_{L^p(0,T,X)} < \infty, & \text{si } 1 < p < \infty \\ ess\sup |f|_X = \|f\|_{L^\infty(0,T,X)} & < \infty, \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

Naturellement

$$L^p(0, T, L^p(\Omega)) = L^p(Q_T).$$

2.5 Lemmes utiles en Analyse non linéaire

On rappelle en premier lieu l'énoncé de divers théorèmes de point fixe de Schauder souvent utilisés pour établir un résultat d'existence en analyse fonctionnelle non linéaire. Inversant l'ordre chronologique, on fait référence d'abord au

Théorème 2.5.1 *(Kakutani, Ky fan et Glicksberg(1941,1952)).*

Soient

i) K un ensemble convexe, compact non vide d'un espace vectoriel topologique X, localement convexe séparé,

ii) T une application multivoque de $K \to 2^K$, semi-continue supérieurement, et on suppose que, pour tout x de K,

iii) l'ensemble $T(x)$ est non vide, fermé et convexe.

Alors, T a un point fixe.

Dans le cas des applications, un aspect particulier de ce résultat fait l'objet du

Théorème 2.5.2 *(Tikhonov 1935).*

Soit $T : K \subseteq X \to K$ une application continue laissant invariant l'ensemble K non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel topologique X localement convexe séparé.

Alors, T admet un point fixe dans K.

Dans le cadre hilbertien séparable, muni de la topologie faible, la mise en oeuvre d'une stratégie du point fixe se simplifie notablement lorsqu'il s'agit de vérifier la propriété de continuité de l'application T, puisque dans un espace de Banach dont le dual E' est séparable, la boule unité est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$ (cf., par exemple, H. Brézis [9], théorème III.25, p. 50).

Cela fait l'objet du

Théorème 2.5.3 *(Schauder 1927).*

Soit X un espace de Banach séparable et réflexif.

On suppose que :

(i) K est un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X.

(ii) l' application $T : K \to K$ est faiblement-faiblement séquentiellement continue, c' est-à -dire que pour toute suite (x_n) de K convergeant faiblement vers x, lorsque $n \to +\infty$, la suite $(T(x_n))$ converge faiblement vers $T(x)$.

Alors, T admet au moins un point fixe dans K. $\square$

Preuve. L'espace de banach X, muni de la topologie faible $\sigma(X, X')$ est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (cf. H. Brézis [9], propositions III.3, III.4). Puisque X' est séparable, l'ensemble borné K est métrisable pour la topologie $\sigma(X, X')$, i. e. il existe une métrique définie sur K telle que la topologie associée coincide sur K avec la topologie faible $\sigma(X, X')$, et donc, T y est faiblement continue. En outre, K est compact pour la topologie $\sigma(X, X')$ (cf. [9], corollaire III. 19, p. 46).

La propriété résulte alors du théorème précédent. $\square$

On indique en second lieu une formule d'intégration qui joue un rôle fondamental dans le traitement des termes non linéaires de type $\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \theta(u) \rangle$ et qui est utilisée pour obtenir certaines estimations a-priori d'énergie ou justifier des passages à la limite.

Lemme 2.5.1 *Soit V un espace de Hilbert, tel que*

$$V \subset L^2(\Omega) \subset V',$$

Soit θ une fonction d'une variable réelle, à valeurs réeles, supposée continue et croissante, telle que :

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \frac{|\theta(\lambda)|}{|\lambda|} < +\infty.$$

Alors, $\forall u \in L^2(Q_T)$, telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,V'), \theta(u) \in L^2(0,T,V)$$

on a la formule d' intégration :

$$\int_0^T \xi(t)\langle\frac{\partial u}{\partial t}, \theta(u)\rangle dt = -\int_0^T \xi'(t)[\int_\Omega(\int_0^{u(x,t)} \theta(r)dr)dx]dt$$

$\forall \xi \in C^1([0,T])$, *avec* $\xi(0) = \xi(T) = 0.$ ■

En particulier, il s' ensuit qu' au sens de $D'(]0,T[)$ et dans $L^1(0,T)$,

$$\langle\frac{\partial u}{\partial t}, \theta(u)\rangle_{V',V} = \frac{d}{dt}\int_\Omega(\int_0^{u(.,x)} \theta(r)dr)dx.$$

On remarque que pour le choix particulier suivant de la fonction θ :

$$\theta(r) = \begin{cases} M^m & \text{si } r \geq M > 0, m \geq 1, \\ |r|^{m-1}r & \text{si } r \in [-M, M], \\ -M^m & \text{si } r < -M, \end{cases}$$

on retrouve les formules d' intégration classiques.

On rappelle ensuite certains résultats de compacité, de trace et d' intégration qui seront utiles pour toute la suite.

Lemme 2.5.2 *([51], p. 7)*

Soient X un espace de Banach réflexif et H un espace de Hilbert tels que X s'injecte continûment, et est dense, dans H. On se donne $f \in L^p(0,T,X)$ telle que $\frac{\partial f}{\partial t} \in$

$L^{p'}(0,T,X')$ *où* X' *est le dual de* X *et* p' *le nombre conjugué de* $p : \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. *Alors* f *est, aprés modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$, *continue de* $(0,T)$ *dans* H.

Lemme 2.5.3 *Soit* $\mathbb{O}$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t, g_\mu$ *et* g *des fonctions de* $L^q(\mathbb{O}), 1 < p < +\infty$, *telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathbb{O})} \leq c, g_\mu \to g \quad p.p \text{ dans } \mathbb{O}.$$

Alors

$$g_\mu \to g \quad p.p \text{ dans } L^q \text{ faible }.$$

Preuve. cf. [51], p. 13 ■

On se donne maintenant trois espaces de Banach $B_0 \subset B \subset B_1$ (l' injection est algébrique et topologique). On suppose en plus que l' injection $B_0 \to B$ est compacte. On définit

$$W = \{v \in L_0^p(0,T,B_0) : v_t = \frac{\partial v}{\partial t} \in L_1^p(0,T,B_1)\},$$

où T est fini et où $1 < p_i < +\infty, i = 0,1$.

Muni de la norme

$$\|v\|_{L_0^p(0,T,B_0)} + \|v\|_{L_1^p(0,T,B_1)},$$

W est un espace de Banach.

Evidemment

$$W \subseteq L^{p_0}(0,T,B).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.5.4 *.(Lions [51], p. 58)*

Sous les hypothèses précédentes et si $1 < p_i < +\infty, i = 0,1$ *l'injection de* W *dans* $L_0^p(0,T,B)$ *est compacte.*

Proposition 2.5.1 *[52] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$ supposée lipschitzienne. Alors*

(i) Le vecteur normal n unitaire extérieur à Ω existe presque partout le long de $\partial\Omega$.

(ii) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe un opérateur linéaire et continu (dit opérateur de trace) tel que :

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

$Tf = f$ sur $\partial\Omega$, pour toute fonction f de $W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(iii) En outre, pour tout f de $W^{1,p}(\Omega)$ et toute fonction vectorielle ϕ de $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on dispose de la formule de Gauss-Green :

$$\int_\Omega f div\phi dx = \int_{\partial\Omega} (\phi.n) Tf\, ds - \int_\Omega \nabla f.\phi\, dx. \quad \blacksquare$$

Finalement, on rappelle certains lemmes et concepts utilisés en théorie des systèmes dynamiques dissipatifs.

Lemme 2.5.4 *(Lemme uniforme de Gronwall, cf [57])*

Soient y, h, g trois fonctions localement intégrables sur $]t_0, +\infty[$ telle que y' est localement intégrable sur $]t_0, +\infty[$ et qui vérifient

$\ni r > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0,$ *telle que pour tout $t \geq t_0$, on ait*

$$\int_t^{t+r} g(\tau) d\tau \leq a_1,$$

$$\int_t^{t+r} h(\tau) d\tau \leq a_2,$$

$$\int_t^{t+r} y(\tau) d\tau \leq a_3,$$

et

$$y' \leq gy + h.$$

Alors

$$y(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)\exp(a_1), \forall t \geq t_0.$$

Lemme 2.5.5 *[57] Soient V et H deux espaces de Banach telle que V s'injecte de manière compacte dans H. On considère l'application non linéaire continue : $T(t) : H \to V$ et on suppose que $T(t)$ vérifie :*

Il existe une suite d'applications non linéaires continues $T_m(t) : H \to V$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) $\forall u_0 \in H$, il existe une sous suite (u_{0m}) qui converge vers u_0 dans H telle que $\lim_{m\to+\infty} T_m(t)u_{0m} = T(t)u_0$ dans $H, \forall t > 0$.

(b) $\forall B$ borné de H, il existe $t_0(B)$ telle que $\bigcup_{t\geq t_0(B)} T_m(t)B$ est borné dans V uniformément par rapport à m.

Alors,

$\bigcup_{t\geq t_0(B)} T(t)B$ est relativement compact dans H.

2.6 Semi-groupe et systèmes dynamiques

On désigne par X un espace de Banach.

Définition 2.6.1 *Un semi-groupe sur X est une famille $T = \{T(t), t \geq 0\}$ de X vérifiant :*

$$T(t)T(s) = T(t+s), \quad \forall t, s \geq 0,$$

$$T(0) = I,$$

$$\forall x \in X : t \to T(t)x \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.6.2 *Soit (H, d) un espace métrique et $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs de H dans H.*

(a) Pour $A \subset H$, on définit l'ensemble $w-$limite de A par :

$$w(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)A}^{H}.$$

(b) $X \subset H$ est dit invariant pour le semi-groupe $T(t)$ si $T(t)X = X, \forall t \geq 0$.

(c) Un ensemble invariant A est dit atrracteur s'il posséde un voisinage U tel que, $\forall u_0 \in U$

$$dist(T(t)u_0, A) \to 0, \ \text{quand } t \to +\infty,$$

où $dist(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$ est la semi-distance de A à B.

Définition 2.6.3 *Un sous-ensemble B de H est dit absorbant dans H pour le semi-groupe $T(t)$ si, pour tout borné B_0 de H, il existe $T = T(B_0)$ tel que $T(t)B_0 \subset B \quad \forall \quad t \geq T(B_0)$.*

Définition 2.6.4 *$A \subset H$ est dit attracteur global pour $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si*

(i) A est un sous-ensemble compact invariant.

(ii) A attire les bornés de H.

Définition 2.6.5 *Les opérateurs $T(t)$ sont dits uniformément compacts si pour tout borné B de H, il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\bigcup_{t \geq t_0(B)} T(t)B$ soit relativement compact dans H.*

Théorème 2.6.1 *(Temam [57], p.23)*

On suppose que :

(H1) Le semi-groupe $T(t)$ est continue de H dans H.

(H2) Les opérateurs $T(t)$ sont uniformément compacts.

(H3) Il existe un ensemble borné absorbant B dans H.

Alors $A = w(B)$ *est un attracteur compact qui attire les bornés de* H, *c'est l'attracteur maximal dans* H *(pour la relation d'inclusion) et si* H *est convexe dans un Banach, alors* A *est convexe.*

Chapitre 3

Existence de solutions faibles pour le problème du thermistor avec dégénérescence .

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles parabolique-elliptique couplé modélisant le thermistor [6, 65, 66, 67, 68, 69, 70]. Plus précisément, on s'intéresse à l'existence de solutions de problème

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle\theta(u) = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T),\\
\operatorname{div}(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T),\\
u = \overline{u} \quad \text{sur } \Gamma_D^u\times(0,T),\\
\frac{\partial\theta(u)}{\partial n} + \beta(x,t)(u-\overline{u}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^u\times(0,T),\\
\varphi = \overline{\varphi} \quad \text{sur } \Gamma_D^\varphi\times(0,T),\\
\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^\varphi\times(0,T),\\
u(x,0) = \overline{u}(x,0) \quad \text{dans } \Omega,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de R^N. La situation physique concerne le cas où $N=3$, on considère ici le cas général ($N\geq 1$).

On suppose que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est régulière et T un réel strictement positif. Γ_D^u, et Γ_D^φ sont deux ouverts non vides réguliers de $\partial\Omega$, $\Gamma_N^u = \partial\Omega - \overline{\Gamma_D^u}, \Gamma_N^\varphi = \partial\Omega - \Gamma_D^\varphi$ et $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$, alors que $\theta, \sigma, \beta, \overline{u}$, et $\overline{\varphi}$ sont des fonctions connues en leurs arguments.

Ce genre de problème est d'importance considérable dans de trés nombreux domaines tels que la physique, spécialement dans l'étude du transfert de la chaleur dans un conducteur. Dans cette situation u est la température du conducteur, φ est le potentiel électrique et $\sigma = \sigma(u)$ est la conductivité électrique dépendante de la température.

On note par I le courant électrique et Q le flux de la chaleur. En appliquant les lois d'Ohm et de Fourier respectivement, on a

$$I = -\sigma(u)\nabla\varphi,$$

$$Q = -k(u)\nabla u.$$

D'aprés les lois de conservation

$$\nabla I = 0,$$

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.Q = I.E,$$

où E est le champ électrique, ρ la densité de conducteur et c sa capacité thermique. En supposant

$$\rho c = 1,$$

on retrouve les équations (3.1).

Les conditions aux limites pour la température u sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω sont choisies de type mixte (ou condition de Cauchy) :

$$\frac{\partial\theta(u)}{\partial n} + \beta(x,t)(u - \overline{u}) = 0$$

où $\frac{\partial\theta(u)}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieure à Ω de la température, β est le coefficient positif de transfert thermique pouvant dépendre de la température et du temps. Dans le cas particulier où $\beta = 0$, on retrouve la condition de Newmann homogène, ou condition adiabatique. D'autres conditions limites, comme des conditions de radiation peuvent naturellement être imposées, mais pour simplifier, nous considérons dans ce chapitre uniquement des conditions de type mixte.

Les problèmes mathématiques relatives à la combinaison de la chaleur et du courant électrique sont fréquemment étudiés et une trés abondante bibliographie a été développée récemment dans bon nombre d'articles sous le titre de "problème du thermistor". Ce type de problème, sous des hypothèses sur θ et σ couplé avec des conditions variantes aux limites sur le bord, a ainsi reçu beaucoup d'attention dans la dernière décennie par de nombreux auteurs. On peut mentionner en particulier [10, 62] et la bibliographie de ces travaux concernant le problème (3.1) ou le problème stationnaire associé.

Montesinos et Gallego [42, 41] prouvent l'existence d'une solution faible sous

$$0 < \sigma_1 \leq \sigma(s) \leq \sigma_2, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Antontsev et Chipot [5] ont obtenu aussi des résultats d'existence et d'unicité de (3.1) avec des conditions au bord moins générales en supposant que $\sigma \in C^0(\Omega)$ et (3.2) ; de plus ils ont fait une étude de régularité de solutions sous certaines conditions sur la conductivité et les données initiales.

Hypothèses

Notre principal but est de montrer l'existence de solutions faibles de (3.1) sous les hypothèses suivantes :

(H1) θ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\theta(0) = 0$.

(H2) σ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

(H3) β est une fonction continue de $\Omega \times [0, \infty[$ dans $[0, \infty[$.

(H4) $\overline{u} \in W^{1,\infty}(\Omega \times (0,T))$ et $\overline{\varphi} \in L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))$ avec $0 \leq \overline{u}(x,t) \leq M$ p.p. dans $\Omega \times (0,T)$, où M est une constante positive.

Dans [62], Xu obtient l'existence d'une solution faible de (3.1) sous les hypothèses (H2)–(H4) et

(H1') θ est de classe C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\theta(0) = 0$.

Précisément, il montre que si pour tout $\|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} < M$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|\overline{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} < \delta$, alors on a existence d'une solution faible (u, φ) avec $\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} \leq M$. Autrement dit, pour empêcher la température de dépasser certaines valeurs maximales, il est suffisant de considérer le potentiel électrique assez petit.

Dans ce chapitre, on obtient l'existence et le bornage de la température en s'affranchissant de la petitesse du potentiel, pourvu que $\overline{u}$ soit borné. De plus, nous généralisons aussi le résultat de Xu au cas où θ est non différentiable. Pour ce faire, nous utilisons une approche différente de celle de Xu quoiqu'on utilise quelques uns de ses résultats préliminaires. la solution (u, φ) est obtenue comme limite d'une suite de solutions faibles (u_k, φ_k) d'un certain problème régularisé-tronqué (3.3) associé à (3.1).

Ce chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 3.2, on donne un résultat d'existence concernant les solutions faibles de (3.1). Le paragraphe 3.3 est dédié à l'existence de solutions faibles du problème (3.3). Ensuite au paragraphe 3.4, on déduit des estimations a-priori des solutions de (3.3). Finalement le paragraphe 3.5 est consacré à la démonstration du résultat principal.

3.2 Résultat principal

Dans le cadre de description du phénomène étudié et considérant plus généralement les problèmes mathématiques posés dans $\mathbb{R}^N, N$ entier naturel non nul, on note

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

et on définit l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = \overline{u} \text{ sur } \Gamma_u^D\}$$

i. e.

$$V = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); (i = 1..., n), v = \overline{u} \text{ sur } \Gamma_u^D\}$$

muni du produit scalaire, gràce à l'inégalité de Poincaré (cf [1])

$$((u, v)) = \Sigma_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, ds = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, ds,$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

$\langle , \rangle$ la dualité V', V.

On définit aussi

$$W(0,T) = \{v \in L^2(0,T,V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T,V')\},$$

espace de Hilbert muni de la norme euclidienne d'espace produit, la dérivation étant prise au sens de $D'(]0,T[;V)$.

Définition 3.2.1 On entend par solution faible de (3.1) tout couple (u,φ) vérifiant $u \in L^2(0,T,V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,V')$, $\varphi \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$, et p.p t

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle + \int_\Omega \nabla\theta(u)\nabla v\, ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u-\overline{u})v\, ds - \int_{\Gamma_D^u} \frac{\partial\theta(\overline{u})}{\partial n} v\, ds \\
&= -\int_\Omega \sigma(u)\varphi\nabla\varphi\nabla v\, ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \sigma(u)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n} v\ ds, \qquad \text{pour tout } v \in V \cap C^1(\overline{\Omega}),
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sigma(u)\nabla\varphi\nabla\psi\ ds = \int_{\Gamma_D^\varphi} \sigma(u)\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\psi\ ds, \qquad \text{pour tout } \psi \in H^1(\Omega).$$

On établit alors, un résultat d'existence d'une solution faible du problème du thermistor, au sens suivant :

Théorème 3.2.1 *on suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont vérifiées. Alors le Problème* (3.1) *admet une solution faible* (u,φ) *telle que :*

$$u \in L^2(0,T,V) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T,W^{s,2}(\Omega)), \forall s : 0 < s < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,V'), \theta(u) \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$$

et

$$\varphi \in L^2(0,T,H^1(\Omega)).$$

De plus, on a $0 \le u(x,t) \le M$ *p.p. dans* Q_T.

Remarque.

Si (u, φ) est une solution du problème (3.1), $u \in W(0,T)$ qui s'injecte d'une manière compacte dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ (théorème 2.5.4). Alors d'aprés le lemme 2.5.2 on déduit que la condition initiale de (3.1) a bien un sens.

Maintenant, on prouve un résultat d'existence d'une solution faible du problème régularisé associé à (3.1).

3.3 Existence de solutions du problème régularisé tronqué

A partir de θ, on construit une suite $\theta_k \in C^\infty$ telle que $\frac{1}{k} \leq \theta_k'$, $\theta_k(0) = 0$ et $\theta_k \to \theta$ dans $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

On définit également la tronquée $\widetilde{\sigma}$ de σ par

$$\widetilde{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(M) & \text{si } s > M, \\ \sigma(s) & \text{si } 0 \leq s \leq M, \\ \sigma(0) & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

On associe finalement à (3.1) le problème régularisé suivant :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_k}{\partial t} - \triangle\theta_k(u_k) = \widetilde{\sigma}(u_k)|\nabla\varphi_k|^2 \quad \text{dans } Q_T,\\
&\operatorname{div}(\widetilde{\sigma}(u_k)\nabla\varphi_k) = 0 \quad \text{dans } Q_T,\\
&u_k = \overline{u} \quad \text{sur } \Gamma_D^u \times (0,T),\\
&\frac{\partial\theta_k(u_k)}{\partial n} + \beta(x,t)(u_k - \overline{u}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^u \times (0,T),\\
&\varphi_k = \overline{\varphi} \quad \text{sur } \Gamma_D^\varphi \times (0,T),\\
&\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^\varphi \times (0,T),\\
&u_k(x,0) = \overline{u}(x,0) \quad \text{dans } \Omega.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Usuellement, le terme de droite de l'équation de la température $\widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2$ est égal à $\nabla.(\widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi)$ grâce à l'équation vérifiée par φ, par exemple, si $\varphi \in H^1(\Omega)$. Ceci se traduit par

Lemme 3.3.1 *Soient $u \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$ et $\varphi \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$. Alors*

$$\operatorname{div}(\widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi) = \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2$$

au sens des distributions et $\nabla.(\widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi)$ est une mesure de radon.

Preuve. On a pour tout $\psi \in H^1(Q_T)\bigcap L^\infty(Q_T)$

$$
\begin{aligned}
&\langle -\operatorname{div}(\widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi), \psi\rangle = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi\nabla\psi dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi\psi n\, ds\\
&= \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi\nabla(\varphi\psi)\, dx - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\psi\, dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{\sigma}(u)\varphi\nabla\varphi\psi n\, ds\\
&= -\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\psi\, dx - \langle \operatorname{div}(\widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi), \varphi\psi\rangle\\
&= -\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\psi dx
\end{aligned}
$$

Remarques.

1) Par définition 3.2.1, (u_k, φ_k) est une solution de (3.3) si et seulement si

$$\begin{aligned} &\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, v\rangle + ((\theta_k(u_k), v)) + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u_k - \overline{u}) v\, ds - \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u}) \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} v\, ds \\ &= - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u_k)\varphi_k \nabla\varphi_k \nabla v \; ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u_k)\overline{\varphi}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} v\, ds, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pour tout $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$,

et

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u_k)\nabla\varphi_k\nabla\psi\, ds = \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u_k)\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\psi\, ds, \tag{3.5}$$

pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$.

2) Puisque l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^2(\partial\Omega)$ est linéaire et compact, l'intégrale sur le bord qui figure dans le second terme (3.5) a un sens.

En effet, pour chaque $\varphi \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$, la restriction de φ à $\partial\Omega \times (0, T)$ appartient à l'espace $L^2(0, T, L^2(\partial\Omega))$.

Pour le reste de ce chapitre, on note par c_i différentes constantes strictement positives dépendantes seulement de Ω et les données initiales mais non de k.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (H1)–(H4), il existe au moins un couple* (u_k, φ_k) *solution du problème* (3.3)*, vérifiant :*

$$u_k \in W(0, T), \varphi_k \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega)),$$

$$u_k(x, 0) = \overline{u}(x, 0) \qquad p.p \ dans\ \Omega,$$

et satisfaisant (3.4)–(3.5)*. De plus,* $0 \leq u_k \leq M$*, p.p. dans* Q_T*.*

Preuve de Théorème (3.3.1) La démonstration de l'existence d'une solution du problème est basée sur le théorème du point fixe de Schauder, associé à des techniques de monotonie et de compacité. On construit des opérateurs adéquats dont leurs points fixes sont solutions de (3.3). A cet effet, considérons alors l'application

$$U_k : W(0,T) \to W(0,T)$$

telle que $U_k(w) = u_{k,w}$ est l'unique solution de

$$\begin{aligned}&\langle \frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}, v\rangle + \int_\Omega \theta_k'(w)\nabla u_{k,w}\nabla v\, ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u_{k,w} - \overline{u})v\, ds - \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial \overline{u}}{\partial n} v\, ds \\ &= -\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\varphi_{k,w}\nabla\varphi_{k,w}\nabla v\ ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} v\ ds, \quad \text{pout tout } v \in V \cap C^1(\overline{\Omega});\end{aligned} \tag{3.6}$$

et soit

$$S_k : W(0,T) \to L^2(0,T,H^1(\Omega))$$

l'opérateur défini par $S_k(w) = \varphi_{k,w}$ où $\varphi_{k,w}$ est l'unique solution de

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\nabla\varphi_{k,w}\nabla\psi\ ds = \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\psi\, ds, \quad \text{pour tout } \psi \in H^1(\Omega). \tag{3.7}$$

D'aprés les résultats généraux relatifs aux équations variationnelles elliptiques et paraboliques d'évolution (cf Lions [51]), on peut établir l'existence et l'unicité d'un tel couple de solution $(u_{k,w}, \varphi_{k,w})$.

En effet

On note par G l'espace produit $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ et G^* son dual topologique. On pose

$$E = \{(u_1, v_1) \in G : u_1 \ = \overline{u} \text{ sur } \Gamma_D^u\}.$$

Clairement, E est un sous ensemble de G fermé convexe. Pour chaque k, on définit un opérateur $A_k : E \to G^*$ par

$$(A_k(w_1), w_2) = I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$

avec $w_1 = (u_{k,w}, \varphi_{k,w}) \in E, w_2 = (v, \psi) \in G$, où

$$I_1 = \langle \frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}, v\rangle + \int_\Omega \theta_k'(w)\nabla u_{k,w}\nabla v\, ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u_{k,w} - \overline{u})v\, ds - \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial \overline{u}}{\partial n} v\, ds$$

$$I_2 = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\varphi_{k,w}\nabla\varphi_{k,w}\nabla v\ ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}v\ ds,$$

$$I_3 = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\nabla\varphi_{k,w}\nabla\psi\ ds$$

$$I_4 = \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\psi\, ds,$$

et $(.,.)$ est la dualité V^*, V.

A_k est bien défini et A_k satisfait les conditions suivantes :

(i) A_k est borné.

(ii) A_k est pseudomonotone.

(iii) $(A_k(w), w - w_0)/\|w\|_V \to \infty$ quand $\|w\|_V \to \infty$ pour $w \in E$, avec $w_0 = (u_0, \psi_0)$

Nous sommes maintenant en position d'utiliser le résultat d'existence de Lions ([51], p. 169) pour conclure .

Lemme 3.3.2 *Soit $u \in L^1(Q_T)$ et $\varphi - \overline{\varphi} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Si le pair (u,φ) satisfait*

$$\mathrm{div}(\widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi) = 0 \ \textit{alors}\ \varphi \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \bigcap L^\infty(Q_T)$$

et on a les estimations suivantes :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\overline{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\|\nabla\varphi\|_2 \le (\frac{\sigma^*}{\sigma_*})^{\frac{1}{2}}\|\nabla\overline{\varphi}\|_2.$$

σ^* et σ_* sont deux constantes positives.

Preuve.

i) L'estimation L^∞ découle de l'application du principe faible du maximun [[59], p. 245].

ii) En Choisissant $\varphi - \overline{\varphi}$ comme fonction test, on a

$$\begin{aligned}
&\langle -\operatorname{div}(\widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi), \varphi - \overline{\varphi}\rangle = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi.\nabla(\varphi - \overline{\varphi})\,dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi.(\varphi - \overline{\varphi})n\,ds\\
&= \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\,dx - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi\nabla\overline{\varphi} - \int_{\partial\Omega} \widetilde{\sigma}(u)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\varphi - \overline{\varphi})\,ds\\
&= \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\,dx - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi\nabla\overline{\varphi} - \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\varphi - \overline{\varphi})\,ds\\
&= \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\,dx - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi\nabla\overline{\varphi}\\
&= 0
\end{aligned}$$

comme

$$\int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\varphi - \overline{\varphi})\,ds = 0.$$

D'où

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)|\nabla\varphi|^2\,dx = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u)\nabla\varphi\nabla\overline{\varphi}.$$

Par l'inégalité de Hôlder, on a

$$\sigma_*\|\nabla\varphi(t)\|_2^2 \leq \sigma^*\|\nabla\varphi(t)\|_2\|\nabla\overline{\varphi}\|_2,$$

et par l'inégalité de Young, on a

$$\sigma_*\|\nabla\varphi(t)\|_2^2 \leq \frac{\sigma^*}{2}\|\nabla\varphi(t)\|_2^2 + \frac{\sigma^*}{2\sigma_*}\|\nabla\overline{\varphi}\|_2^2,$$

On déduit que

$$\|\nabla\varphi(t)\|_2 \leq (\frac{\sigma^*}{\sigma_*})^{\frac{1}{2}}\|\nabla\overline{\varphi}\|_2. \quad \square$$

Remarque. D'aprés le lemme précédent, on a $\varphi_{k,w} \in L^\infty(\Omega)$ et la norme H^1 de $\varphi_{k,w}$ est bornée par une constante indépendante de w. Par conséquent, tous les termes des équations (3.6) et (3.7) sont bien définis.

Pour continuer la preuve du théorème (3.3.1), on a besoin des estimations a priori suivantes obtenues par des choix convenables et loisibles de fonctions tests.

Lemme 3.3.3 *Soit* $(u_{k,w}, \varphi_{k,w})$ *la solution de* (3.6)–(3.7). *Alors, on a les estimations a priori suivantes :*

$$\|\varphi_{k,w}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq c_1, \tag{3.8}$$

$$\|u_{k,w}\|_{L^2(0,T,V)} \leq c_2, \tag{3.9}$$

$$\|u_{k,w}\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_N^u))} \leq c_3, \tag{3.10}$$

$$\|\frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}\|_{L^2(0,T,V)} \leq c_4, \tag{3.11}$$

où les constantes positives c_i $(i = 1 \dots 4)$ *sont indépendantes de* w *et de* k.

Preuve. (i) En choisissant $\psi = \varphi_{k,w} - \overline{\varphi}$ dans (3.7) , on déduit que

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\nabla(\varphi_{k,w} - \overline{\varphi})\, dx = 0$$

puisque $\varphi_{k,w} = \overline{\varphi}$ sur Γ_D^φ.

Donc par utilisation de l'inégalité de Young

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)|\nabla\varphi_{k,w}|^2 = \int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)\nabla\varphi_{k,w}\nabla\overline{\varphi}$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)|\nabla\varphi_{k,w}|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)|\nabla\overline{\varphi}|^2\, dx.$$

En tenant compte des propriétés de $\widetilde{\sigma}$, on a

$$\int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)|\nabla\varphi_{k,w}|^2 \leq \int_\Omega \widetilde{\sigma}(w)|\nabla\overline{\varphi}|^2 \leq c_5 \int_\Omega |\nabla\overline{\varphi}|^2,$$

où c_5 est une constante positive . Ce qui implique aisément l'estimation (3.8).

(ii) Prenant $v = u_{k,w}$ dans (3.6), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}, u_{k,w}\rangle + \int_{\Omega} \theta_k'(w)|\nabla u_{k,w}|^2 \; ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u_{k,w} - \overline{u})u_{k,w} \; ds \\
&= -\int_{\Omega} \widetilde{\sigma}(w)\varphi_{k,w}\nabla\varphi_{k,w}\nabla u_{k,w} \; ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_{k,w} \; ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}u_{k,w} \; ds.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_{k,w}|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \theta_k'(w)|\nabla u_{k,w}|^2 \, ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta|u_{k,w}|^2 \, ds \\
&= \int_{\Gamma_N^u} \beta u_{k,w}\overline{u} \, ds - \int_{\Omega} \widetilde{\sigma}(w)\varphi_{k,w}\nabla\varphi_{k,w}\nabla u_{k,w} \; ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_{k,w} \; ds + \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\overline{u} \, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (3.3.2) et les hypothèses sur θ_k' et β et en appliquant l'inégalité de Young, il existe des constantes positives c_i, $(i = 6 \ldots 12)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_{k,w}|^2_{L^2(\Omega)} + c_6\int_{\Omega} |\nabla u_{k,w}|^2 \, ds + c_7\int_{\Gamma_N^u} |u_{k,w}|^2 \, ds \\
&\leq \int_{\Gamma_N^u} \beta u_{k,w}\overline{u} \, ds - \int_{\Omega} \widetilde{\sigma}(w)\varphi_{k,w}\nabla\varphi_{k,w}\nabla u_{k,w} \, ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_{k,w} \, ds + \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\overline{u} \, ds \\
&\leq c_8\int_{\Omega} |\nabla\varphi_{k,w}||\nabla u_{k,w}| \, ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(w)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_{k,w} \, ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\overline{u} \, ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta u_{k,w}\overline{u} \\
&\leq \frac{c_6}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_{k,w}|^2 \, ds + c_9\int_{\Omega} |\nabla\varphi_{k,w}|^2 \, ds + c_{10}\int_{\Gamma_D^\varphi} |\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}|^2 \, ds \\
&\quad + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_D^\varphi} |u_{k,w}|^2 \, ds + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_N^u} |u_{k,w}|^2 \, ds + c_{11}\int_{\Gamma_N^u} |\overline{u}|^2 \, ds + c_{12}.
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_{k,w}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_6}{2}\int_{\Omega}|\nabla u_{k,w}|^2\,ds + c_7\int_{\Gamma_N^u}|u_{k,w}|^2\,ds\\
&\le c_{13} + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_D^{\varphi}}|u_{k,w}|^2\,ds + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_N^u}|u_{k,w}|^2\,ds\\
&\le c_{13} + \frac{c_7}{4}\int_{\partial\Omega}|u_{k,w}|^2\,ds + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_N^u}|u_{k,w}|^2\,ds\\
&\le c_{13} + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_D^u}|u_{k,w}|^2\,ds + \frac{c_7}{2}\int_{\Gamma_N^u}|u_{k,w}|^2\,ds.
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_{k,w}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_6}{2}\int_{\Omega}|\nabla u_{k,w}|^2\,ds + \frac{c_7}{2}\int_{\Gamma_N^u}|u_{k,w}|^2\,ds$$
$$\le c_{13} + \frac{c_7}{4}\int_{\Gamma_D^u}|\overline{u}|^2\,ds \le c_{14}. \quad (3.12)$$

Par intégration de cette dernière inégalité, on obtient alors les estimations (3.9) et (3.10).

(iii) Par utilisation du lemme 3.3.2 (l'estimation L^∞ de φ) et en se servant des estimations (3.6), (3.8), (3.9) et (3.10) on obtient

$$|\langle\frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}, v\rangle| \le c_4\|v\|_V, \quad \forall v \in V\bigcap C^1(\overline{\Omega}),$$

d'aprés la définition de la norme duale, on obtient l'estimation

$$\|\frac{\partial u_{k,w}}{\partial t}\|_{L^2(0,T,V')} \le c_4.$$

Ce qui achéve la preuve du lemme 3.3.3 . □

Notons, maintenant

$$W_0 := \left\{\begin{array}{ll} v \in W(0,T), \|v\|_{L^2(0,T,V)} \le c_2, & \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{L^2(0,T,V')} \le c_4, \\ 0 \le v(x,t) \le M \text{ p.p. dans } Q_T, & v(0) = \overline{u}(x,0) \text{ dans } \Omega \end{array}\right\}.$$

Alors W_0 est un ensemble convexe non vide, faiblement compact de $W(0,T)$ et U_k applique W_0 dans lui-même. En utilisant le lemme 3.3.3 et le théorème de convergence dominée de Lesbegue on montre que U_k est faiblement séquentiellement continue de $W(0,T)$ dans lui-même. On peut alors appliquer le théorème de Schauder pour en déduire d'au moins une solution du problème (3.3), selon les rappels énnoncés.
En effet, soit $(w_j)_j$ une suite dans W_0 satisfaisant à

$$w_j \to w \text{ faiblement dans } W(0,T)$$

et $(u_{k,w_j}, \varphi_{k,w_j})$ la suite de solution correspondante de (3.6)–(3.7), c'est à dire

$$u_{k,w_j} = U_k(w_j), \varphi_{k,w_j} = S_k(w_j).$$

Par les estimations (3.8)–(3.11) du lemme 3.3.3, on peut extraire une sous-suite de w_j (notée encore w_j telle que, lorsque $j \to \infty$, on a

$$w_j \to w \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V),$$
$$\frac{\partial w_j}{\partial t} \to \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V'),$$
$$u_{k,w_j} \to u_k \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V),$$
$$u_{k,w_j} \to u_k \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,L^2(\Gamma_N^u)),$$
$$\frac{\partial u_{k,w_j}}{\partial t} \to \frac{\partial u_k}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V'),$$
$$\varphi_{k,w_j} \to \varphi_k \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,H^1(\Omega)).$$

Notons qu'on peut alors supposer, sans perte de généralisation, que

$$w_j \to w \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fort et p.p dans } Q_T.$$

D'autre part, puisque $\widetilde{\sigma}$ est continue et bornée et grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il vient que

$$\widetilde{\sigma}(w_j) \to \widetilde{\sigma}(w) \quad \text{dans } L^2(Q_T) \quad \text{fort},$$

et par les théorèmes classiques de trace, on a :

$$\widetilde{\sigma}(w_j)\frac{\partial \varphi_{k,w_j}}{\partial n} \to \widetilde{\sigma}(w)\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \text{ faible dans } L^2(\Gamma_D^{\varphi}).$$

Toujours en vertu des estimations du lemme 3.3.3, on en déduit l'existence de fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, telle que

$$\widetilde{\sigma}(w_j)\nabla\varphi_{k,w_j} \to \alpha_1 \text{ faible dans } L^2(Q_T), \tag{3.13}$$

$$\theta_k'(w_j)\nabla u_{k,w_j} \to \alpha_2 \text{ faible dans } L^2(Q_T), \tag{3.14}$$

$$\widetilde{\sigma}(w_j)\varphi_{k,w_j}\nabla\varphi_{k,w_j} \to \alpha_3 \text{ faible dans } L^2(Q_T). \tag{3.15}$$

Comme

$$\nabla\varphi_{k,w_j} \to \nabla\varphi_k \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ faible },$$

on a, d'aprés le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\widetilde{\sigma}(w_j)\nabla\varphi_{k,w_j} \to \widetilde{\sigma}(w)\nabla\varphi_k \text{ dans } D'(Q_T) \text{ par exemple. }.$$

Par conséquent,

$$\alpha_1 = \widetilde{\sigma}(w)\nabla\varphi_k.$$

Le même raisonnement vaut pour α_2 et α_3. D'où l'on déduit que

$$\alpha_2 = \theta_k'(w)\nabla u_k,$$

$$\alpha_3 = \widetilde{\sigma}(w)\varphi_k\nabla\varphi_k,$$

de sorte qu'en passant à la limite, lorsque $j \to \infty$, dans les équations (3.6) et (3.7) vérifiées par $(u_{k,w_j}, \varphi_{k,w_j})$, on déduit immédiatement que $u_k = U_k(w)$ et $\varphi_k = S_k(w)$. D'aprés la propriété d'unicité de la solution de (3.6), (toute) la suite u_{k,w_j} converge alors faiblement dans $W(0,T)$ vers $u_k = U_k(w)$. Ce qui complète la démonstration . $\square$

Remarque Par le théorème 3.2, on a $0 \leq u_k \leq M$. Donc $\widetilde{\sigma}(u_k) = \sigma(u_k)$.

Retour à la preuve du théorème (3.3.1)

3.4 Estimations sur les solutions du problème régularisé

Dans cette section on établit des estimations a-priori adéquates sur la solution (u_k, φ_k) du problème (3.3). On note par F_k la primitive de $\sqrt{\theta_k'}$ qui s'annule à l'origine.

Lemme 3.4.1 *Soit* (u_k, φ_k) *une solution faible de* (3.3)*. Sous les hypothèses (H1)–(H4), il existe des constantes* c_i $(i = 15 \dots 19)$ *telles que, pour tout* $k \geq 1$*, les estimations suivantes sont vérifiées*

$$|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{15}, \tag{3.16}$$

$$\|u_k\|^2_{L^2(0,T,V)} \leq |\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{15}, \tag{3.17}$$

$$\|\frac{1}{k}u_k\|^2_{L^2(0,T,V)} \leq \frac{c_{16}}{2k}(|\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{17}), \tag{3.18}$$

$$\|\theta_k(u_k)\|^2_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq \frac{c_{16}}{2k}(|\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{17}), \tag{3.19}$$

$$\|\theta_k(u_k)\|^2_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq c_{18}, \tag{3.20}$$

$$\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\|_{L^2(0,T,V')} \leq c_{19}. \tag{3.21}$$

Les différentes constantes étant positives et indépendantes de k.

Preuve. Choisissant $v = u_k$ comme fonction test dans (3.4), utilisant les hypothèses sur θ'_k et β et rappelant le lemme 3.3.2 , on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{20}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\,ds + c_{21}\int_{\Gamma_N^u} |u_k|^2\,ds \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \theta'_k(u_k)|\nabla u_k|^2\,ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta|u_k|^2\,ds \\
&= \int_{\Gamma_N^u} \beta u_k \overline{u}\,ds + \int_{\Gamma_D^u} \theta'_k(\overline{u})\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}u_k\,ds - \int_\Omega \widetilde{\sigma}(u_k)\varphi_k\nabla\varphi_k\nabla u_k\,ds + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u_k)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_k\,ds \\
&\leq c_{22}\int_\Omega |\nabla\varphi_k||\nabla u_k|\,ds + c_{23}\int_{\Gamma_N^u} |u_k||\overline{u}|\,ds + c_{24}\int_{\Gamma_D^\varphi} |u_k||\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}|\,ds + c_{25}\int_{\Gamma_D^u} |\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}||\overline{u}|\,ds.
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 3.3.3 aboutissent à

$$\frac{\partial}{\partial t}|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u_k|^2\,ds + \int_{\Gamma_N^u} |u_k|^2\,ds \leq c_{26}. \tag{3.22}$$

En intégrant (3.22) sur $(0,t)$, on obtient

$$|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{Q_t} |\nabla u_k|^2\,ds + \int_0^t\int_{\Gamma_N^u} |u_k|^2\,ds \leq |\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{15}.$$

Il vient, lorsque $k \to +\infty$, que

$$u_k \text{ reste dans un borné de } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\ \text{indépendant de } k,$$

$$u_k \text{ reste dans un borné fixe de } L^2(0,T;H^1(\Omega))\bigcap L^2(0,T;V).$$

L'expression

$$\|u_k\|_{L^2(0,T;\Gamma_N^u)}$$

reste bornée, indépendamment de k, d'où l'on déduit (3.16) et (3.17).

D'autre part, par (3.4) on a pour $v = u_k$

$$\begin{aligned}
&\langle\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k\rangle + ((\theta_k(u_k), u_k)) + \int_{\Gamma_N^u} \beta|u_k|^2 \\
&= -\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u_k)\varphi_k\nabla\varphi_k\nabla u_k\,ds + \int_{\Gamma_N^u} \beta u_k\overline{u}\,ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u_k)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}u_k\,ds + \int_{\Gamma_D^u} \theta'_k(\overline{u})\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\overline{u}\,ds.
\end{aligned}$$

Moyennant le calcul précédent, les inégalités de Young, de Hôlder et une intégration par partie sur $(0,t)$, il vient

$$|u_k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^T ((\theta_k(u_k), u_k))dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^u} |u_k|^2\, ds \le c_{16}(|\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{17}).$$

De plus, on a

$$\int_0^T ((\theta_k(u_k), u_k))dt = \int_0^T \Big(\int_\Omega \theta'_k(u_k)|\nabla u_k|^2\, ds\Big)dt$$

et $0 < \frac{1}{k} \le \theta'_k(u_k)$.

D'où

$$\frac{1}{k}\|u_k\|^2_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \le \frac{c_{16}}{2}(|\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{17}).$$

Il en découle alors la relation (3.18).

Pour obtenir (3.19), on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T ((\theta_k(u_k), u_k))dt = \int_0^T \Big(\int_\Omega \theta'_k(u_k)|\nabla u_k|^2\, ds\Big)dt \\
&= \int_0^T \Big(\int_\Omega (\sqrt{\theta'_k(u_k)}\nabla u_k)^2\, ds\Big)dt \\
&= \int_0^T \Big(\int_\Omega |\nabla F_k(u_k)|^2\, ds\Big)dt \\
&= \int_0^T \Big(\int_\Omega \|F_k(u_k)\|^2_{H^1(\Omega)}\, ds\Big)dt \\
&= \|F_k(u_k)\|^2_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \\
&\le \frac{c_{16}}{2}(|\overline{u}(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} + c_{17}).
\end{aligned}$$

Il est important, pour les développements ultérieurs, de noter que l'on dispose plus précisément d'une estimation de type

$$\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')} \le c$$

où c est constante indépendante de k.

Pour établir cette estimation, il suffit, d'aprés l'équation (3.4), les estimations précédentes et la définition de la norme duale, de prouver que la famille

$$(\theta_k(u_k))_{k\geq 1},$$

reste dans un borné fixe de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ indépendamment de k. Pour cela, on choisit $\theta_k(u_k)$ comme fonction test dans (3.4). Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, \theta_k(u_k)\rangle + \|\theta_k(u_k)\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{\Gamma_N^u} \beta(u_k - \overline{u})\theta_k(u_k)\, ds \\
&= -\int_\Omega \widetilde{\sigma}(u_k)\varphi_k \nabla\varphi_k \nabla\theta_k(u_k)\, ds + \int_{\Gamma_D^u} \theta_k'(\overline{u})\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\theta_k(u_k)\, ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_D^\varphi} \widetilde{\sigma}(u_k)\overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\theta_k(u_k)\, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme d'intégration de Bamberger [7], on a

$$\frac{d}{dt}\Big\{\int_\Omega \Big(\int_0^{u_k(x,.)} \theta_k(r)dr\Big)\, ds\Big\} + \frac{1}{2}\|\theta_k(u_k)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c_{27}. \tag{3.23}$$

Intégrant ensuite (3.23) entre 0 et T, on obtient

$$\int_\Omega \Big(\int_0^{u_k(x,T)} \theta_k(r)dr\Big)\, ds + \frac{1}{2}\|\theta_k(u_k)\|^2_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq \frac{c_{18}}{2}.$$

Ce qui donne l'estimation (3.20) .

Par application de (3.4), (3.16), (3.17), (3.20) et le lemme 3.3.2, et la définition de la norme duale, on conclut alors la relation (3.21) désirée. □

3.5 Passage à la limite sur le problème régularisé

Notre but maintenant est de passer à la limite dans (3.3). Partant des estimations du lemme 3.4.1 et des résultats de compacité, on peut extraire une sous-suite notée toujours (u_k, φ_k), telle que lorsque $k \to \infty$, on a

$$u_k \to u \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V),$$

$$u_k \to u \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)),$$

$$u_k \to u \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,L^2(\Gamma_N^u)),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T,V'),$$

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0,T,H^1(\Omega)).$$

D'autre part, l'espace

$$\{v \in L^2(0,T,V), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T,V')\}$$

s'injecte de manière compacte dans $L^2(Q_T)$, [51, p. 58], on peut donc, par utilisation d'un résultat classique de compacité, extraire une sous suite notée encore (u_k) vérifiant

$$u_k \to u \quad \text{dans } L^2(Q_T) \quad \text{fort et p.p dans } Q_T.$$

De plus On a

$$\theta_k(u_k) \to \theta(u) \quad \text{p.p. dans } Q_T \text{ et dans } L^2(0,T,H^1(\Omega)) faible.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (\int_\Omega |\theta_k(u_k) - \theta(u)|\, dsdr \\
&\leq \int_0^t (\int_\Omega |\theta_k(u_k) - \theta(u_k)|\, ds)dr + \int_0^t (\int_\Omega |\theta(u_k) - \theta(u)|\, ds)dr \\
&\leq csup_{|r|\leq M}|\theta_k(r) - \theta(r)| + \int_0^t (\int_\Omega |\theta(u_k) - \theta(u)|\, ds)dr.
\end{aligned}$$

Les arguments employés pour justifier les valeurs limites suivantes étant analogues à ceux utilisées à la preuve de l'existence de (u_k, φ_k) par utilisation du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de passage à la limite dans $D'(Q_T)$ par exemple et permettent d'avoir

$$\widetilde{\sigma}(u_k)\nabla\varphi_k \to \sigma(u)\nabla\varphi \quad \text{faible dans } L^2(Q_T),$$

$$\widetilde{\sigma}(u_k)\varphi_k\nabla\varphi_k \to \sigma(u)\varphi\nabla\varphi \quad \text{faible dans } L^2(Q_T).$$

De plus, en utilisant le lemme d'Aubin (voir [51, p. 7]), on obtient

$$u_k \to u \text{ dans } C([0,T];V').$$

Par suite

$$u_k(0) \to u(0) \text{ faible dans } V'$$

et par conséquent on obtient

$$u(x,0) = \overline{u}(x,0).$$

On vérifie facilement que la limite (u,φ) ainsi obtenue est bien solution du problème (3.1). Ceci clore la preuve du résultat principal. □

Remarque. On ne connait pas de résultats d'unicité en dimension d'espace quelconque en dehors des résultats de S. N. Antontsev, énoncé pour des conditions de régularité sur les inconnus et des hypothèses fortes de régularité sur les données, éloignées de la pratique industrielle ou de Xu qui suppose a priori les solutions régulières, établit ainsi un résultat d'unicité en réduisant la dimension de l'espace à $N = 2$. Le problème général de l'unicité reste ouvert.

Lorsque le gradient du potentiel est supposé rester borné, l'unicité est déjà démontré par Xu dans [64]. Ce dernier a considéré que σ est lipschitzienne et $0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. Le théorème suivant, fournit un résultat d'unicité en suivant pratiquement la même démarche.

Théorème 3.5.1 *On fait les hypothèses* $(H_1)-(H_4)$. *On suppose que* $\theta(u)=u$ *et* σ *est localement lipschitzienne. Alors il existe au plus une solution de* (3.1) *dans l'espace* $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\times L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)).$

Preuve. On suppose qu'il existe deus solutions (u_1,v_1) et (u_2,v_2) de (5.1) . On pose

$$w_1=u_1-u_2, w_2=v_1-v_2.$$

On a d'aprés les équations associées aux solutions

$$\frac{\partial}{\partial t}w_1-\triangle w_1=div(\sigma(u_1)v_1\nabla v_1-\sigma(u_2)v_2\nabla v_2) \text{ dans } L^2(0,T;W_0^{-1,2}(\Omega)).$$

Donc,

$$\frac{1}{2}\|w_1\|_2^2+\int_0^t\int_\Omega|\nabla w_1|^2\,dxds=\int_0^t\int_\Omega(\sigma(u_1)v_1\nabla v_1-\sigma(u_2)v_2\nabla v_2)\nabla w_1\,dxds$$
$$=I.$$

Rappelons d'aprés notre affirmation que $\nabla v_1,\nabla v_2\in[L^\infty(Q_T)]^N$. I peut être estimer comme :

$$\begin{aligned}
|I| &\leq |\int_0^t\int_\Omega(\sigma(u_1)-\sigma(u_2))v_1\nabla v_1\nabla w_1dx\,ds|+|\int_0^t\int_\Omega\sigma(u_2)(v_1-v_2)\nabla v_1\nabla w_1dx\,ds|\\
&+|\int_0^t\int_\Omega\sigma(u_2)v_2(\nabla v_1-\nabla v_2)\nabla w_1dx\,ds|\\
&\leq c\big\{\big(\int_0^t\int_\Omega(\sigma(u_1)-\sigma(u_2))^2dx\,ds\big)^{\frac{1}{2}}+\big(\int_0^t\int_\Omega(v_1-v_2)^2dx\,ds\big)^{\frac{1}{2}}\\
&+\big(\int_0^t\int_\Omega|\nabla v_1-\nabla v_2|^2dx\,ds\big)^{\frac{1}{2}}\big\}\big(\int_0^t\int_\Omega|\nabla w_1|^2dx\,ds\big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\big(\int_0^t\int_\Omega w_1^2dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega w_2^2dx\,ds\\
&+\int_0^t\int_\Omega|\nabla w_2|^2dx\,ds\big)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla w_1|^2dx\,ds.
\end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que σ est localement lipschitzienne.

Clairement,

$$\int_0^t\int_\Omega\sigma(u_i)\nabla v_i\nabla\xi dx=0 \text{ pour tout } \xi\in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)$$

pour tout $0 < t < T$ et pour $i = 1, 2$.

On obtient alors

$$\int_0^t \int_\Omega \sigma(u_2)|\nabla w_2|^2 dx\, ds = -\int_0^t \int_\Omega (\sigma(u_1) - \sigma(u_2))\nabla v_1 \nabla w_2 dx\, ds.$$

Par conséquent,

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx\, ds \leq c \int_0^t \int_\Omega w_1^2 dx\, ds.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega w_2^2 dx\, ds \leq \int_0^t \int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx\, ds \\ &\leq c \int_0^t \int_\Omega w_1^2 dx\, ds. \end{aligned}$$

Cela implique immédiatement

$$w_1 \equiv 0.$$

$$w_2 \equiv 0.$$

Donc $u_1 \equiv u_2, v_1 \equiv v_2$. ce qui achéve la démonstration.

Remarque. Le théorème précédent n'est pas puissant au sens où il exige que ∇v soit borné, ce que n'est pas garanti par le théorème d'existence. Une naturelle question se pose est de regarder quand ∇v est borné.

Chapitre 4

Le problème du thermistor : Un problème parabolique non local

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème parabolique non local suivant

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\, dx\right)^2}, \text{ dans } \Omega\times]0;T[, \\
&u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega\times]0;T[, \\
&u/_{t=0} = u_0 \quad \text{ dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où $T > 0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 1$, est un domaine borné régulier, λ est un paramétre positif et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec des conditions préscrites. Le problème (4.1) se rencontre, par exemple, dans l'étude de matériaux statiques tels que les thermistors ([17], [32],[50], [61], [62]]) et s'obtient en réduisant le système régi par les deux équations

$$\begin{aligned}
&u_t = \nabla.(k(u)\nabla u) + \sigma(u)|\nabla\varphi|^2, \\
&\nabla(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

à une seule équation. Plus précisément, u représente la température produite par un courant électrique traversant un conducteur, φ son potentiel électrique, $\sigma(u)$ est sa conductivité électrique et $k(u)$ est sa conductivité thermique. En prenant cette dernière constante, le problème (4.2) peut être réduit à l'équation non locale

$$u_t = \triangle u + \lambda \frac{\sigma(u)}{\left(\int_\Omega \sigma(u)\,dx\right)^2}$$

où $\lambda = \frac{I^2}{|\Omega|^2} \geq 0, I$ est le courant électrique supposé constant et $|\Omega|$ la mesure de Ω.

Notre but ici concerne l'existence et l'unicité de solutions faibles de (4.1). On montre aussi l'existence d'attracteur maximal.

Nous rappelons que le système (4.1) a été le sujet de nombreux articles dans la dernière décennie. En particulier, quelques résultats ont été obtenus par de nombreux auteurs dans le cas où $N = 1$ et f ayant des formes et écritures particulières.
Dans [48, 49, 50, 58], l'étude de (4.1) est faite essentiellement en dimension spatiale égale à 1 ou 2 et f est de la forme $f(u) = \exp(u) ou \exp(-u)$. Dans tous ces travaux, des conditions de régularité additionnelles sont imposées sur u_0 et la construction d'une fonction de Lyapunov et l'utilisation d' une méthode de comparison sont les ingrédients clés. Nous proposons d'étendre quelques uns de ces résultats lorsque la condition suivante :

$$0 < \sigma_1 \leq \sigma(s) = f(s) \leq \sigma_2, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

est affaiblie et remplacée par (H_2) décrite ultérieurement.

Utilisant une approche des systèmes dynamiques cf [57], on montre l'existence d'un attracteur maximal pour le problème (4.1). La preuve de la compacité est basée sur l'estimation $L^\infty(\Omega)$ de la solution de (4.1). De plus l'existence d'ensembles absorbants dans $L^\infty(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, est liée au caractère dissipatif de (4.1), ce qui assure, avec la stabilité non linéaire, l'existence d'un attracteur maximal $\mathbb{A}$ (pour l'inclusion parmi les ensembles invariants). $\mathbb{A}$ décrit de façon complète le comportement asymptotique des solutions de (4.1). Dans [18], Cimatti obtient des résultats similaires dans le cas particulier $N = 1, \sigma(u) = a \exp(-u)$, moyennant la construction d'une fonction de Lyapunov et l'utilisation du principe d'invariance de Lasalle.

Finalement, sous des conditions restrictives sur les données initiales, on prouve que l'attracteur est borné dans $H^2(\Omega)$.

4.2 Existence et régularité d'attracteur maximal.

a) Existence et unicité.

On considére le système (4.1) sous les conditions suivantes :

(H1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne.

(H2) Il existe des constantes positives c_1, c_2 et α telles que , pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\sigma \leq f(\xi) \leq c_1 |\xi|^{\alpha+1} + c_2.$$

On note par$\|.\|_k$ la norme dans $L^k(\Omega)$.

On adopte la formulation faible de (4.1) suivante : u est une solution de (4.1) si et seulement si

$$u \in L^\infty(\tau, +\infty, H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \text{ avec } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\tau, +\infty, L^2(\Omega))$$

$$\text{pour tout } \tau > 0, \text{ et vérifie}$$

$$\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial t} \phi - \nabla u \nabla \phi \, dxdt = \int_0^T \left(\frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(u)\, dx \right)^2} \int_\Omega f(u) \phi dx \right) dt,$$

$$\text{pour tout } \phi \in C^\infty((0, \infty), \Omega).$$

On énonce le résultat principal

Théorème 4.2.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_1)-(H_2)$ *sont satisfaites. On suppose de plus que* $u_0 \in L^{k_0+2}(\Omega)$ *avec* k_0 *tel que*

$$k_0 \geq \max\big(0, \frac{\alpha N}{2} - 2\big). \tag{4.4}$$

Alors, il existe $d_0 > 0$ *tel que si* $\|u_0\|_{k_0+2} < d_0$, *le problème* (4.1) *admet une solution* u *vérifiant pour tout* $\tau > 0$

$$u \in L^\infty(\tau, +\infty, L^{k_0+2}(\Omega)), \qquad |u|^\gamma u \in L^\infty(\tau, +\infty, H_0^1(\Omega)), \text{ avec } \gamma = \frac{k_0}{2}.$$

De plus, si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *alors* $u \in L^\infty(\tau, +\infty, L^\infty(\Omega))$ *et est unique.*

Remarque. La valeur de d_0 est donnée explicitement au cours de la preuve.

preuve.

Le plan de la démonstration est le suivant :

(i) On construit des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin

(ii) On établit, pour ces solutions approchées, des estimations a-priori,

(iii) On passe à la limite (dans les termes non linéaires), grâce à des propriétés de compacité.

On introduit une suite $(w_j)_j$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_j \in H_0^1(\Omega), \forall j; \\ \forall j, w_1, ..., w_j \text{ sont linéarement indépendants}; \\ \text{Les combinaisons linéaires finies des } w_j \text{ sont denses dans } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Soit $(u_m) \subseteq D(\Omega)$ telle que $u_{0m} \to u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et soit $(w_j)_j \subseteq H_0^1(\Omega)$ une base spéciale. On cherche alors une suite $(u_m) = u_m(t)$ solution "approchée" du problème sous la forme

$$u_m(t) = \Sigma_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

l'inconnue g_{jm} étant à déterminer par le système différentiel ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \langle u'_m, w_j\rangle + (u_m, w_j) = \frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(u_m)\,dx\right)^2}\langle f(u_m), w_j\rangle,\ 1 \le j \le m, \\ \\ u_m(0) = u_{om}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Utilisant les hypothèses $(H_1)-(H_2)$ et le théorème d'existence de Cartan concernant les équations différentielles ordinaires [11] , on est assuré de l'existence d'une solution du système non linéaire (4.5) (noter que $det(w_i, w_j) \neq 0$ grâce à la linéaire indépendance de $w_1, ..., w_j$) dans un intervalle $[0; t_m[$; les estimations a-priori qui suivent montrent que $t_m = T$.

On Note par C_i les différentes constantes positives, dépendantes de données initiales mais pas de m.

On rappelle d'abord les inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg.

Lemme 4.2.1 *Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $u \in L^q(\Omega)$ et l'inégalité*

$$\|u\|_q \le c\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

est satisfaite avec c une constante strictement positive dépendante de $\Omega, p,$ et q pourvu que

$$\begin{cases} (i) 1 \le q \le \frac{Np}{N-p} & si\ N > P > 1; \\ \\ (ii) 1 \le q \le \infty & si\ N = p > 1;\ ou \\ \\ (iii) 1 \le q \le \infty & si\ 1 \le N < p. \end{cases}$$

Lemme 4.2.2 *(Inégalité de Gagliardo-Nirenberg.)*

Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega), p \ge 1,$ on a

$$\|u\|_q \le c\|u\|_r^{1-\theta}\|\nabla u\|_p^\theta$$

avec c une constante indépendante de Ω *et*

$$\theta = (r^{-1} - q^{-1})(N^{-1} - p^{-1} + r^{-1})^{-1}$$

pourvu que

$$\begin{cases} (i) 1 \leq r \leq q \leq \frac{Np}{N-p} & si\ N > P; \\ (ii) 1 \leq r \leq q \leq \infty & si\ 1 \leq N < p;\ ou \\ (iii) 1 \leq r \leq q \leq \infty & si\ N = p > 1. \end{cases}$$

En effet le lemme 4.2.2 est vérifié pour $0 < r < 1$ et utilisant ceci on a :

Lemme 4.2.3 *Pour tout u tel que* $|u|^\gamma u \in W^{1,p}, \gamma > 0, p > 1,$ *on a*

$$\|u\|_q \leq c\|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla(|u|^\gamma u)\|_p^{\frac{\theta}{\gamma+1}}$$

avec une constante c indépendante de Ω *et avec*

$$\theta = (\gamma+1)(r^{-1} - q^{-1})(N^{-1} - p^{-1} + (\gamma+1)r^{-1})^{-1}$$

pourvu que :

$$\begin{cases} (i) 1 \leq r \leq q \leq (\gamma+1)\frac{Np}{N-p} & si\ N > p; \\ (ii) 1 \leq r \leq q \leq \infty & si\ 1 \leq N < p;\ ou \\ (iii) 1 \leq r \leq q \leq \infty & si\ 1 \leq N < p. \end{cases}$$

L'étape essentielle est de prouver l'estimation L^∞ de solutions qui interprète mathématiquement la stabilité non linéaire du système. Pour ce faire, nous appliquons une approche classique utilisée par de nombreux auteurs, nous citons en références, par exemple, Nakao [54], Fila [36], etc...

Lemme 4.2.4 *Pour tout* $\tau > 0$*, il existe des constantes* $c_3(\tau), c_4(\tau)$ *tel que*

$$\|u_m(t)\|_{k_0+2} \leq c_3(\tau), \forall t \geq \tau, \tag{4.6}$$

$$\|u_m(t)\|_\infty \leq c_4(\tau), \forall t \geq \tau. \tag{4.7}$$

Preuve.

(i) Multipliant la première équation de (4.5) d'indice j par $|u_m|^k g_{jm},$, intégrant sur Ω, sommant de $j = 1$ à m et utilisant $(H_1) - (H_2)$, il vient que

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k+2}^{k+2} + \frac{4}{(k+2)^2}\|\nabla|u_m|^{\frac{k}{2}}u_m\|_2^2 \leq c_5\|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} + c_6\|u\|_{k+1}^{k+1}. \tag{4.8}$$

Or $L^{k+\alpha+2}(\Omega) \subset L^{k+1}(\Omega)$, donc

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k+2}^{k+2} + \frac{4}{(k+2)^2}\|\nabla|u_m|^{\frac{k}{2}}u_m\|_2^2 \leq c_5\|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} + c_6\|u\|_{k+\alpha+2}^{k+1}.$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{k+\alpha+2}^{k+1} &= \|u\|_{k+\alpha+2}^{(k+\alpha+2)\frac{k+1}{k+\alpha+2}}\\ &\leq \frac{k+1}{k+\alpha+2}\|u\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} + (1-\frac{k+1}{k+\alpha+2})\\ &\leq \frac{k+1}{k+\alpha+2}\|u\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} + 1.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k+2}^{k+2} + \frac{4}{(k+2)^2}\|\nabla|u_m|^{\frac{k}{2}}u_m\|_2^2 \leq c_7\|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} + c_8. \tag{4.9}$$

Par utilisation des inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\|u_m\|_{k_0+\alpha+2}^{k_0+\alpha+2} \leq c_9\|u_m\|_{k_0+2}^{\alpha}\|\nabla|u_m|^\gamma u_m\|_2^2, \tag{4.10}$$

k_0 est choisi de telle façon que l'inégalité (4.10) soit vérifiée. En effet, posant

$$q = k_0 + \alpha + 2$$

$$r = k_0 + 2$$

$$\gamma = \frac{k_0}{2}, p = 2.$$

Il vient

$$\|u\|_q^q \leq c\|u\|_r^{(1-\theta)q}\|\nabla(|u|^\gamma u)\|_p^{\frac{q\theta}{\gamma+1}}$$
$$\leq c\|u\|_r^{(1-\theta)q}\|\nabla(|u|^\gamma u)\|_p^p\|\nabla|u|^\gamma u\|_p^{\frac{q\theta}{\gamma+1}-p}$$

avec

$$\theta = (\gamma+1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}).(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}+\frac{\gamma+1}{r})^{-1}.$$

Or

$$1 \leq r \leq q \leq (\gamma+1)\frac{Np}{N-p} \text{ si } N > p;$$

donc

$$\|u\|_q^q \leq c\|u\|_r^\mu\|\nabla|u|^\gamma u\|_p^p\|u\|_r^{(1-\theta)q-\mu}\|\nabla|u|^\gamma u\|_p^{\frac{q\theta}{\gamma+1}-p}.$$

Posant ensuite $v = |u|^\gamma u$ alors $|v| = |u|^{\gamma+1}$, on a $|u| = |v|^{\frac{1}{\gamma+1}}$.

Par suite

$$\|u\|_r^{(1-\theta)q-\mu} = (\int |u|^r \, dx)^{\frac{(1-\theta)q-\mu}{r}}$$
$$= (\int |v|^{\frac{r}{\gamma+1}} \, dx)^{\frac{(1-\theta)q-\mu}{r}.(\frac{\gamma+1}{\gamma+1})}$$
$$= (\int |v|^{\frac{r}{\gamma+1}} \, dx)^{\frac{\gamma+1}{r}.\frac{(1-\theta)q-\mu}{\gamma+1}}$$
$$= \|v\|_{\frac{r}{\gamma+1}}^{\frac{(1-\theta)q-\mu}{\gamma+1}}$$
$$\leq \|v\|_{W_0^{1,p}}^{\frac{(1-\theta)q-\mu}{\gamma+1}}.$$

Donc

$$\|u\|_q^q \leq c\|u\|_r^\mu\|\nabla|u|^\gamma u\|_p^p\|v\|_{W_0^{1,p}}^{\frac{(1-\theta)q-\mu}{\gamma+1}+\frac{q\theta}{\gamma+1}-p}$$
$$\leq \|u\|_r^\mu\|\nabla|u|^\gamma u\|_p^p\|v\|_{W_0^{1,p}}^{\frac{q-\mu}{\gamma+1}-p} \quad ;$$

pour $\mu = \alpha$ on a $\frac{q-\mu}{\gamma+1} = p$. D'où (4.10).

Ainsi, de (4.9) et (4.10), on a

$$\frac{1}{k_0+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2} \leq (c_{10}\|u_m\|_{k_0+2}^{\alpha} - \frac{4}{(k_0+2)^2})\|\nabla|u_m|^{\gamma}u_m\|_2^2 + c_8. \tag{4.11}$$

Ici, on fait la condition de compatibilité sur u_0 suivante

$$\|u_0\|_{k_0+2} < \left(\frac{4}{c_{10}(k_0+2)^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = d_0. \tag{4.12}$$

Alors, sous cette condition on déduit de (4.11) pour $\tau > 0$ assez petit, que

$$\|u_m(t)\|_{k_0+2} < d_0 \text{ pour } t \in]0, \tau[. \tag{4.13}$$

Il s'ensuit alors

$$\frac{1}{k_0+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2} + c_{11}\|\nabla|u_m|^{\gamma}u_m\|_2^2 \leq c_8 \quad \forall \quad 0 < t < \tau. \tag{4.14}$$

Par l'inégalité de Poincaré et aprés intégration, on déduit que

$$\|u_m(t)\|_{k_0+2} \leq c_{12}, \quad \forall \quad 0 < t < \tau.$$

On reitère successivement le même procédé sur des intervalles de période τ tels que $[0, \tau], [\tau, t+\tau], ...$ On obtient alors la relation (4.6).

(ii) Par l'inégalité de Hôlder, on a

$$\|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} \leq c_{13}\|u_m\|_{k+2}^{\theta_1}\|u_m\|_{k_0+2}^{\theta_2}\|u_m\|_q^{\theta_3}, \tag{4.15}$$

où

$$q = \begin{cases} (k+2)\frac{N}{N-2} & \text{si } N > 2, \\ \nu(k+2) & \text{si } N = 2, \\ \infty & \text{si } 1 < N < 2, \end{cases}$$

avec ν un nombre fixé suffisament grand et θ_1, θ_2 et θ_3 des constantes positives qui doivent satisfaire

$$\frac{\theta_1}{k+2} + \frac{\theta_2}{k_0+2} + \frac{\theta_3}{q} = 1$$

et

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = k + \alpha + 2.$$

On impose en plus la relation

$$\frac{\theta_1}{k+2} + \frac{\theta_3}{k+2} = 1.$$

Alors, θ_1, θ_2 et θ_3 sont choisies de la manière suivante

$$\theta_1 = (k+2)\{1 - \frac{q\alpha}{(k_0+2)(q-k+2)}\},$$

$$\theta_2 = \alpha$$

et

$$\theta_3 = \frac{q\alpha(k+2)}{(k_0+2)(q-k+2)},$$

avec les modifications triviales pour $q = \infty$.

Par le choix de q et la condition sur k_0 les constantes $\theta_i(1,2,3)$ sont positives. On note aussi que θ_2 est bornée par une constante indépendante de k. En utilisant le fait que $\|u_m\|_{k_0+2}$ est borné, l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Young, on déduit de (4.15) que

$$\begin{aligned} c_7 \|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2} &\leq c_{13} \|u_m\|_{k+2}^{\theta_1} \|\nabla |u_m|^{\frac{k}{2}} u_m\|_2^{\frac{\theta_3}{\gamma+1}} \\ &\leq c_{14}(k+2)^{\theta_4} \|u_m\|_{k+2}^{k+2} + \frac{2}{(k+2)^2} \|\nabla |u_m|^{\frac{k}{2}} u_m\|_2^2, \end{aligned}$$

pour une certaine constante positive θ_4

$$\begin{cases} \theta_4 = 2\frac{\theta_3}{\theta_1} = \frac{2N\alpha}{2(k_0+2)-N\alpha}, & si \quad N > 2 \\ et & \\ \theta_4 = \frac{2\alpha}{k_0+1}, & si \quad N < 2. \end{cases}$$

L'inégalité (4.9) devient donc

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k+2}^{k+2} + \frac{4}{(k+2)^2}\|\nabla|u_m|^{\frac{k}{2}}u_m\|_2^2 \leq c_{16}(k+2)^{\theta_4}\|u_m\|_{k+2}^{k+2} + c_8.$$

Par utilisation du lemme 4 ([36]), il résulte que

$$\|u_m\|_{L^\infty} \leq c_4(\tau), \quad \forall t \geq \tau.$$

Passage à la limite dans (4.5) **quand** $m \to \infty$**.**

Multipliant la j ème équation du système (4.5) par $g_{jm}(t)$, sommant ensuite de $j = 1, ..., m$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 &= \frac{\lambda}{(\int f(u_m)\,dx)^2}\int_\Omega f(u_m)\,u_m dx \\ &\leq c\|u_m\|_1 \\ &\leq c\|\nabla u_m\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + c, \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \leq c.$$

Intégrant cette dernière inégalité par rapport à la variable temps, on en déduit que

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c, \tag{4.16}$$

la constante c étant indépendante de m.

On en déduit alors que $t_m = T$ et (4.16) s'écrit, lorsque $m \to \infty$,

$$u_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\bigcap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Par conséquent, on peut extraire de u_m une sous-suite notée encore u_m telle que

$$u_m \to u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$u_m \to u \text{ faible dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_{mt} \to u_t \text{ faible dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Posant

$$W(0,T) = \left\{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\},$$

on déduit de ([51], p. 58) que

$$\text{l'injection de } W(0,T) \text{ dans } L^2(Q_T) = L^2(0,T,L^2(\Omega)) \text{ est compacte.}$$

On peut donc supposer que la sous-suite extraite u_m vérifie en plus

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fort et presque partout (p.p.)}$$

Ainsi, on peut passer à la limite dans (4.5) et obtenir que u est une solution du problème (4.1).

Unicité.

Considérons u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (4.1) et définisons $w = u_1 - u_2$. Par soustraction des équations vérifiées par u_1 et u_2, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} - \triangle w = &\frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(u_1)\,dx\right)^2}\Big(f(u_1)-f(u_2)\Big)\\ &+\lambda\frac{\Big(\int_\Omega (f(u_2)-f(u_1))\,dx\Big)\Big(\int_\Omega (f(u_2)+f(u_1))\,dx\Big)}{\left(\int_\Omega f(u_1)\,dx\right)^2\left(\int_\Omega f(u_2)\,dx\right)^2}f(u_2). \quad (4.17)\end{aligned}$$

Prenant le produit scalaire de (4.17) par w et utilisant l'hypothèse (H_1) et l'estimation (4.7), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 \leq c_{16}\|w(t)\|_2^2,$$

puisque

$$-\int_\Omega \triangle w.w\,dx \geq 0.$$

Ce qui implique que $w = 0$. Donc la solution est unique.

b) On définit l'opérateur $T(t) : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$, par $T(t)u_0 = u(t)$ est la solution du problème

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^2}, \\ u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u/_{t=0} = u_0. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Cet opérateur non linéaire est bien défini et continu d'aprés le résultat d'existence et d'unicité du théorème (4.2.1).

Pour les concepts d'ensembles absorbants et d'attracteurs globaux utilisés dans cette partie, on se reféré à Temam [57] .

Corollaire 4.2.1 *Sous les hypothèses du théorème* (4.2.1) *le problème* (4.1) *engendre un semi-groupe continu* $T(t) : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ *défini par* $T(t)u_0 = u(t)$

Par les estimations du lemme 4.2.4, on déduit en utilisant le lemme 2.5.5 (chapitre 2), la proposition suivante

Proposition 4.2.1 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$, *le semi-groupe* $T(t)$ *associé au problème* (4.1) *est tel que*

(i) Il existe des ensembles absorbants dans $L^k(\Omega)$, *pour* $1 \leq k \leq +\infty$.

(ii) Il existe des ensembles absorbants dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve.

(i) Existence d'ensembles absorbants dans L^∞.

Soit u la solution de (4.1) et u_m la solution de (4.5) approchant u, alors (4.7) implique que pour tout $t \geq \tau > 0$

$$\|u_m(t)\|_{L^k(\Omega)} \leq c_4(\tau), \quad \text{pour tout } k : 1 \leq k < +\infty.$$

De la dernière inégalité, on obtient donc

$$\|u(t)\|_{L^k(\Omega)} \leq c_4(\tau), \quad \text{pour tout } k : 1 \leq k < +\infty.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient aussi

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_4(\tau), \quad \text{pour tout } t \geq \tau.$$

Par conséquent, la boule ouverte $B(0, c_4(\tau))$ de centre 0 et de rayon $c_4(\tau)$ est un ensemble absorbant dans $L^k(\Omega), 1 \leq k \leq +\infty$. D'où le point (i).

(ii) Existence d'ensembles absorbants dans $H_0^1(\Omega)$.

Multipliant l'équation (4.5) par $g'_{jm}(t)$, sommant de $j = 1, ..., m$, intégrant sur Ω et utilisant l'inégalité de Young, il résulte que, pour tout $t \geq \tau > 0$

$$\int_\Omega (\frac{\partial u_m}{dt})^2 dx + \frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 \leq c_{17}(\tau), \tag{4.19}$$

on déduit donc que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 \leq c_{17}(\tau), \forall t \geq \tau > 0. \tag{4.20}$$

D'autre part, multipliant (4.5) par $g_{jm}(t)$, sommant et intégrant sur $\Omega \times [t, t+\tau]$ pour $\tau > 0$ fixé, on obtient

$$\int_t^{t+\tau} \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds \leq c_{18}(\tau), \forall t \geq \tau > 0. \tag{4.21}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'uniforme compacité de $T(t)$. Pour ce faire, on considère $T_m(t)$ défini par

$$T_m(t)u_{0m} = u_m(t) \quad \Leftrightarrow \quad u_m(t) \text{ est solution de (4.5).}$$

On sait que $T_m(t)u_{0m}$ converge vers $T(t)u_0$ dans $L^2(\Omega)$, donc par le lemme uniforme de Gronwall (see [57], p.89) et la semi-continuité inférieure de la norme par rapport à la topologie faible, on obtient

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq c_{19}(\tau), \forall t \geq \tau. \tag{4.22}$$

Alors, la boule $B(0, c_{19}(\tau))$ est un ensemble absorbant dans $H_0^1(\Omega)$.

L'opérateur non linéaire $T(t)$ définit un semi-groupe de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ et les hypothèses (1.1), (1.4) et (1.12) du chapitre I de [57] sont satisfaites. De plus, on a prouvé l'existence d'ensembles absorbants dans $L^\infty(\Omega)$, alors le théorème 1.1 de ([57], p .23) avec $U = L^\infty(\Omega)$ donne le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les hypothèses $(H_1)-(H_2)$ sont satisfaites. Alors le semi-groupe $T(t)$ associé au problème aux limites* (4.1) *posséde un attracteur maximal $\mathbb{A}$, borné dans $H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, compact et connexe dans $L^2(\Omega)$. Son bassin d'attraction est l'espace $L^\infty(\Omega)$, $\mathbb{A}$ attire les ensembles bornés de $L^\infty(\Omega)$.*

Régularité de solutions.

Dans cette partie, on établit des estimations supplémentaires qui assurent d'autres propriétés de régularité de l'attracteur $\mathbb{A}$. Pour cela, on suppose que la non linéarité f vérifie de plus

(H3) $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Théorème 4.2.3 *On suppose que $(H_1)-(H_3)$ sont vérifiées, alors on a*

$$y(t) \equiv \|u_t\|^2 \leq c_{20}(\tau), \forall t \geq \tau.$$

Preuve.

Dérivant formellement l'équation (4.1) par rapport à t (la justification de cette dérivation ainsi que celle des formules de dérivations seront données dans le paragraphe suivant comme cela a été fait dans [29, 35]), on obtient

$$u_{tt} - \triangle u_t = \frac{\lambda f'(u)u_t}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^2} - 2\lambda f(u)\frac{\int_\Omega f'(u)u_t\,dx}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^3}. \tag{4.23}$$

Multipliant (4.23) par u_t, intégrant sur Ω et utilisant (H_3), l'estimation L^∞ de u et l'inégalité de Hôlder, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 \leq c\int_\Omega f'(u)(u_t)^2\,dx + c(\int_\Omega f(u)u_t)(\int_\Omega f'(u)u_t\,dx)\\
&\leq c(\tau)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + c(\tau)(\int_\Omega u_t\,dx)^2\\
&\leq c(\tau)\|u_t\|^2 + c(\tau)\|u_t\|^2\\
&\leq c_{21}(\tau)\|u_t\|^2.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}y'(t) \leq c_{21}(\tau)y(t). \tag{4.24}$$

D'autre part, prenant le produit scalaire de (4.1) par u_t, utilisant l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
y(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 &\leq c(\int_\Omega f(u)u_t)\\
&\leq \frac{1}{2}y(t) + c(\tau).
\end{aligned}$$

Intégrant sur $[t, t+\tau]$ et en se servant de l'estimation (4.22), on obtient donc

$$\int_t^{t+\tau} y(s)ds \leq c_{23}(\tau), \text{ pour tout } t \geq \tau. \tag{4.25}$$

Par les estimations (4.24) et (4.25), les hypothèses du lemme uniforme de Gronwall sont vérifiées et impliquent

$$y(t) \leq c_{23}(\tau), \text{ pour tout } t \geq \tau.$$

Par suite, on obtient

$$u_t \in L^\infty(\tau, \infty, L^2(\Omega)).$$

L'équation (4.1) donne alors

$$-\triangle u \in L^\infty(\tau, \infty, L^2(\Omega)),$$

en d'autres termes,

$$u(t) \quad \text{demeure dans un ensemble borné de } H^2(\Omega).$$

4.3 Justification en dimension finie.

On se propose maintenant de donner une justification à la dérivation formelle du paragraphe précédent.

Soit $(w_j)_{j=1,2..}$ un système complet. On cherche une suite de fonctions approchant u, sous la forme

$$u_m(t) = \Sigma_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

où les inconnues $g_{jm}(t)$ sont déterminées à l'aide du système (4.5) d'équations différentielles ordinaires avec

$$u_{0m}(t) = \Sigma_{j=1}^m \alpha_{jm}(t) w_j \text{ converge vers } u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort.}$$

On note :

$$G_m(t) = (g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t))$$

et pour

$$x \in \Omega, \zeta, \eta \in \mathbb{R}^m, w(x) = (w_1(x), ..., w_m(x)), \nabla w(x) = (\nabla w_1(x), ..., \nabla w_m(x))\zeta.\eta = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j \eta_j.$$

$$A \text{ la matrice } (m,n) \text{ de Gram de terme général } \int_\Omega w_i(x) w_j(x)\, dx,$$
$$\varphi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \zeta \to \int_\Omega \nabla w \zeta . \nabla w_j(x) dx,$$
$$\psi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \zeta \to \frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(w(x).\zeta)\, dx\right)^2} \int_\Omega f(w(x).\zeta) w_j(x)\, dx,$$
$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \text{ et } \overline{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_m).$$

Donc

$$u_m(t,x) = w(x).G_m(t) \text{ et } \nabla u_m(t,x) = \nabla w(x).G_m(t).$$

Le système (4.5) s'écrit (A étant inversible)

$$\mathbb{S} = \begin{cases} \frac{dG_m(t)}{dt} & = \phi(G_m(t)), \\ G_m(0) & = \alpha_m \end{cases}$$

où $\phi(\zeta) = A^{-1}(\overline{\psi}(\zeta) - \varphi(\zeta))$ et $\alpha_m = (\alpha_{1m}, ..., \alpha_{mm})$.

Puisque f est localement lipschitzienne, ϕ l'est aussi.

L'existence de G_m, solution de $\mathbb{S}$ est assurée sur un intervalle $(0, t_m)$. Les estimations qui suivent prouvent en fait que $t_m = T$.

Multipliant (4.5) par $g_{jm}(t)$ sommant de $j = 1$ à m, comme pour les estimations précédentes, aprés intégration sur Ω et utilisation du lemme de Gronwall, il vient

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_{24}(T).$$

De même, multipliant par $g'_{jm}(t)$, sommant de $j = 1$ à m et intégrant sur Ω, on obtient

$$\|u'_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_{25}(T).$$

On en déduit que

$$u_m \in C([0,T]; L^2(\Omega)),$$

or

$$u_m(t,x) = w(x).G_m(t),$$

donc

$$G_m \in C([0,T]; \mathbb{R}^m).$$

Par conséquent, par la théorie classique des équations différentielles ordinaires, cf. par exemple, [11] p.123, on a $t_m = T$.

La proposition suivante est essentielle pour la justification de la dérivation formelle effectuée sur (4.23).

Proposition 4.3.1

$$G_m \in C^2([0,T]; \mathbb{R}^m).$$

Preuve.

Il suffit de montrer que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, cf. par exemple [11] p. 146.

On pose $F_j(x,\zeta) = \nabla w(x)\zeta.\nabla w_j(x)$ pour $x \in \Omega, \zeta \in \mathbb{R}^m, 1 \leq j \leq m$,

donc

$$\varphi_j(\zeta) = \int_\Omega F_j(x,\zeta)\, dx.$$

On a

$$\nabla w(x)\zeta = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k \nabla w_k(x).$$

D'où

$$F_j(x,\zeta) = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k \nabla w_k(x).\nabla w_j(x).$$

Par conséquent, $F_j(x,.) \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \forall x \in \Omega, 1 \leq j \leq m$ et $\forall \zeta \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_h}(x,\zeta) = \nabla w_h.\nabla w_j.$$

On a

$$|\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_h}(x,\zeta)| \leq \|w(x)\|^2.$$

On applique ensuite les théorèmes de continuité et de dérivabilité de Lebesgue [39], pp. 136-137, pour obtenir :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta_h} \text{ existe et continue sur } \mathbb{R}^m \text{ et par conséquent } \varphi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

et

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta_h}(\zeta) = \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_h}(x,\zeta)\, dx.$$

De même, posant

$$f^j(x,\zeta) = \frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(\zeta.w(x))\, dx\right)^2} f(\zeta.w(x))w_j(x)$$

et donc

$$\psi_j(\zeta) = \int_\Omega f^j(x,\zeta)\, dx.$$

Puisque $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, on a : $f^j \in C^1$.

De plus

$$|\frac{\partial f^j}{\partial \zeta_h}(x,\zeta)| \leq c_{26}\|w(x)\|_2^2.$$

On applique de nouveau les théorèmes de continuité et de dérivabilité de Lebesgue, on obtient

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m).$$

Par conséquent $\phi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et $G_m \in C^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ et on peut dériver dans (4.23) par rapport à t.

4.4 Cas général

On s'intéresse maintenant au problème suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle_p u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^2}, \text{ dans } \Omega\times]0;T[,\\ &u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]0;T[, \\ &u/_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{4.26}$$

Sous les mêmes conditions $(H_1) - (H_2)$. On établit de la même façon des résultats similaires que dans la section antérieure.

Définition 4.4.1 *On entend par solution de* (4.26) *toute fonction u vérifiant*

$$u \in L^\infty(\tau, +\infty, W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \text{ avec } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\tau, +\infty, L^2(\Omega))$$

pour tout $\tau > 0$, *et satisfaisant les équations suivantes*

$$\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial t}\phi - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\, dxdt = \int_0^T \left(\frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^2} \int_\Omega f(u)\phi dx\right)dt,$$

pour tout $\phi \in C^\infty((0,\infty),\Omega)$.

Existence et unicité.

Théorème 4.4.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$ *sont satisfaites. On suppose en plus que* $u_0 \in L^{k_0+2}(\Omega)$ *avec* k_0 *tel que*

$$k_0 \geq \max\left(0, \frac{N(\alpha + 2 - p)}{p} - 2\right). \tag{4.27}$$

Alors, il existe $d_1 > 0$ *tel que si* $\|u_0\|_{k_0+2} < d_1$, *le problème* (4.26) *admet une solution u verifiant pour tout* $\tau > 0$

$$u \in L^\infty(\tau, +\infty, L^{k_0+2}(\Omega)), \qquad |u|^\gamma u \in L^\infty(\tau, +\infty, W_0^{1,p}(\Omega)), \text{ avec } \gamma = \frac{k_0}{p}.$$

De plus, si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *alors* $u \in L^\infty(\tau, +\infty, L^\infty(\Omega))$ *et est unique.*

Preuve. La démonstration est quasiment la même que celle de la section précédente. La seule différence est le passage qui donne l'estimation L^∞ de la solution où l'on utilise le lemme de Ghidaglia.

Réduisant le problème en dimension finie , multipliant l'équation par $|u_m|^k u_m$ et utilisant $(H_1)-(H_2)$, on déduit que

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k+2}^{k+2}+\frac{p^p(k+1)}{(k+2)^p}\|\nabla|u_m|^{\frac{k}{2}}u_m\|_2^2 \leq c_{27}\|u_m\|_{k+\alpha+2}^{k+\alpha+2}+c_{28}. \tag{4.28}$$

Pour k_0 satisfaisant (4.27), on a d'aprés les inégalités de sobolev et de Gaglairdo-Nirenberg

$$\|u_m\|_{k_0+\alpha+2}^{k_0+\alpha+2} \leq c_{29}\|u_m\|_{k_0+2}^{\mu}\|\nabla|u_m|^{\gamma}u_m\|_p^p, \tag{4.29}$$

avec $\mu=\alpha+2-p>0$.

On obtient alors

$$\frac{1}{k_0+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2} \leq (c_{29}\|u_m\|_{k_0+2}^{\alpha}-\frac{4}{(k_0+p)^p})\|\nabla|u_m|^{\gamma}u_m\|_p^p+c_{28}. \tag{4.30}$$

On introduit la condition suivante sur u_0 :

$$\|u_0\|_{k_0+2}<\Big(\frac{4}{c_{29}(k_0+2)^2}\Big)^{\frac{1}{\mu}}=d_1. \tag{4.31}$$

Par suite, il existe $\tau>0$ assez petit tel que

$$\|u_m(t)\|_{k_0+2}<d_1 \text{ pour } t\in]0,\tau[. \tag{4.32}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{k_0+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2}+c_{30}\|\nabla|u_m|^{\gamma}u_m\|_p^p \leq c_{28} \quad \forall \quad 0<t<\tau. \tag{4.33}$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$\frac{1}{k_0+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2}+c_{31}\int_\Omega |u_m|^{k_0+p}\,dx \leq c_{28} \quad \forall \quad 0<t<\tau.$$

Posant $y_{k_0}(t) = \|u_m\|_{k_0+2}^{k_0+2}$. D'aprés l'inégalité de Hôlder, il existe une constante $c_{31} > 0$ telle que

$$\frac{dy_{k_0}(t)}{dt} + c_{31}\, y_{k_0}^{\frac{k_0+p}{k_0+2}} \leq c_{28} \quad \forall \quad 0 < t < \tau.$$

Pour continuer la preuve on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *(Ghidaglia [Temam] [57])*

Soit y une fonction positive et absolument continue sur $]0;+\infty[$ qui satisfait

$$y' + \gamma y^{\nu} \leq \delta$$

avec $\nu > 1, \gamma > 0, \delta \geq 0$. Alors pour tout $t > 0$, on a

$$y(t) \leq (\frac{\delta}{\gamma})^{\frac{1}{\nu}} + [\gamma(\nu-1)t]^{-\frac{1}{(\nu-1)}}.$$

Remarque. Le lemme 4.4.1 de Ghidaglia implique aussi que pour chaque $\tau > 0$, il existe une constante $c(\tau)$ indépendante de la donnée initiale $y(0)$ telle que : $y(t) \leq c(\tau)$ pour tout $t \geq \tau > 0$. $\square$

Revenant à la preuve et remarquant que pour $p > 2$ on a $\frac{k_0+p}{k_0+2} > 1$ et le lemme de Ghidaglia implique alors

$$y_{k_0}(t) \leq (\frac{c_{28}}{c_{31}})^{\frac{1}{\frac{k_0+p}{k_0+2}}} + [c_{31}(\frac{p-2}{k_0+2})t]^{-\frac{k_0+2}{p-2}}. \quad \forall \quad 0 < t < \tau.$$

On a donc, $\forall t \geq \tau$,

$$\|u_m\|_{k_0+2} \leq c_{32}(\tau).$$

Le reste de la preuve suit les mêmes étapes bien sûr avec les modifications à apporter.

Chapitre 5

Semi-discrétisation du problème parabolique non local

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on continue notre étude de l'équation parabolique non locale dans une direction différente que celle du chapitre 3 . Les questions que nous traitons, ici, sont liées à la consistance et la validité des solutions numériques comme approximations de ces équations lorsque le temps devient trés grand. Nous proposons d'étudier la discrétisation temporelle du problème continu par un schéma du type Euler où, en plus des résultats standards d'existence, d'unicité et de stabilité, nous établissons quelques estimations d'erreurs et nous étudions le comportement asymptotique des solutions du problème semi-discrétisé. Notre travail s'inspire d'un certain nombre de travaux concernant les problèmes paraboliques doublement non linéaires notamment par El Hachimi-Benzekri [30], Eden-Michaux-Rakotoson [27, 28] et Magenes [53]. Bien qu' on ne traite pas une discrétisation complète (sapatiale et temporelle) l'étude du problème semi-discrétisé s'avère intéressante et permet d'obtenir des informations supplémentaires sur le comportement asymptotique du système.

Plus précisément, nous nous intéressons au problème de la forme suivante

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^2}, \text{ dans } \Omega\times]0;T[,\\
&u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega\times]0;T[,\\
&u(0) = u_0 \quad \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d \geq 2)$ un domaine borné régulier, λ un paramétre positif et $\triangle$ le laplacien par rapport aux variables d'espace dans $\mathbb{R}^d$. Les hypothèses sur f restent les mêmes que dans le chapitre précédent.

On rapelle d'abord que (5.1) provient de la réduction du système suivant gouverné par des équations aux dérivées partielles modélisant le problème du thermistor

$$
\begin{aligned}
&u_t = \nabla.(k(u)\nabla u) + \sigma(u)|\nabla\varphi|^2,\\
&\nabla(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

la première étant parabolique et la deuxième elliptique et où u est la température induite par un courant électrique se propageant à travers un conducteur, φ le potentiel électrique, $\sigma(u)$ et $k(u)$ sont respectivement la conductivité électrique et thermique. Pour plus de détails, on peut se référer entre autres à [33, 48, 49] et [58].

Le comportement asymptotique des solutions de ces équations est étudié via la théorie des attracteurs telle qu'elle a été introduite par Temam dans [57].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 5.2, on discrétise le problème (5.1) par un schéma du type Euler et on le remplace par

$$(\mathbb{D}_\tau^n) \qquad \begin{aligned} U^n - \tau\triangle U^n &= U^{n-1} + \lambda\tau \frac{f(U^n)}{\left(\int_\Omega f(U^n)\,dx\right)^2}, \text{ dans } \Omega, \\ U^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ U^0 &= u_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On prouve dans ce paragraphe des résultats d'existence et d'unicité de U^n.

Le paragraphe 5.3 est consacré à l'analyse de la stabilité du problème semi-disrétisé. Dans le paragraphe suivant consacré à l'analyse d'erreurs, on obtient des estimations d'ereurs optimales. Ici encore, l'estimation L^∞ est un ingrédient principal. Dans [2], les auteurs ont prouvé des estimations du type L^2 et H^1 sur l'erreur en exigeant plus de régularité sur la solution u, par exemple, u, u_t dans $H^2(\Omega)\cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Malheuresement, ceci n'est pas toujours possible puisque f est non linéaire.

Finalement, le système dynamique semi-discrétisé $(\mathbb{D}_\tau^n)$, où l'existence est garantie par les résultats des paragraphes antérieurs, est considéré dans le paragraphe 5.5 pour prouver l'existence d'ensembles absorbants dans $L^\infty(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$. Ce qui permet, en vérifiant l'uniforme compacité de l'opérateur semi-groupe, de prouver l'existence d'attracteur global $\mathbb{A}_\tau$, i.e., d'ensemble compact maximal qui attire toutes les trajectoires (solutions) discrètes ; en se basant sur une version discrète du lemme de Gronwall uniforme.

5.2 Le problème semi-discrétisé

a) Existence unicité.

On considère, dans ce paragraphe, le schéma du type Euler de (5.1) suivant :

$$(\mathbb{D}_\tau^n)\qquad \begin{aligned} U^n - \tau\triangle U^n &= U^{n-1} + \lambda\tau\frac{f(U^n)}{\big(\int_\Omega f(U^n)\,dx\big)^2}, \text{ dans } \Omega,\\ U^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,\\ U^0 &= u_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

où $N\tau = T, T > 0$ (fixé) et $1 \leq n \leq N$; sous les hypothèses suivantes :

(H1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne.

(H2) Il existe des constantes positives σ, c_1, c_2 et α telle que $\alpha < \frac{4}{d-2}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\sigma \leq f(\xi) \leq c_1|\xi|^{\alpha+1} + c_2.$$

Dans la suite, on note les normes dans les espaces $L^\infty(\Omega), L^k(\Omega)$ par $|.|_{L^\infty(\Omega)}$ et $|.|_k$ respectivement.

$(.,.)$ note le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ ou le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 5.2.1 *On suppose que les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ sont satisfaites. Alors, pour tout n, il existe une solution unique U^n de* (5.3) *dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pourvu que τ est suffisament petit.*

Preuve.

Pour simplicité, on écrit $U = U^n, h(x) = U^{n-1}$. Alors (5.3) devient

$$\begin{aligned} U - \tau\triangle U &= h(x) + \lambda\frac{f(U)}{\big(\int_\Omega f(U)\,dx\big)^2}, \text{ dans } \Omega,\\ U &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Existence.

On définit l'opérateur $S(\mu, .)$ par $U = S(\mu, v), \mu \in [0, 1]$ si et seulement si

$$U - \tau \triangle U = \mu g(x, v) \text{ dans } \Omega,$$
$$U = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \tag{5.5}$$
$$U^0 = \mu u_0,$$

avec $g(x, v) = h(x) + \lambda \frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(v)\, dx\right)^2}$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$ fixé, il est évident que (5.5) admet une solution unique $U \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour chaque $\mu \in [0, 1]$, l'opérateur $S(\mu, .)$ est bien défini.

De plus, $S(\mu, .)$ est compact de $H_0^1(\Omega)$ dans lui même.

En effet, multipliant la première équation de (5.5) par U et utilisant l'hypothèse (H_2), on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&|U|_2^2 + \tau |\nabla U|_2^2 \leq \int (c_3 + c_4 |v|^{\alpha+1}) |U| \\
&\leq |v|_{\alpha+2}^{\alpha+1} |U|_{\alpha+2} + c_5 |U|_2 \\
&\leq c_6 |v|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha+1} |U|_{H_0^1(\Omega)} + c_5 |U|_2 \\
&\leq \frac{\tau}{2} |U|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\tau} |v|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2} |U|_2^2 + c_7.
\end{aligned}$$

Donc

$$|U|_2^2 + \tau |\nabla U|_2^2 \leq |v|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\alpha+1)} + c_7.$$

D'autre part, on peut voir facilement que $\mu \to S(\mu, v)$ est continu et que $S(0, v) = U$, pour tout v, si et seulement si $U = 0$.

D'aprés le théorème du point fixe de Leray-Schauder, $S(1, .)$ posséde par conséquent un point fixe U. En effet, notant par $B(0, \widetilde{c_7})$ la boule de rayon $\widetilde{c_7}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $d(I - S(\mu, .), B(0, \widetilde{c_7}), 0) = d(I - S(0, .), B(0, \widetilde{c_7}), 0) = d(I, B(0, \widetilde{c_7}), 0) = 1 \neq 0$, o ù $d(H, B(0, \widetilde{c_7}), 0)$ désigne le degré topologique de H dans $B(0, \widetilde{c_7})$ par rapport au point cible 0.

Nous établissons ensuite des estimations a-priori.

Lemme 5.2.1 *Si* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *alors pour tout* $n \in \{1, ..., N\}, U^n \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve.

La preuve est inspirée d'un travail réalisé par De Thelin dans [26] concernant un problème différent. Nous allons l'inclure ici pour que le travail soit complet.

Supposons que $d \geq 2$ et définissons :

$$\delta = \begin{cases} \frac{2d}{d-2} & \text{si } 2 < d, \\ 2(\alpha + 2) & \text{si } d = 2. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}*$, on définit la suite :

$$q_k = \{(\frac{\delta}{2})^{k-1}(\delta - \gamma) - (2 - \gamma)\}\frac{\delta}{\delta - 2}, \quad k \geq 2$$

et

$$q_1 = \delta.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$q_{k+1} = (q_k + 2 - \gamma)\frac{\delta}{2} \text{ avec } \gamma = \alpha + 2.$$

Lemme 5.2.2 $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^n \in L^{q_k}(\Omega)$ *et de plus*

$$|U^n|_\infty = \overline{lim}|U^n|_{q_k} < +\infty. \tag{5.6}$$

Preuve.

Montrons par récurrence que $U \in L^{q_k}(\Omega)$.

La propriété est vraie pour $k = 1$, puisque l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^\delta(\Omega)$ est continue. Montrons que $U \in L^{q_{k+1}}(\Omega)$. Soit $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq k$. Multipliant l'équation (5.4) par $|U|^{q_m-\gamma}U$, on a

$$(q_m - \gamma + 1) \int_\Omega |\nabla U|^2 |U|^{q_m-\gamma}\, dx = \int_\Omega -\triangle U |U|^{q_m-\gamma} U\, dx$$
$$= \int_\Omega (-U + g(x, U))|U|^{q_m-\gamma} U\, dx.$$

Or

$$g(x, U) \leq c_8 |U|^{\alpha+1} + c_9,$$

donc

$$(q_m - \gamma + 1) \int_\Omega |\nabla U|^2 |U|^{q_m-\gamma}\, dx \leq - \int_\Omega |U|^{q_m-\gamma+2}\, dx + \int_\Omega (c_8 |U|^{\alpha+1} + c_9)|U|^{q_m-\gamma+1}\, dx$$
$$\leq c_8 \int_\Omega |U|^{\alpha+1} |U|^{q_m-\gamma+1}\, dx + c_9 \int_\Omega |U|^{q_m-\gamma+1}\, dx$$
$$\leq c_8 |U|_{q_m}^{q_m} + c_9 |U|_{q_m-(\alpha+1)}^{q_m-(\alpha+1)}$$
$$\leq c_8 |U|_{q_m}^{q_m} + c_9 |U|_{q_m}^{q_m-(\alpha+1)}.$$

D'où, par application de l'inégalité de Young :

$$(q_m - \gamma + 1) \int_\Omega |\nabla U|^2 |U|^{q_m-\gamma}\, dx \leq c_{10} + c_{11} |U|_{q_m}^{q_m}. \tag{5.7}$$

Par ailleurs, il existe une constante K telle que :

$$\forall w \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad |w|_\delta \leq K |\nabla w|_2,$$

donc

$$\begin{aligned}
|U|_{q_{m+1}}^{q_m+2-\gamma} &= (\int_\Omega |U|^{q_{m+1}}\,dx)^{\frac{q_m+2-\gamma}{q_{m+1}}} \\
&= (\int_\Omega |U|^{(q_m+2-\gamma)\frac{\delta}{2}}\,dx)^{\frac{2}{\delta}} \\
&= \Big(\int (|U|^{1+\frac{q_m-\gamma}{2}})^{\delta}\,dx\Big)^{\frac{2}{\delta}} \\
&= |\quad |U|^{1+\frac{q_m-\gamma}{2}}|_\delta^2 \\
&\le K^2 \int_\Omega |\nabla(|U|^{1+\frac{q_m-\gamma}{2}})|^2 \\
&\le (1+\frac{q_m-\gamma}{2})^2 K^2 \int_\Omega |\nabla U|^2 |U|^{q_m-\gamma}\,dx.
\end{aligned}$$

Il en résulte alors avec (5.7), que

$$|U|_{q_{m+1}}^{q_m+2-\gamma} \le \{c_{11} + c_{12}|U|_{q_m}^{q_m}\}(q_m+2-\gamma)^2.$$

On en déduit par récurrence sur m que U est dans chaque $L^{q_m}(\Omega), 1 \le m \le k+1$.

On obtient donc la relation

$$(|U|_{q_{k+1}}^{q_{k+1}})^{\frac{2}{\delta}} \le \{c_{11} + c_{12}|U|_{q_k}^{q_k}\}(q_k+2-\gamma)^2.$$

Remarquant que

$$q_k \le \delta(\frac{\delta}{2})^{k-1}$$

et posant :

$$a = \frac{\delta}{2},$$

$$b = \frac{\delta}{2}\log\max\{1, c_{11}+c_{12}\},$$

$$E_k = q_k \log\max\{1, |U|_{q_k}\},$$

$$r_k = b + \delta(k-1)\log a,$$

il vient :

$$E_{k+1} \le r_k + aE_k \le r_k + ar_{k-1} + ... + a^{k-1}r_1 + a^k E_1.$$

Des calculs élémentaires donnent alors

$$\begin{aligned} E_{k+1} &\leq a^k\{E_1 + \frac{b}{a-1} + \frac{\delta \log a}{(a-1)^2}\} \\ &= da^k. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que,

$$\begin{aligned} \|U\|_\infty \leq \limsup_{k\to+\infty} \exp(\frac{E_k}{q_k}) \\ &\leq \limsup_{k\to+\infty} \exp(\frac{da^{k-1}}{q_k}) \\ &\leq \exp(\frac{d}{\delta}). \end{aligned}$$

Unicité.

considérons U et V deux solutions différentes de (5.4) et définissons $w = U - V$. Alors, on a

$$\begin{aligned} w - \tau\triangle w = \frac{\lambda\tau}{\big(\int_\Omega f(U)\,dx\big)^2}\Big(f(U) - f(V)\Big) \\ + \lambda\tau\frac{\Big(\int_\Omega (f(U)-f(V))\,dx\Big)\Big(\int_\Omega (f(V)+f(U))\,dx\Big)}{\big(\int_\Omega f(U)\,dx\big)^2\big(\int_\Omega f(V)\,dx\big)^2} f(V). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Multipliant (5.8) par w, et intégrant sur Ω et utilisant l'estimation L^∞ obtenue dans le lemme (5.2.1), on obtient

$$|w|_2^2 + \tau|\nabla w|_2^2 \leq c_{13}\tau|w|_2^2.$$

Par conséquent, $w = 0$ si $\tau \leq \frac{1}{c_{13}}$. □

5.3 Stabilité

Théorème 5.3.1 *On suppose que les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ sont satisfaites. Alors, il existe une constante $c(T, u_0) > 0$, dépendante de données initiales mais pas de N telle* *que pour tout* $n \in \{1, ..., N\}$

$$(a) \quad |U^n|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(T, u_0),$$

$$(b) \quad |U^n|_2^2 + \tau \sum_{k=1}^{n} |\nabla U^k|_2^2 \leq c(T, u_0)$$

et

$$(c) \quad \sum_{k=1}^{n} |U^k - U^{k-1}|_2^2 \leq c(T, u_0).$$

Preuve. Des résultats du lemme (5.2.1), on a $U^N \in L^\infty(\Omega)$. Alors, multipliant la première équation de $(\mathbb{D}_\tau^k)$ par $|U^k|^m U^k$ pour un certain entier $m \geq 1$ et utilisant l'inégalité de Hôlder, on a

$$\begin{aligned}|U^k|_{m+2}^{m+2} - \tau \int_\Omega \triangle U^k |U^k|^m U^k \, dx &\leq |U^{k-1}|_{m+2} |U^k|_{m+2}^{m+1} + c_{14}\tau \int_\Omega f(U^k)|U^k|^{m+1} \, dx \\ &\leq |U^{k-1}|_{m+2} |U^k|_{m+2}^{m+1} + c_{15}\tau |U^k|_{m+2}^{m+1}.\end{aligned}$$

Or

$$-\tau \int_\Omega \triangle U^k |U^k|^m U^k \, dx \geq 0,$$

donc

$$|U^k|_{m+2}^{m+2} \leq |U^{k-1}|_{m+2} |U^k|_{m+2}^{m+1} + c_{15}\tau |U^k|_{m+2}^{m+1}. \tag{5.9}$$

Simplifiant l'expression (5.9), on a

$$|U^k|_{m+2} \leq |U^{k-1}|_{m+2} + c_{15}\tau. \tag{5.10}$$

Finalement par récurrence, on a

$$|U^k|_{m+2} \leq c(T, u_0).$$

Par conséquent, lorsque $m \to +\infty$, on obtient

$$|U^k|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(T, u_0).$$

Dans le but d'établir (b), on multiplie la première équation de (D_τ^k) par U^k et on utilise les hypothèses sur la fonction f, on obtient alors

$$(U^k - U^{k-1}, U^k) + \tau|\nabla U^k|_2^2 \leq c_{16}\,\tau|U^k|_1.$$

Par le biais de l'dentité élémentaire

$$2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2,$$

on a

$$|U^k|_2^2 - |U^{k-1}|_2^2 + |U^k - U^{k-1}|_2^2 + \tau|\nabla U^k|_2^2 \leq c_{16}\,\tau|U^k|_1. \tag{5.11}$$

Sommant (5.11) de $k=1$ à n, on obtient

$$|U^n|_2^2 + \sum_{k=1}^{n}|U^k - U^{k-1}|_2^2 + \tau\sum_{k=1}^{n}|\nabla U^k|_2^2 \leq |u_0|_2^2 + \tau\, c_{16}\sum_{k=1}^{n}|U^k|_1;$$

et exploitant le bornage de U^k dans $L^\infty(\Omega)$, les inégalités $(b)-(c)$ en découlent.

5.4 Estimation d'erreurs

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer des estimations d'erreurs sur la solution du problème (5.3) . Pour cela, on introduit les notations suivantes concernant le problème semi-discrétisé de (D_τ^n) .

On note le pas de discrétisation $\tau = \frac{T}{N}, t^n = n\tau$ et $I_n = (t^{n-1}, t^n)$ pour $n = 1, ..., N$. Si z est une fonction continue (respectivement sommable), definie dans $(0,T)$ à valeurs dans $H^{-1}(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$, on définit $z^n = z(t^n,.), \overline{z}^n = \frac{1}{\tau}\int_{I_n} z(t,.)dt, \overline{z}^0 = z^0 = z(0,.)$; l'erreur $e_n = u(t) - U^n$ pour tout $t \in I_n$ et les erreurs locales e_u^n et e^n définies par $e_u^n = \overline{u}^n(t) - U^n, e^n = u^n - U^n$.

On a le théorème suivant

Théorème 5.4.1 *On suppose que* $(H_1)-(H_2)$ *sont satisfaites. Alors, les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$(1) \quad \|e_n\|^2_{L^\infty(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \int_0^T |e_n|^2 dt \leq c_{13}\,\tau,$$

$$(2) \quad \|e^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_{14}\,\tau^{\frac{1}{2}},$$

$$(3) \quad |\nabla \int_0^T e_n(t)\,dt|_2 \leq c_{15}\,\tau^{\frac{1}{4}}.$$

Preuve.

La formulation variationnelle du problème semi-discrétisé (D^n_τ) s'écrit

$$\begin{aligned}(U^n - U^{n-1}, \varphi)& \\ + \tau(\nabla U^n, \nabla\varphi) &= \frac{\lambda\tau}{\big(\int_\Omega f(U^n)\,dx\big)^2}(f(U^n), \varphi), \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega).\end{aligned} \quad (5.12)$$

Intégrant le problème continu (5.1) sur I_n, la solution satisfait l'équation équivalente suivante :

$$\begin{aligned}(u^n - u^{n-1}, \varphi)& \\ + \tau(\nabla\overline{u}^n, \nabla\varphi) &= \lambda \int_{I_n} \frac{(f(u^n), \varphi)}{\big(\int_\Omega f(u^n)\,dx\big)^2}, \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega)\end{aligned} \quad (5.13)$$

Faisant la soustraction entre (5.13) et (5.12) et sommant la différence de $n = 1$ à m avec $m \leq N$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}(e^n - e^{n-1}, \varphi) &+ \tau\sum_{n=1}^{m}(\nabla e^n_u, \nabla\varphi) \\ &\leq c_{16}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n), \varphi)| + c_{17}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n), \varphi)|.\end{aligned} \quad (5.14)$$

Remplaçant maintenant dans (5.14) la fonction test φ par

$$\varphi = (-\triangle)^{-1}(e^n)$$

où $(-\triangle)^{-1}$ est l'opérateur de Green (l'inverse de $-\triangle$ partant de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et satifaisant

$$(\nabla(-\triangle)^{-1}\psi, \nabla\varphi) = (\psi, \varphi)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \tag{5.15}$$

pour tout $\psi \in H^{-1}(\Omega), \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Alors (5.14) devient

$$I_1 + I_2 \leq I_3 + I_4, \tag{5.16}$$

où

$$I_1 = \sum_{n=1}^{m}(e^n - e^{n-1}, (-\triangle)^{-1}(e^n)),$$

$$I_2 = \tau \sum_{n=1}^{m}(e_u^n, e^n),$$

$$I_3 = c_{16}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n), (-\triangle)^{-1}(e^n))|$$

et

$$I_4 = c_{17}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n), (-\triangle)^{-1}(e^n))|.$$

On estime séparement I_1, I_2, I_3 et I_4.

Pour I_1, rappelant l'identité élémentaire

$$2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$$

et utilisant la propriété (5.15) de $(-\triangle)^{-1}$, on déduit

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{n=1}^{m}(\nabla(-\triangle)^{-1}[e^n - e^{n-1}], \nabla(-\triangle)^{-1}e^n) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla(-\triangle)^{-1}e^m, \nabla(-\triangle)^{-1}e^m) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}(\nabla((-\triangle)^{-1}[e^n - e^{n-1}]), \nabla((-\triangle)^{-1}[e^n - e^{n-1}])) \\
&= \frac{1}{2}\|e^m\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|e^n - e^{n-1}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on écrit I_2 sous forme d'une somme de deux termes et on estime chacun séparement

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tau \sum_{n=1}^{m} (e_u^n, e^n) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (u(t) - U^n, u(t) - U^n)\, dt + \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (u(t) - U^n, u^n - u(t))\, dt \\
&= I_{21} + I_{22}.
\end{aligned}$$

On voit que

$$I_{21} = \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (u(t) - U^n, u(t) - U^n)\, dt = \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} |e_n|^2\, dt \geq 0.$$

On répartit encore I_{22} en deux termes :

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (u(t), u^n - u(t))\, dt - \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (U^n, u^n - u(t))\, dt \\
&= I_{22}^1 + I_{22}^2.
\end{aligned}$$

On commence par estimer I_{22}^1

$$\begin{aligned}
|I_{22}^1| &= |\sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (u(t), \int_t^{t^n} \frac{\partial u}{\partial s}\, ds)\, dt| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (\int_t^{t^n} \|\frac{\partial u}{\partial s}\|_{H^{-1}(\Omega)}\, ds) \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq \tau \|\frac{\partial u}{\partial s}\|_{L^2(0,t^m,H^{-1}(\Omega))}\, \|u\|_{L^2(0,t^m,H_0^1(\Omega))} \\
&\leq c_{18}\, \tau.
\end{aligned}$$

de la même manière, on établit une estimation de I_{22}^2 en utilisant les estimations données dans le théorème (5.3.1).

$$
\begin{aligned}
|I_{22}^2| &= |\sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} (U^n, \int_t^{t^n} \frac{\partial u}{\partial s}\, ds)\, dt| \\
&\leq \tau \| \frac{\partial u}{\partial s} \|_{L^2(0,t^m,H^{-1}(\Omega))} (\tau \sum_{n=1}^{m} \|U^n\|^2_{H_0^1(\Omega))})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_{18}\, \tau.
\end{aligned}
$$

On estime maintenant le terme droite de l'inégalité (5.16) en utilisant l'inégalité de Hôlder et l'hypothèse (H_1)

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq |\sum_{n=1}^{m} (\int_{I_n} [f(u) - f(U^n)]\, dt, (-\triangle)^{-1}(e^n))| \\
&\leq c_{20}\, \tau^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{m} (\int_{I_n} |f(u) - f(U^n)|_2^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \|e^n\|_{H^{-1}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Par application de l'inégalité de Young, on a pour $\eta > 0$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq \eta \sum_{n=1}^{m} (\int_{I_n} |f(u) - f(U^n)|_2^2\, dt) + \frac{c_{21}}{\eta}\, \tau \sum_{n=1}^{m} \|e^n\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\leq c_{22}\, \eta \sum_{n=1}^{m} (\int_{I_n} |e_n|_2^2\, dt) + \frac{c_{21}}{\eta}\, \tau \sum_{n=1}^{m} \|e^n\|^2_{H^{-1}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

De façon similaire, on a

$$
|I_4| \leq c_{23}\, \tau + c_{24}\, \tau \sum_{n=1}^{m} \|e^n\|^2_{H^{-1}(\Omega)}.
$$

Choisissons η covenablement, on obtient l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
&\|e^m\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m} \|e^n - e^{n-1}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{m} \int_{I_n} |e_n|_2^2\, dt \leq c_{25}\, \tau + c_{26}\, \tau \sum_{n=1}^{m} \|e^n\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (5.17)
\end{aligned}
$$

D'autre part, posons

$$
y^m = \sum_{n=1}^{m} \|e^n\|^2_{H^{-1}(\Omega)},
$$

on déduit de (5.17) que y^m satisfait

$$y^m - y^{m-1} \leq c_{25}\,\tau + c_{26}\,\tau y^m.$$

Utilisant l'inégalité de Gronwall discréte, on déduit que

$$y^m \leq c(T).$$

Par conséquent, on a

$$\|e^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_{27}\,\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Le fait que

$$\sup_{t\in(0,t^m)} \|e_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} - c_{27}\tau^{\frac{1}{2}} \leq \max_{1\leq n\leq m} \|e_n(t^n)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \max_{1\leq n\leq m} \|e^n\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

donne

$$\|e_n\|_{L^\infty(0,T,H^{-1}(\Omega))} - c_{27}\,\tau^{\frac{1}{2}} \leq \max_{1\leq n\leq m} \|e^n\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Par suite

$$\|e_n\|^2_{L^\infty(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \int_0^T |e_n|_2^2\,dt \leq c_{29}\,\tau$$

et

$$\sum_{n=1}^{m} \|e^n - e^{n-1}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_{29}\,\tau.$$

D'où résulte le point (1).

Dans le but de prouver le point (3) du théorème, on a besoin d'établir une autre estimation. Pour ce faire, on retourne à (5.14) et on la reécrit comme suit

$$\begin{aligned}(u^m - U^m, \varphi) &+ \tau \sum_{n=1}^{m} (\nabla(\overline{u}^n - U^n), \nabla\varphi) \\ &\leq c_{16}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n), \varphi)| + c_{17}\,\tau|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n), \varphi)| \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.18)\end{aligned}$$

On remplace φ par la fonction test $\varphi = \tau \sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)$ et on obtient

$$\tau \int_\Omega (u^m - U^m)(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)\,dx) + \tau^2|\sum_{n=1}^{m}\nabla(\overline{u}^n - U^n)|_2^2$$
$$\leq c_{30}\tau^2|\int_\Omega \sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n))(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n))dx| + c_{31}\,\tau^2|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n),\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n))|.$$

On a donc l'estimation

$$\tau^2|\sum_{n=1}^{m}\nabla(\overline{u}^n - U^n)|_2^2 = |\nabla\int_0^{t^m} e_n\,dt|_2^2 \leq \tau|\int_\Omega (u^m - U^m)(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)\,dx)|$$
$$+ c_{30}\tau^2|\int_\Omega \sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n))(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)dx| + c_{31}\,\tau^2|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n),\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n))|.$$
$$\leq I + II + III,$$

avec

$$I = \tau|\int_\Omega (u^m - U^m)(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)\,dx)|,$$
$$II = c_{30}\tau^2|\int_\Omega \sum_{n=1}^{m}(\overline{f(u)}^n - f(U^n))(\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n)dx|$$

et

$$III = c_{31}\,\tau^2|\sum_{n=1}^{m}(f(U^n),\sum_{n=1}^{m}(\overline{u}^n - U^n))|.$$

Clairement, on a d'aprés l'estimation L^∞ de u et le théorème 5.3.1

$$I \leq \|e^m\|_{H^{-1}(\Omega)}(\sum_{n=1}^{m}\int_{I_n}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\,dt + \tau\sum_{n=1}^{m}\|U^n\|_{H_0^1(\Omega)})$$
$$\leq c_{32}\|e^m\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Par application de l'inégalité de Gronwall discréte à (5.17) on a vu que

$$\|e^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$I \leq c_{33}\tau^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient aussi

$$
\begin{aligned}
II &\leq (\int_\Omega (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} (f(u) - f(U^n))\, dt)^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \times (\int_\Omega (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} (u(t) - U^n)\, dt)^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^2 (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} |f(u) - f(U^n)|_2^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \times (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} |u(t) - U^n|_2^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^2 (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} |f(u) - f(U^n)|_2^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \times (2\|u\|^2_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + 2\tau \sum_{n=1}^m |U^n|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_{34}\, \tau^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Toujours par l'estimation L^∞ de u, U^n et le théorème 5.3.1, on déduit que

$$II \leq c_{34} \tau^{\frac{1}{2}}.$$

Raisonons exactement comme l'estimation précédente, on obtient

$$III \leq T^2 (\sum_{n=1}^m \int_{I_n} |f(U^n|_2^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \times (2\|u\|^2_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + 2\tau \sum_{n=1}^m |U^n|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les mêmes arguments permettent d'écrire

$$III \leq c_{35}\, \tau^{\frac{1}{2}}.$$

Collectant tous ces résultats, il résulte que

$$|\nabla \int_0^T e_n\, dt|_2^2 \leq c_{36}\, \tau^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui complète la preuve du point (3).

Corollaire 5.4.1 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$*, le problème* (5.3) *engendre un semi-groupe continu* S_τ *défini par* $S_\tau U^{n-1} = U^n$.

5.5 Le système dynamique semi-discrétisé

Dans ce paragraphe on considére les systèmes suivants :

$$(\mathbb{D}_\tau^n) \quad \begin{aligned} &U^n - \tau\triangle U^n = U^{n-1} + \lambda\tau\frac{f(U^n)}{\left(\int_\Omega f(U^n)\,dx\right)^2}, \text{ dans } \Omega, \\ &U^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ &U^0 = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{5.19}$$

avec τ fixé, $n \geq 1$.

On commence par rappeler une version simple du lemme de Gronwall uniforme discret.

Lemme 5.5.1 *Soient $\{y^n\}_0^\infty$ et $\{h^n\}_0^\infty$ deux suites réelles (non nécessairement positives), satisfaisant*

$$y^n \leq y^{n-1} + \tau h_n. \tag{5.20}$$

Supposons de plus qu'il existe un entier positif l_0 tel que pour tout $l_1 \geq l_0$ et $N > 0$

$$\tau\sum_{n=l_1}^{l_1+N} h_n \leq a_1 \text{ et } \tau\sum_{n=l_1}^{l_1+N} y^n \leq a_2, \tag{5.21}$$

pour a_1 et a_2 deux réels positifs indépendants de l_1, alors pour $l_1 \geq l_0$,

$$y^{l_1+N} \leq \frac{a_2}{N\tau} + a_1. \tag{5.22}$$

Les résultats du théorème 4.2.1 d'existence et d'unicité de la solution de $(\mathbb{D}_\tau^n)$ nous permettent de définir un opérateur S_τ en posant

$$S_\tau U^{n-1} = U^n.$$

S_τ est continu et vérifie

$$S_\tau^n U^0 = U^n.$$

Notre but maintenant est d'étudier le comportement du système dynamique semi-discrétisé $(\mathbb{D}_\tau^n)$ via les ensembles absorbants et les attracteurs globaux (voir Temam [57]). Pour cela, on commence par établir l'existence d'ensembles absorbants dans $L^\infty(\Omega)$.

Ensembles absorbants dans $L^\infty(\Omega)$.

Notons $y_m^n = |U^n|_{m+2}$ et $y^n = |U^n|_{L^\infty(\Omega)}$.

Multipliant $(\mathbb{D}_\tau^n)$ par $|U^n|^m U^n$ pour un certain entier m, utilisant le lemme 5.2.1 et l'inégalité de Hôlder, on obtient l'existence de deux constantes c_{37} et c_{38} telles que

$$y_m^n \leq c_{37} y_m^{n-1} + c_{38}\tau.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, on déduit que

$$y^n \leq c_{37}\, y^{n-1} + c_{38}\tau.$$

D'autre part, on a

$$\tau \sum_{n=n_0}^{n_0+N} y^n \leq a_1, \forall n_0 \geq n_\tau,$$

où a_1 est un réel positif qui ne dépend pas de n_0. Par application du lemme de Gronwall uniforme, on a donc

$$|U^n|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{39}, \quad \forall\, n \geq n_\tau,$$

Par conséquent, il existe un ensemble absorbant dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1; +\infty]$.

Ensembles absorbants dans $H_0^1(\Omega)$.

L'existence d'un ensemble absorbant dans $L^\infty(\Omega)$ permet de prouver l'existence d'un ensemble absorbant dans $H_0^1(\Omega)$ d'une manière directe.

Multipliant l'équation de $(\mathbb{D}_\tau^n)$ par $U^n - U^{n-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\tau}|U^n - U^{n-1}|_2^2 + \int_\Omega \nabla U^n \nabla (U^n - U^{n-1})\, dx \leq c_{40}|U^n - U^{n-1}|_1.$$

Avec l'aide de

$$2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2,$$

on a

$$\frac{1}{\tau}|U^n - U^{n-1}|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla U^n|_2^2 - \frac{1}{2}|\nabla U^{n-1}|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla U^n - \nabla U^{n-1}|_2^2\, dx \leq c_{41}\sqrt{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}|U^n - U^{n-1}|_2.$$

L'inégalité de Young implique que

$$\frac{1}{\tau}|U^n - U^{n-1}|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla U^n|_2^2 \leq \frac{1}{2}|\nabla U^{n-1}|_2^2 + \frac{1}{2\tau}|U^n - U^{n-1}|_2^2 + c_{42}\tau,$$

donc

$$\frac{1}{\tau}|U^n - U^{n-1}|_2^2 + |\nabla U^n|_2^2 \leq |\nabla U^{n-1}|_2^2 + c_{42}\tau;$$

par conséquent,

$$|\nabla U^n|_2^2 \leq |\nabla U^{n-1}|_2^2 + c_{42}\tau.$$

Notons

$$y^n = |\nabla U^n|_2^2.$$

Rappelant les résultats de la section d'analyse de stabilité il existe $n_\tau > 0$ tel que

$$\tau \sum_{n=n_0}^{n_0+N} y^n \leq a_1, \forall n_0 \geq n_\tau.$$

Utilisant le lemme 5.5.1 de Gronwall uniforme, on a

$$\|U^n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_{43}, \quad \forall n \geq n_\tau.$$

Lemme 5.5.2 *Si τ satisfait*

$$\tau \leq \frac{1}{c_{13}},$$

alors il existe un ensemble absorbant B_τ, indépendant de τ, dans $H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$. Plus précisément, pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, il existe $n(\tau)$ tel que

$$|U^n|_{L^\infty(\Omega)} + \|U^n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_{44} \quad \forall n \geq n_\tau,$$

où c_{44} est une constante indépendante aussi de τ.

L'opérateur non linéaire S_τ satisfait la propriètè de semi-groupe, à savoir,

$$S_\tau^{n+p} = S_\tau^n \circ S_\tau^p.$$

L'opérateur non linéaire S_τ définit un semi-groupe de $L^\infty(\Omega)$ dans lui même. Par le lemme 5.5.2, l'existence d'un ensemble absorbant B_τ dans $L^\infty(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$ est garantie. Posons,

$$\mathbb{A}_\tau = w(B_\tau) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} S_\tau^m(B_\tau)}.$$

Il est facile de voir que $\mathbb{A}_\tau$ est un ensemble compact de $L^2(\Omega)$ qui attire toutes les solutions dans le sens que

$$dist(\mathbb{A}_\tau; S_\tau^n U^0)_{n\to+\infty} \to 0,$$

pour tout $U^0 \in L^\infty(\Omega)$ (voir Temam [57]). Par conséquent, on a :

Théorème 5.5.1 *Sous les conditions $(H_1)-(H_2)$, le problème semi-discret $(\mathbb{D}_\tau^n)$ a une solution semi-groupe associé S_τ qui applique $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$. Ce semi-groupe posséde un attracteur compact $\mathbb{A}_\tau$ borné dans $L^\infty(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$.*

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

Ce chapitre résume les principaux résultats obtenus dans ce travail dans le cadre de l'étude du problème du thermistor et les conclusions qui s'en dégagent. Nous donnons également les améliorations pouvant être apportées ainsi que les perspectives pouvant faire objet de nouveaux travaux.

6.1 Conclusions générales.

Ce travail a permis d'apporter une certaine contribution à l' étude qualitative des solutions du problème du thermistor. Ce qui a consisté d'abord, à établir l'existence de solutions faibles d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires modélisant le problème du thermistor. Lors de cette partie, une méthode de point fixe associée à quelques techniques de compacité ont été les ingrédients clés.

Lors de l'établissement d'un procédé du chauffage électrique, l'utilisateur souhaite procéder à des simulations numériques en adaptant un modèle de référence, apte à décrire le phénomène ; la difficulté propre à toute modélisation est de se résoudre à de nécessaires hypothèses simplificatrices face à la réelle complexité des situations rencontrées sans que la présentation simplifiée n'occulte ou ne dénature les caractéristiques fondamentales du phénomène physique étudié. Dans ce contexte, le problème du thermistor peut se réduire à une seule équation parabolique non locale. Utilisant une approche des systèmes dynamiques, nous étudions l'existence, l'unicité des solutions ainsi que l'existence de l'attracteur global.

Dans l'étape suivante, on propose d'étudier le comportement asymptotique des solutions du problème semi-discrétisé de l'équation non locale par un schéma de type Euler.

En résumé, nous pouvons dire que ce travail est pluridisciplinaire, puisque faisant intervenir : des aspects physiques (dans les caractéristiques du conducteur en s'attachant tout particulièrement à l'interprétation physiques de quelques résultats, en termes de propriétés qualitatives de la solution) ; des aspects mathématiques : le procédé du chauffage électrique fait appel à des procédés de plus en plus élaborés, dont la modélisation mathématique est de plus en plus complexe. C'est pourquoi, plus encore que les résultats, ce sont les méthodes utilisées et les outils d'analyse fonctionnelle employés qui sont intéressants. L'analyse mathématique contribue à l'amélioration des modélisations dès lors qu'elle offre à l'ingénieur ou au physicien un outil propre à évaluer la pertinence des hypothèses phénomènologiques ou expérimentales introduites.

6.2 Améliorations possibles et perspectives.

Une perspective trés intéressante est celle qui consiste au contrôle optimal du chauffage électrique. Cette problèmatique a été posée par plusieurs industries et compagnes d'essais expérimentaux dans le cadre d'un procédé de fabrication de pièces d'aluminium appelé thixoformage. La qualité de la pièce obtenue dépend directement de la qualité du chauffage. Il est donc important de pouvoir optimiser les paramétres de contrôle du chauffage afin d'atteindre cet objectif. La mise au point d'un tel procédé par les industriels, peut s'avérer trés onéreuse. L'outil informatique de simulation numérique unidimensionnelle ou bidimensionnelle du chauffage, peut, donc, être précieux pour l'amélioration de ce procédé et la compréhension des phénomènes physiques intervenant lors du chauffage. En effet, la simulation présente l'avantage de supprimer les coûts qu'engendrerait la réalisation de prototypes pour effectuer des essais de chauffage. Cependant la mise au point des paramètres de contrôle comme la tension d'alimentation, la fréquence, le temps de chauffage, permettant d'atteindre le but désiré, sont encore difficiles à déterminer. Un traitement informatique peut résoudre cette difficulté et de gagner en efficacité.

La première généralisation à effectuer pourrait être l'étude du système suivant qu'on peut considérer comme une extension du problème du thermistor

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} - \triangle\theta(u) = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&\operatorname{div}(\sigma(u)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&h \in \alpha(u),
\end{aligned}$$

où α est un graphe maximal monotone. Ce modèle mathématique décrit le procédé de combinaison de la conduction de la chaleur et la conduction électrique dans un corps qui subit un changement de phase.

Une autre généralisation possible, qui ne devait pas engendrer de grandes modifications, est celle qui concerne le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^p}, \quad p > 2.$$

Le but est de voir le rôle que peuvent jouer l'exposant p du terme non local, le paramétre λ et la dimension spatiale à la différence entre l'existence globale et l'explosion des solutions en temps fini, ainsi que la détermination de l'existence et la non-existence de solutions du problème stationnaire associé.

Il est également possible de traiter le problème suivant faisant intervenir une fonction non linéaire β :

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \triangle u = \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\,dx\right)^p}, \quad p > 2.$$

Bibliographie

[1] R.A. Adams : *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou : *A box scheme for coupled systems resulting from Microsensor Thermistor Problems*, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive systems **5**, (1999), 209-223.

[3] W. Allegretto, H. Xie : *Solutions for the microsensor thermistor equations in the small bias case*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A. **123**, (1993), 987-999.

[4] W. Allegretto, H. Xie : *A nonlocal thermistor problem*, European J. Appl. Math. **6**, (1995), 83-94.

[5] S. N. Antontsev and M. Chipot : *The thermistor problem : existence, smoothness, uniqueness, blowup*. SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 1128-1156.

[6] A. R. Bahadir : *Steady-state solution of the PTC thermistor problem using a quadratic spline finite*, Mathematical Problems in Engineering, 2002, vol. **8(2)**, pp. 101-109.

[7] A. Bamberger : *Etude d'une équation doublement non linéaire. Jour. of Functional Analysis*, Volume. **24**, No 2, pp .148-155, 1977.

[8] J. W. Bebernes, A. A. Lacey : *Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems*, Advances in Differencial Equations, Vol. **2**, No. **6**,

pp. 927-953, November 1997.

[9] H. Brézis : Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, 1983.

[10] R. C. D. S. Broche, L. A. F. Oliveira, and A. L. Pereira : *Global atrractor for an equation modelling a Thermostat*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2003** (2003), No. **100**, pp. 1-7.

[11] H. Cartan : *Calcul différntiel*, Hermann (1967).

[12] N. Chafee : *The electric ballast resistor : homogeneous and non homogeneous equilibria*. In Non linear differential equation : invariance stability and bifurcations, p. p. 97-127. Academic Press, New York (1981).

[13] X. Chen : *Existence and regularity of solutions of a nonlinear degenerate elliptic system arising from a thermistor problem,* J. Partial Differential Equations, **7**, (1994) 19-34.

[14] X. Chen, A. Friedman : *A free boundary problem for a nonlinear degenerate elliptic system modeling a thermistor*, Anna. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. sci. **19** (1992) 615-636.

[15] X. Chen, A. Friedman : *The thermistor problem for conductivity which vanishes at large temperature*, Quart. Appl. Math. **51** (1993) 101-115.

[16] X. Chen, H. M. Yin : *On a strongly coupled elliptic-parabolic system*, preprint.

[17] G. Cimatti : *Existence of weak solutions for the nonstationary problem of the joule heating of a conductor* Ann. Mat. Pura Appl. Vol. **162** (1992), 33-42.

[18] G. Cimatti : *Remarks on existence and uniqueness for the thermistor problem under mixed boundary conditions* quart. Appl. Math. **47** (1989), 117-121.

[19] G. Cimatti : *On the stability of the solution of the themistor problem*, Applicable Analysis, Vol. **73**(3-4), pp. 407-423, 1999.

[20] G. Cimatti : *stability and multiplicity of solutions for the thermistor problem*, Annali di Matematica 181, 181-212 (2002).

[21] G. Cimatti : *A bound for the temperature in the thermistor problem*, IMA J. Appl. Math. **40** (1988) 15-22.

[22] G. Cimatti : *A remark on the thermistor problem with rapidly growing conductivity* Applicable Analysis, Vol. **80**, pp. 133-140 (2001).

[23] G. Cimatti : *The eddy current problem with temperature dependent permeability*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2003** (2003), No. **91**, pp. 1-5.

[24] G. Cimatti : *The stationary thermistor problem with a current limiting device.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **116A**, pp. 79-84, 1990 ;

[25] G. Cimatti and G. Prodi : *Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor*, Ann. Mat. Pura Appl. Vol. **63** (1988), 227-236.

[26] F. de Thelin : *Résultats d'existence et de non-existence pour la solution positive et bornée d'une e. d. p. elliptique non linéaire*, Annales Faculté des sciences de Toulouse, Vol. **VIII**, No. **3**, 1986-1987.

[27] A. Eden, B. Michaux and J. M. Rakotoson : *Semi-discretized nonlinear evolution equations as discrete dynamical systems and error analysis*, Indiana University Mathematics Journal **C**, Vol. **39**, No. **3**, (1990).

[28] A. Eden, B. Michaux and J. M. Rakotoson : *Doubly nonlinear parabolic-type equations as dynamical systems*, Vol. **3**, No. **1**, (1991).

[29] A. El Hachimi : *Comportement asymptotique de la solution d'une E. D. P. parabolique non linéaire*, Doctorat de troisième cycle, 20 Juin 1985.

[30] A. El Hachimi, F. Benzekri : *Doubly nonlinear parabolic equations related to the p-Laplacien operator : Semi-discretization*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2003**, (2003), No. **113**, pp. 1-14.

[31] A. El Hachimi, F. de Thélin : *Supersolutions and stabilisation of the solutions of the equation* $u_t - \triangle_p u = f(x,u)$, PartII. Publicacions Matematiques, vol **35** (1991) , pp 347-362.

[32] A. El Hachimi, M.R. Sidi Ammi : *Existence of weak solutions for the thermistor problem with degeneracy*, Electronic Journal of Differential Equations, conference **9**(2002), pp.127-137.

[33] A. El Hachimi, M.R. Sidi Ammi : *Existence of global solution for a nonlocal parabolic problem*, soumis pour publication.

[34] A. El Hachimi, M.R. Sidi Ammi : *Thermistor Problem : a non local parabolic problem*, accepté dans Electronic Journal of Differential Equations.

[35] H. El Ouardi : *Attracteurs pour certains problèmes paraboliques non linéaires liés au* $p-$*Laplacien, existence et régularité.* Thèse d'Etat, 2002.

[36] J. Filo : L^∞*-Estimate for nonlinear diffusion equation*, Applicable Analysis, Vol **37**, pp. 49-61, (1990).

[37] A. Fowler, I. Frigaard, and S. D. Howison : *Temperature surges in thermistors* SIAM J. Appl. Math. **52** No. **4** August (1992), 998-1011.

[38] H. Fujita : *On the nonlinear equations* $\triangle u + \exp u = 0$ *and* $v_t = \triangle v + \exp v$. Bull. Am. Math. Soc. **75**, pp. 132-135, 1969.

[39] G. Genet : *Mesure et Integration*, Vuibert (1976).

[40] R. F. Gariepy, M. Shillor, X. Xu : *Existence of capacity solutions to a model for in situ virification*, preprint.

[41] M. T. González Montesinos and F. Ortegón Gallego : *The evolution thermistor problem with degenerate thermal conductivity*, Communications on Pure and Applied Analysis, Volume **1**, Number **3**, september 2002.

[42] M. T. González Montesinos and F. Ortegón Gallego : *A doubly degenerate elliptic system*, Equadiff **10** CD ROM pp. 1-8, Prague 2001.

[43] S. D. Howison, J. F. Rodrigues, and M. Shillor : *Stationary solutions to the thermistor problem* J. Math. Anal. Appl. **174** (1993) 573-588.

[44] D. Hömberg, A. M. Khludnev, J. Soko lowski : *On an equilibrium problem for a cracked body with electrothermoconductivity*

[45] F. J. Hyde : *Thermistors*, Iliffe Books, London (1971).

[46] S. L. kamenomostskaya : *On the Stefan problem*, Mat. Sb. **53**, pp.489-514, 1961.

[47] A. A. Lacey : *Mathematical analysis of thermal runway for spatially inhomogeneous reactions*, SIAM. J. Appl. Math. **43**, pp. 1350-1366, (1983).

[48] A. A. Lacey : *Thermal runway in a non-local problem modelling ohmic heating, Part I : Model derivation and some special cases*, Euro. Jnl of Applied Mathematics, vol. **6**, pp.127-144, 1995.

[49] A. A. Lacey : *Thermal runway in a non-local problem modelling ohmic heating, Part II : General proof of blow-up and asymptotics runways*, Euro. Jnl of Applied Mathematics, vol. **6**, pp.201-224, 1995.

[50] A. A. Lacey, D. E. Tzanetis and P. M. Vlamos : *Behaviour of a non-local reactive convective problem modelling ohmic heating of foods*, Q. JI Mech. Appl. Math. **52** **(4)**, pp.623-644, 1999.

[51] J.L. Lions : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.

[52] M. Madaune-Tort, G. Gagneux : *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénieurie pétrolière*, Mathématiques et Applications **22**. Springer. 1996.

[53] E. Magenes : *Remarques sur l'approximation des problèmes paraboliques non linèaires*, Analyse Mathématique et Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1988.

[54] M. Nakao : *Global solutions for some nonlinear parabolic equations with non monotonic perturbations*, NonLinear Analysis, Theory & Applications, vol **10**, No. **3**, pp. 299-314, 1986.

[55] A. Rougirel : *Blow-up rate for parabolic problems with nonlocal source and boundary flux*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2003** (2003), No. **98**, pp. 1-18.

[56] D. A. Tarzia : *A bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation,* **PROMAR**, Rosario, 1988.

[57] R. Temam : *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Applied Mathematical Sciences, **68** springer-verlag (1988).

[58] D. E. Tzanetis : *Blow-up of radially symmetric solutions of a non-local problem modelling ohmic heating*, EJDE, Vol. **2002**(2002) No. 11, pp.1-26.

[59] P. Shi, M. Shillor, X. Xu : *Existence of a solution of the stefan problem with joule's heating.* Jour. Differential Equations. Vol **105**, No.2, october 1993.

[60] H. Xie, W. Allegretto : $C^\alpha(\overline{\Omega})$*-solution of a class of a non linear degenerate elliptic systems arising in the themistor problem*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991) 1491-1499.

[61] X. Xu : *A strongly degenerate system involving an equation of parabolic type and equation of elliptic type*, Commun. in Partial Differential Equations, **18**, pp . 199-213, (1993).

[62] X. Xu : *On the existence of bounded temperature in the thermistor problem with degeneracy*. Nonlinear Analysis,T.M.A **42**, pp. 199-213, (2000).

[63] X. Xu : *Local and global existence of continuous temperature in the electrical heating of conductors*, Houston Journal of Mathematiques, vol **22**, No.**22**, 1996 435-455.

[64] X. Xu : *Existence and uniqueness for the nonstationary problem of the electrical heating of a conductor due to the joule-Thomson effect*, Int. J. Math. Math. Sci. **16**, pp.125-138 (1993).

[65] X. Xu : *A p-Laplacien problem in L^1 with nonlinear boundary conditions*, Comm. Partial. Differential Equations, **19** (1994) 143-176.

[66] X. Xu : *A Local partial regularity theorem for weak solutions of degenerate elliptic equations and its application to the thermistor problem*, Differential Integral Equations, vol **12**, No.**1** January 1999, pp. 83-100 .

[67] X. Xu : *Partial regularity of solutions to a class of degenerate systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997) 1973-1992.

[68] X. Xu : *Local partial regularity theorems for suitable weak solutions of a class of degenerate systems*, Appl. Math. Optim. **34** (1996) 299-324.

[69] X. Xu : *The thermistor problem with conductivity vanishing for large temperature*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 124** (1994) 1-21.

[70] X. Xu : *A degenerate Stefan-like problem with joule's heating*, SIAM. J. Math. Anal. **23** (1992) 1417-1438.

[71] G. Yuan : *Regularity of solutions of the thermistor problem*, Appl. Anal. **53** (1994) 149-164.