Applied Sciences *** **Monographs** # 3

Meskine DRISS

Etude de certains problèmes fortement non linéaires et Application aux inéquations via une méthode de pénalisation

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Etude de certains problèmes
fortement non linéaires et Application
aux inéquations via une méthode de pénalisation(Romanian)
Monographs # 3

Applied Sciences * Monographs
Editor-in-Chief Prof.Dr. Constantin Udrişte
Managing Editor Prof.Dr. Vladimir Balan
Politehnica University of Bucharest

Etude de certains problèmes
fortement non linéaires et Application
aux inéquations via une méthode de pénalisation (Romanian)
Meskine DRISS.
Bucharest: Applied Sciences * Monographs, 2004

Includes bibliographical references.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
FES

THESE

Présentée par

DRISS MESKINE

En vue d'obtention du
Doctorat

U.F.R: Analyse Appliquée
(Méthodes Appliquées à l'Ingénierie)
Spécialité: Equations aux dérivées partielles

intitulée

Etude de certains problèmes fortement non linéaires et Application aux inéquations via une méthode de pénalisation

***

Soutenue le 8 Juin 2002 devant le jury

A. BENLEMLIH *Professeur à la faculté des sciences Dhar el Mahraz, FES*	Président Rapporteur
N. AISSAOUI *Professeur à l'ENS de FES*	Membre
N. ALAA *Professeur à la faculté des sciences et techniques, Marrakech*	Membre
A. BENKIRANE *Professeur à la faculté des sciences Dhar el Mahraz, FES*	Membre
A. ELMAHI *Professeur au CPR de FES*	Membre Rapporteur
A. PORRETTA *Professeur à l'université de Rome*	Membre Rapporteur
A. TOUZANI *Professeur à la faculté des sciences Dhar el Mahraz, FES*	Membre

REMERCIEMENTS

Je ne saurais trouver les mots qu'il faut pour exprimer toute la gratitude que j'éprouve vis à vis de mon professeur Monsieur **Abdelmoujib Benkirane**. Il a d'abord commencé par me faire profiter, en tant qu'étudiant à la faculté des sciences Dhar El Mahraz, de son talent d'enseignant-chercheur. Il a ensuite guidé avec le plus grand soin mes premiers pas de chercheur. Son sérieux, son soutien continu, ses encouragements, sa disponibilité et sa bienveillance m'ont permis de mener ce travail à bien. Ses qualités aussi bien scientifiques qu'humaines sont pour moi exemplaires.

Je remercie le professeur **Abdelali Benlemlih** pour l'honneur qu'il m'a accordé en présidant le jury de cette thèse.

Je voudrais remercier chaleureusement monsieur le professeur **Abdelfettah Touzani**, chef de l'UFR d'Analyse Appliquée, d'avoir voulu être membre de mon jury.

Je suis très fier du fait qu'un grand professeur du calibre de monsieur le professeur **Alessio Porretta** soit intéressé à mes travaux de recherche. Il m'a fait un très grand honneur en acceptant de rapporter mon travail et de faire partie du jury de cette thèse. Je le remercie de tout mon coeur.

Je remercie également monsieur le professeur **Nourreddine Alaa** qui m'a fait l'honneur de faire partie de ce jury.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance à monsieur le professeur **Abdelhak Elmahi** qui m'a bien soutenu le long de la préparation de cette thèse.

Je voudrais remercier chaleureusement monsieur **Nourreddine Aissaoui** d'avoir voulu examiner ce travail et être membre de mon jury.

Merci toute l'équipe d'analyse non linéaire de notre faculté.

Je remercie toute ma famille qui n'a jamais cessé de me soutenir. Je remercie tous mes amis pour leur soutien moral et matériel surtout mes amis et mes collègues étudiants-chercheurs de département de Mathématiques et informatique à qui je souhaite bon succès et bon courage.

Contents

Introduction

Dans le présent travail, on se propose d'étudier quelques problèmes étroitement liés aux équations elliptiques de la forme:

$$\begin{cases} Au + g(x,u,\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où A est un opérateur de type Leray-Lions standard et g est une non-linéarité ayant une croissance naturelle par rapport au $|\nabla u|$ et vérifiant une condition classique du signe par rapport à u.

On s'intéressera aussi à quelques applications utilisant les problèmes paraboliques associés à (1.1). On rappelle que les problèmes de type (1.1) ont été initialement étudiés par Leray-Lions ([48] ou [49]) dans le cadre variationnel et avec $g \equiv 0$. Le cas où $g \equiv g(x,u)$ a été traité par Browder [35], Hess [44] et Webb [58]. Si $f \in L^1(\Omega)$ ou f est une mesure bornée on peut consulter [57], [33], [21, 22, 23, 17], [50, 52, 53].

Nous divisons ce travail en deux parties principales:

- La première est consacrée aux problèmes unilatéraux dans le cadre des espaces de Sobolev dans L^1 et aux problèmes de type (1.1) ainsi que d'autres applications dans le cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev.

- La deuxième partie fera l'objet d'une étude variée de certains problèmes à obstacles via une technique de pénalisation faisant intervenir des puissances croissantes.

Dans un aperçu général, on donnera dans un chapitre préliminaire les ingrédients nécessaires pour aborder les autres parties.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera un problème unilatéral associé à (1.1) (voir [15]), de type suivant:

$$\begin{cases} u \geq \psi \text{ p.p} \\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0 \\ \langle Au, T_k(u-v)\rangle + \displaystyle\int_\Omega g(x,u,\nabla u) T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \forall v \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $f \in L^1(\Omega)$, $K_\psi = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \psi \text{ p.p. } \}$ et $\psi : \Omega \to \overline{I\!R}$ est une fonction mesurable telle que $\psi^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Pour le cas $g \equiv 0$, on peut se référer à [20, 24]. Lorsque $f \equiv 0$, on peut consulter [30]. Dans [8], A. Benkirane et A. Elmahi ont étudié (1.2) en supposant en outre la condition de coercivité suivante:

$$|g(x,s,\zeta)| \geq \gamma|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \mu, \ \mu \geq 0, \gamma > 0 \tag{1.3}$$

Dans ce chapitre, on donnera un résultat d'existence des solutions de (1.2) sans supposer l'hypothèse (1.3).
Dans le troisième chapitre, on étudiera (1.1) dans le cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev avec second membre dans L^1[13].
On s'intéressera plus précisément à la formulation entropique suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} u \in T_0^{1,M}(\Omega), \\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \displaystyle\leq \int_\Omega fT_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \forall v \in W_0^1L_M(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.4}$$

où $T_0^{1,M}(\Omega) = \{v : \Omega \to I\!R \text{ mesurable }, \ T_k(v) \in W_0^1L_M(\Omega)\}$, $f \in L^1(\Omega)$, et M est une N-fonction vérifiant la condition Δ_2.
Dans le cadre variationnel, on rappelle que (1.1) a été étudié, dans le cas où $g \equiv 0$ ou $g(x,s,\zeta) \equiv g(x,s)$, par J. P. Gossez [40, 39, 42], et par J. P. Gossez-A. Benkirane [6]. Si g dépend aussi de ζ, on peut se référer aux travaux de A. Benkirane et A. Elmahi [7, 9]. Pour d'autres applications, on peut consulter [4].
Dans le cas L^1, Benkirane et Elmahi ont résolu (1.1) en supposant une hypothèse de type suivante

$$|g(x,s,\zeta)| \geq \gamma M(\frac{|\zeta|}{\lambda}) \text{ pour } |s| \geq \mu, \ \mu \geq 0, \gamma > 0, \lambda > 0 \tag{1.5}$$

(voir [10]).
On se propose de donner un résultat d'existence des solutions pour (1.4) sans supposer (1.5).
Ce résultat est étendu facilement aux problèmes unilatéraux.
La technique utilisée, ici, est aussi adaptée pour montrer l'existence des solutions du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u \in T_0^{1,M}(\Omega), \\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \displaystyle + \int_\Omega \phi(u)\nabla T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \displaystyle\leq \int_\Omega fT_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \forall v \in W_0^1L_M(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \end{array}\right.$$

où $\phi \in C(I\!R, I\!R^N)$ et f est toujours dans $L^1(\Omega)$. Ainsi, nous généralisons un résultat obtenu par Benkirane et Bennouna ([5]). Dans le cas où $M(t) = \frac{|t|^p}{p}$, on peut consulter [18, 32, 51, 50].

Dans la deuxième partie, on se base sur une méthode de pénalisation dûe à Boccardo et Murat [26] et qui consiste à introduire des puissances croissantes. Ainsi, ils ont approché l'inéquation variationnelle:

$$\begin{cases} \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |v(x)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}, \end{cases}$$

où $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, par la suite des équations:

$$\begin{cases} Au_n + |u_n|^{n-1}u_n = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^n(\Omega). \end{cases}$$

Dans [36], A. Dall'aglio et L. Orsina ont généralisé ce résultat en considérant des puissances croissantes dépendant de certaine fonction de Carathéodory g satisfaisant la condition du signe et une hypothèse d'intégrabilité . C'est dans ce sens qu'on introduit la suite générale des problèmes:

$$\begin{cases} Au_n + |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), \ |g(x,u_n)|^n G(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \end{cases} \qquad (P_n)$$

où G est une fonction de Carathéodory satisfaisant une condition de croissance. On s'intéressera au comportement de la limite de la suite u_n [11]; on montre que cette limite est solution du problème bilatéral suivant:

$$\begin{cases} \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \ \text{ p.p. } \}, \end{cases} \qquad (1.6)$$

où

$$q_+(x) = \inf\{s > 0 : g(x,s) \geq 1\}$$

et

$$q_-(x) = \sup\{s < 0 : g(x,s) \leq -1\}.$$

On envisagera les deux cas $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega)$. Dans ce dernier cas, on suppose de plus que

$$|G(x,s,\zeta)| \geq \beta|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \gamma, \qquad (1.7)$$

où $\beta > 0, \gamma \geq 0$.
Lorsque $g(x,s) = s$ et $G(x,s,\zeta) = |\zeta|^p$, on peut consulter [19].
Pour illustrer l'importance des résultats obtenus, on donnera quelques applications.
Dans le cinquième chapitre, on s'intéressera à la limite des problèmes (P_n) dans le cas L^1 mais sans supposer (1.7) [12].

Afin de trouver un résultat similaire au précédent, on aura besoin du concept fort des solutions d'entropie. On étudiera plus précisément la suite des problèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in T_0^{1,p}(\Omega), |g(x,u_n)|^n G(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n - v)dx \\ \qquad + \displaystyle\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_k(u_n - v)dx \\ \qquad \le \displaystyle\int_\Omega f T_k(u_n - v)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \forall k > 0 \end{array} \right. \tag{1.8}$$

où $T_0^{1,p}(\Omega) = \{v : \Omega \to I\!R \text{ mesurable }, \ T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$.
On montre que

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

où u est l'unique solution de l'inéquation:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in T_0^{1,p}(\Omega), \\ q_- \le u \le q_+ \ \text{ p.p. }, \\ \langle Au, T_k(v-u)\rangle \ge \langle f, T_k(v-u)\rangle, \ \forall v \in K \cap L^\infty(\Omega), \forall k > 0, \end{array} \right. \tag{1.9}$$

où K est défini comme dans (1.6).
On notera l'aspect régulateur du terme en puissance dans (1.8) lorsque q_- et q_+ sont dans $L^\infty(\Omega)$ (voir [19]). Ceci est bien illustré lorsque $p > 2 - \frac{1}{N}$, on remarque que u_n appartient seulement à $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$, tandis que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans le dernier chapitre, on étend les résultats précédents au cas parabolique [14]. On étudiera, ainsi, la suite des équations paraboliques:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_n}{\partial t} + Au_n + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)) \\ u_n \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)), u_n(0) = 0, \\ |g(x,u_n)|^n G(x,t,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega \times (0,T)). \end{array} \right. \tag{1.10}$$

On montrera que la suite u_n solution du problème (1.10) converge fortement dans $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ vers une fonction u solution de l'inéquation parabolique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, v - u\rangle dt + \int_0^T \langle Au, v-u\rangle dt \ge \int_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \ \forall v \in \mathcal{K} \cap D \\ u \in \mathcal{K} = \{v \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) : v(t) \in K \text{ p.p.}\}, \end{array} \right. \tag{P}$$

où $D = \{v \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))\}$ et $K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \le v \le q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.
On achèvera ce travail par approcher le problème (1.6) par une suite d'équations paraboliques de type (1.10). On montrera que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ où $\tilde{u}$ est l'unique solution de (1.6), avec $\tilde{u}_n(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_n(x,t)dt$.

Chapter 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats d'existence liés aux problèmes elliptiques et paraboliques non linéaires. On fait aussi un aperçu sur les espaces d'Orlicz.

1.1 Résultats d'existence pour les problèmes elliptiques

1.1.1 Existence des solutions: le cas ou le second membre dans le dual

Soient Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 1$ et A un opérateur de type Leray-Lions défini par: $Au = -div(a(x, u, \nabla u))$ où
$a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour tous $\zeta, \zeta' \in I\!R^N$: $\zeta \neq \zeta', s \in I\!R$ et presque tout $x \in \Omega$:

$$|a(x, s, \zeta)| \leq \beta(h(x) + |s|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}) \tag{1.1}$$

$$(a(x, s, \zeta) - a(x, s, \zeta'))(\zeta - \zeta') > 0 \tag{1.2}$$

$$a(x, s, \zeta)\zeta \geq \alpha|\zeta|^p \tag{1.3}$$

où $\alpha > 0,\ 1 < p < +\infty,\ \beta \geq 0$ et $h \in L^{p'}(\Omega)$.
Soit $g(x, s, \zeta) : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour tous $(s, \zeta) \in I\!R \times I\!R^N$ et presque tout $x \in \Omega$:

$$g(x, s, \zeta)s \geq 0 \tag{1.4}$$

$$|g(x, s, \zeta)| \leq b(|s|)(c(x) + |\zeta|^p) \tag{1.5}$$

avec $b : I\!R^+ \to I\!R^+$ est une fonction croissante continue et c(x) est une fonction donnée dans $L^1(\Omega)$.
On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} Au + g(x, u, \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

On commence par un résultat dû à Boccardo-Benssoussan-Murat (voir [16, 27]):

Théorème 1.1 *Soit* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. *Alors sous les hypothèses* (1.1) − (1.5), *il existe au moins une solution du problème faible suivant associé à* (P_1)

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega),\ g(x,u,\nabla u)u \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, v\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)v dx = \langle f, v\rangle, \\ \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et pour } v = u. \end{cases}$$

1.1.2 Existence des solutions: le cas L^1

Récemment, ce cas a été intensivement étudié par plusieurs auteurs. On entame cette section par ce résultat dû à Boccardo et Gallouët (voir [23, 27, 29]) et qui est semblable au cas variationnel mais sous l'ajout de l'hypothèse:

$$|g(x,s,\zeta)| \geq \gamma|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \mu. \tag{1.6}$$

Théorème 1.2 *Soit* $f \in L^1(\Omega)$. *Alors sous les hypothèses* (1.1) − (1.6), *il existe au moins une solution du problème faible suivant associé à* (P_1)

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, v\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)v dx = \int_\Omega f v dx, \\ \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Dans [53], A. Porretta a obtenu un résultat sans la condition (1.6), mais dans ce cas la sommabilité des gradients des solutions n'atteint pas l'ordre p. Ainsi, il généralise les résultats obtenus par Boccardo et Gallouët dans les cas $g \equiv 0$ et $g \equiv g(x,s)$ (voir [21, 22, 17].

Théorème 1.3 *Supposons que* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $p \in]1, N]$. *Alors sous les hypothèses* (1.1)−(1.5), *le problème*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^q dx < \infty,\ \forall q < \dfrac{N(p-1)}{N-1},\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, v\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)v dx = \int_\Omega f v dx, \\ \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Remarque 1.1 - *Lorsque* $p > 2 - \frac{1}{N}$ *alors* $\frac{N(p-1)}{N-1} > 1$ *ce qui assure que* $\nabla u \in L^1(\Omega)$.
- *Pour* $p > N$ *on a* $L^1(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ *et on est donc dans le cas variationnel (voir le théorème (1.1)).*

1.1.3 Existence des solutions pour des problèmes unilatéraux

Soit $\psi : \Omega \to \bar{I\!R}$ une fonction mesurable telle que

$$\psi^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{1.7}$$

Considérons K_ψ un sous-ensemble convexe de $W_0^{1,p}(\Omega)$ défini par:

$$K_\psi = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \ v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

On donne maintenant ce théorème qu'on peut trouver dans [16].

Théorème 1.4 *Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors sous les hypothèses $(1.1)-(1.5)$ et (1.7), il existe au moins une solution au problème unilatéral suivant:*

$$\begin{cases} u \in K_\psi, \ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \ g(x,u,\nabla u)u \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, v-u\rangle + \displaystyle\int_\Omega g(x,u,\nabla u)(v-u)dx \geq \langle f, v-u\rangle, \\ \quad \forall v \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Pour $f \equiv 0$, on peut consulter [30].
Dans le cas L^1, on présente un résultat dû à A.Benkirane et A. Elmahi (voir [8]).

Théorème 1.5 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors sous les hypothèses $(1.1)-(1.6)$ et (1.7), il existe au moins une solution au problème unilatéral suivant:*

$$\begin{cases} u \in K_\psi, \ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, T_k(v-u)\rangle + \displaystyle\int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(v-u)dx \geq \langle f, T_k(v-u)\rangle, \\ \quad \forall v \in K_\psi. \end{cases}$$

1.2 Existence des solutions dans le cas parabolique

1.2.1 le cas variationnel

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 2$. Soit $T > 0$ fixé, on désigne par Q_T le cylindre $\Omega \times (0,T)$ et par Γ la surface latérale $\partial\Omega \times (0,T)$.
Soit $a(x,t,s,\zeta) : \Omega \times (0,T) \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ une fonction de Carathéodory telle que:

$$|a(x,t,s,\zeta)| \leq \beta[|s|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} + k(x,t)], \tag{2.1}$$

$$a(x,t,s,\zeta)\zeta \geq \alpha|\zeta|^p, \tag{2.2}$$

$$(a(x,t,s,\zeta) - a(x,t,s,\eta))(\zeta - \eta) > 0, \tag{2.3}$$

pour presque tout $(x,t) \in Q_T$, tout $s \in I\!R$, tous ζ, η dans $I\!R^N$, $\zeta \neq \eta$, avec $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ et k est une fonction positive appartenant à $L^{p'}(Q_T)$. Soit A l'opérateur défini par $Au = -div(a(x,t,u,\nabla u))$. Il est facile de voir que A opère $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ dans son dual $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.
Soit $g : \Omega \times (0,T) \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ est une fonction de carathéodory vérifiant pour presque tout $(x,t) \in Q_T$ et pour tous $s \in I\!R$ et $\zeta \in I\!R^N$:

$$g(x,t,s,\zeta)s \geq 0, \tag{2.4}$$

$$|g(x,t,s,\zeta)| \leq h(|s|)[c(x,t) + |\zeta|^p], \tag{2.5}$$

où $h : I\!R^+ \to I\!R^+$ est une fonction continue croissante et c(x,t) est une fonction positive dans $L^1(Q_T)$.

Considérons maintenant le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + g(x,t,u,\nabla u) = f \text{ dans } Q_T, \\ u(x,0) = 0 \text{ sur } \Omega, \\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{P_2}$$

Enonçons le théorème d'existence suivant, dû premièrement à Mustonen-Landes [47], et ensuite par Dall'Aglio et Orsina [37].

Théorème 1.6 *Soit $f \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$. Alors sous les conditions $(2.1)-(2.5)$, le problème (P_2) admet au moins une solution faible dans le sens suivant:*

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)),\ g(x,t,u,\nabla u) \in L^1(Q_T), \\ -\displaystyle\int_{Q_T} u\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_{Q_T} a(x,t,u,\nabla u)\nabla\phi dxdt + \int_{Q_T} g(x,t,u,\nabla u)\phi dxdt = \langle f, \phi\rangle, \\ \textit{pour tout } \phi \in C^\infty(\bar{Q_T}),\ \textit{avec } \phi(t) = 0 \textit{ dans un voisinage de } \Gamma_T \cup (\Omega\times T). \end{cases}$$

De plus, $u \in C^0(0,T; L^2(\Omega))$ et, si $\theta : I\!R \to I\!R$ est une fonction liptchitzienne croissante telle que $\theta(0) = 0$, on a alors, pour tout $\tau \in (0,T]$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Theta(u)(\tau)dx & + \displaystyle\int_{Q_\tau} a(x,t,u,\nabla u)\nabla\theta(u)dxdt \\ & + \displaystyle\int_{Q_\tau} g(x,t,u,\nabla u)\theta(u)dxdt = \langle f, \theta(u)\rangle. \end{cases}$$

où $\Theta(s) = \displaystyle\int_0^s \theta(\sigma)d\sigma$.

1.2.2 le cas L^1

Dans [37], Dall'aglio et Orsina ont obtenu un résultat presque similaire au cas variationnel si la non-linéarité g vérifie de plus, pour presque tout $(x,t) \in Q_T$, la condition:

$$|g(x,t,s,\zeta)| \geq \gamma|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \mu, \tag{2.6}$$

avec $\gamma > 0, \mu \geq 0$. Consulter aussi [54].

Théorème 1.7 *Soit $f \in L^1(Q_T)$. Alors sous les conditions $(2.1)-(2.6)$, le problème (P_2) admet au moins une solution faible dans le sens suivant:*

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)),\ g(x,t,u,\nabla u) \in L^1(Q_T), \\ -\displaystyle\int_{Q_T} u\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_{Q_T} a(x,t,u,\nabla u)\nabla\phi dxdt + \int_{Q_T} g(x,t,u,\nabla u)\phi dxdt = \langle f, \phi\rangle, \\ \textit{pour tout } \phi \in C^\infty(\bar{Q_T}),\ \textit{avec } \phi(t) = 0 \textit{ dans un voisinage de } \Gamma_T \cup (\Omega\times T). \end{cases}$$

De plus, si $\theta : I\!\!R \to I\!\!R$ est une fonction liptchitzienne, bornée, croissante telle que $\theta(0) = 0$ et $\lim_{|s|\to+\infty} \theta'(s) = 0$ on a alors, pour tout $\tau \in (0,T]$, $\Theta(u(.,\tau)) \in L^1(\Omega)$, et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle\int_\Omega \Theta(u)(\tau)dx & + & \displaystyle\int_{Q_\tau} a(x,t,u,\nabla u)\nabla\theta(u)dxdt \\ & + & \displaystyle\int_{Q_\tau} g(x,t,u,\nabla u)\theta(u)dxdt = \langle f, \theta(u)\rangle. \end{array} \right.$$

où $\Theta(s) = \displaystyle\int_0^s \theta(\sigma)d\sigma.$

Pour le cas où $g \equiv 0$, on peut consulter par exemple [3, 31, 55].

1.3 Rappel sur les espaces d'Orlicz

1.3.1 Les N-fonctions

On dit que $M : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ est une N-fonction si M est continue, convexe avec $M(t) > 0$ pour $t > 0$, $\frac{M(t)}{t} \to 0$ quand $t \to 0$ et $\frac{M(t)}{t} \to \infty$ quand $t \to \infty$.

Ou d'une manière équivalente, M admet la représentation: $M(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$ où, $a : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ est une fonction croissante, continue à droite avec $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ pour $t > 0$ et $a(t)$ tend vers ∞ quand $t \to \infty$.

Comme exemples de N-fonctions on peut citer les suivantes:

$$-M_p(t) = \frac{|t|^p}{p}, 1 < p < \infty \text{ où } a(t) = t^{p-1}.$$

$$-M(t) = e^t - t - 1, \text{ où } a(t) = e^t - 1.$$

Soit M une N-fonction de représentation $M(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$. La N-fonction $\overline{M}$ conjugué de M est définie par $\overline{M}(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{a}(s)ds$, où $a : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ est donnée par $\bar{a}(t) = \sup\{s : a(s) \le t\}$ (voir [1]). Elle vérifie $\overline{(\overline{M})} = M$.

De plus on a l'inégalité de Young:

$$\forall s,t \ge 0 \text{ on a } st \le M(s) + \overline{M}(t).$$

L'égalité a lieu si et seulement si $t = a(s)$ ou $s = \overline{a}(t)$.

On en déduit facilement les inégalités suivantes:

$$\forall t > 0, \overline{M}(\frac{M(t)}{t}) < M(t).$$

$$\forall t > 0, M^{-1}(t)\overline{M}^{-1}(t) < 2t.$$

Pour le cas $M_p(t) = \frac{|t|^p}{p}, 1 < p < \infty$ on a $\overline{M}_p(t) = \frac{|t|^{p'}}{p'}$ où p' est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On dit que la N-fonction M satisfait la condition Δ_2, on note $M \in \Delta_2$, s'il existe $k > 0$ tel que:

$$M(2t) \le kM(t) \quad \forall t \ge 0, \tag{3.1}$$

quand (3.1) a lieu seulement pour $t \geq$ à un certain $t_0 > 0$ on dit que M satisfait la condition Δ_2 au voisinage de l'infini.
Comme on peut aisément le voir, une N-fonction M satisfait la condition Δ_2 (resp. la condition Δ_2 au voisinage de l'infini) si et seulement si, pour tout $r > 0$, il existe une constante $k = k(r) > 0$ (resp. deux constantes $k = k(r)$ et $t_0 = t_0(r) > 0$) telle que:

$$M(rt) \leq kM(t) \quad \forall t \geq 0 \text{ (resp. } \forall t \geq t_0)$$

Aussi, il est facile de vérifier que $M(t) = \int_0^t a(s)ds$ satisfait la condition Δ_2 (resp. la condition Δ_2 au voisinage de l'infini) si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$cta(t) \leq M(t) \leq ta(t) \ \forall t \geq 0 \text{ (resp. } \forall t \geq t_0).$$

Lorsque M satisfait la condition Δ_2 (resp. la condition Δ_2 au voisinage de l'infini) on ne peut rien dire sur sa N-fonction conjuguée comme le montrent les exemples suivants:
$-M_p(1 < p < \infty)$ satisfait la condition Δ_2 et $\overline{M_p} = M_{p'}$ satisfait aussi la condition Δ_2.
$-M(t) = (t+1)\log(t+1) - t$ satisfait la condition Δ_2 mais $\overline{M}(t) = e^t - t - 1$ ne satisfait pas la condition Δ_2 (ni même au voisinage de l'infini).
Soient P et Q deux N-fonctions.
On dit que Q domine P s'il existe $k > 0$ telle que:

$$P(t) \leq Q(kt), \ \forall t \geq 0. \tag{$\mathcal{P}$}$$

De façon similaire, Q domine P au voisinage de l'infini s'il existe $k > 0$ et $t_0 > 0$ tels que $(\mathcal{P})$ ait lieu seulement pour $t \geq t_0$. Dans ce cas, il existe $K > 0$ telle que:

$$P(t) \leq Q(kt) + K, \ \forall t \geq 0.$$

Les deux N-fonctions P et Q sont dites équivalentes (resp. équivalentes au voisinage de l'infini) si chacune domine l'autre (resp. au voisinage de l'infini).
P et Q sont dites équivalentes si et seulement si $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont équivalentes.
Si Q domine P au voisinage de l'infini et ne sont pas équivalentes au voisinage de l'infini on dit que P croît essentiellement moins vite que Q et l'on écrit $P \ll Q$.
C'est le cas si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{P(t)}{Q(\epsilon t)} \to 0$ quand $t \to \infty$ et il est facile de voir que c'est aussi équivalent à dire que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{Q^{-1}(t)}{P^{-1}(t)} = 0$.
De plus, on a l'équivalence suivante:

$$P \ll Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \ll \overline{P} \quad \text{(voir [1, 45]).}$$

1.3.2 Les espaces d'Orlicz et d'Orlicz-Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$. la classe d'Orlicz $K_M(\Omega)$ (resp. la classe d'Orlicz $L_M(\Omega)$ est définie comme étant l'ensemble (des classes d'équivalence modulo l'égalité p.p. sur Ω) de fonctions réelles mesurables u sur Ω telles que:

$$\int_\Omega M(u(x))dx < +\infty (\text{ resp. } \int_\Omega M(\frac{u(x)}{\lambda})dx < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0).$$

$L_M(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme de Luxemburg:

$$\|u\|_{M,\Omega} = \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega M(\frac{u(x)}{\lambda})dx \leq 1\}$$

et $K_M(\Omega)$ est un sous-ensemble convexe de $L_M(\Omega)$.
Si Q domine P (au voisinage de l'infini seulement lorsque Ω est de mesure finie) alors $L_Q(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L_P(\Omega)$.
La fermeture dans $L_M(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions bornées à support borné dans $\overline{\Omega}$ est notée $E_M(\Omega)$. On a toujours $E_M(\Omega) \subset K_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$.
L'égalité $E_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ a lieu si et seulement si M satisfait la condition Δ_2 (au voisinage de l'infini seulement lorsque Ω est de mesure finie).
Rappelons que l'inégalité de Young appliquée avec $\frac{u}{\|u\|_M}$ et $\frac{v}{\|v\|_M}$ où $u \in L_M(\Omega)$ et $v \in L_{\overline{M}}(\Omega)$ donne l'analogue de l'inégalité de Hölder:

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx| \leq 2\|u\|_M \|v\|_{\overline{M}}$$

L'espace dual de $E_M(\Omega)$ peut être identifié à $L_{\overline{M}}(\Omega)$ au moyen du produit $\int_\Omega u(x)v(x)dx$, et la norme duale sur $L_{\overline{M}}(\Omega)$ est équivalente à $\|.\|_{\overline{M},\Omega}$.
L'espace $L_M(\Omega)$ est réflexif si et seulement si M et $\overline{M}$ satisfont la condition Δ_2 (au voisinage de l'infini seulement lorsque Ω est de mesure finie).
L'espace de Schwartz $D(\Omega)$ est dense dans $E_M(\Omega)$ et $E_M(\Omega)$ est séparable.
$L_M(\Omega)$ n'est jamais séparable sauf lorsque $L_M(\Omega)$ coincide avec $E_M(\Omega)$.
Lorsque $M = M_p$ on a $L_{M_p}(\Omega) = E_{M_p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Dans la suite on aura besoin des lemmes suivants (voir les lemme 4.4 et 5.7 de [40]).

Lemme 1.1 *Soit $(u_n) \subset L_M(\Omega)$ une suite bornée dans $L_M(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω. Alors, $u \in L_M(\Omega)$ et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L_M(\Omega)$ pour $\sigma(L_M(\Omega), E_{\overline{M}}(\Omega))$.*

Lemme 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$. Alors, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que*

$$\int_\Omega M(|v|)dx \leq \int_\Omega c_1 M(c_2|\nabla v|)dx$$

pour tout $v \in W_0^1 L_M(\Omega)$.

L'espace d'Orlicz-Sobolev d'ordre 1 noté $W^1L_M(\Omega)$[resp. $W^1E_M(\Omega)$] est défini comme étant l'ensemble des u telles que u et ses dérivées, au sens des distributions, d'ordre ≤ 1, appartiennent à $L_M(\Omega)$ [resp. $E_M(\Omega)$].
Ce sont des espaces de Banach pour la norme:

$$\|u\|_{1,M} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_M.$$

Ainsi, $W^1L_M(\Omega)$ et $W^1E_M(\Omega)$ peuvent être identifiés avec des sous-espaces du produit de $N+1$ copies de $L_M(\Omega)$. En notant ce produit par ΠL_M, on utilisera les topologies faibles $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}})$ et $\sigma(\Pi L_M, \Pi L_{\overline{M}})$.
L'espace $W_0^1E_M(\Omega)$ est défini comme étant la fermeture pour la norme de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^1E_M(\Omega)$ et $W_0^1L_M(\Omega)$ comme étant la fermeture pour la topologie $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}})$ de $D(\Omega)$ dans $W^1L_M(\Omega)$.
On dit que u_n converge vers u pour la convergence modulaire dans $W^1L_M(\Omega)$ si pour un certain $\lambda > 0$

$$\int_\Omega M(\frac{D^\alpha u_n - D^\alpha u}{\lambda})dx \to 0 \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq 1.$$

Ceci implique la convergence pour $\sigma(\Pi L_M, \Pi L_{\overline{M}})$.
Si M satisfait la condition Δ_2 sur $I\!R^+$ (au voisinage de l'infini seulement lorsque Ω est de mesure finie), alors la convergence modulaire coincide avec la convergence en norme.

1.3.3 Théorème d'injection des espaces d'Orlicz-Sobolev

On dit que $\Omega \subset I\!R^N$ possède la propriété du segment s'il existe un recouvrement localement fini $\{U_i\}$ de la frontière $\partial\Omega$ de Ω et une suite correspondante de vecteurs, $\{y_i\}$ tels que pour tout $x \in \overline{\Omega} \cap U_i$ et tout $t \in]0,1[$, $x + ty_i \in \Omega$.
Soit M une N-fonction et supposons que

$$\int_1^\infty \frac{M^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds = +\infty.$$

Soit $\hat{M}$ une N-fonction égale à M au voisinage de l'infini et telle que:

$$\int_0^1 \frac{\hat{M}^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds < +\infty$$

(voir [2] pour la construction d'une telle N-fonction).
Définissons la N-fonction $\hat{M}_1$ par la formule:

$$\hat{M}_1(t) = \int_0^t \frac{M^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds$$

et soit M_1 une N-fonction égale à M au voisinage de 0 et à $\hat{M}_1$ au voisinage de l'infini.
En répétant ce procédé, on obtient une suite finie de N-fonctions: $M_1, M_2 = (M_1)_1, ..., M_q$, où $q = q(M,N)$ est tel que:

$$\int_1^\infty \frac{M_{q-1}^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds = +\infty \text{ mais } \int_1^\infty \frac{M_q^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds < +\infty.$$

Si

$$\int_1^\infty \frac{M_q^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds < +\infty$$

on pose $q(M,N) = 0$.
On dit qu'un ouvert Ω de $I\!R^N$ vérifie la propriété du cône s'il existe un cône fixe C tel que pour tout $x \in \Omega$, on peut trouver un cône $C_x \subset \Omega$, de sommet x et isométrique à C. On a le lemme suivant(voir [1, 2, 38]):

Lemme 1.3 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$ vérifiant la propriété du cône.*
Si $m \leq q(M,N)$ alors $W^1L_M(\Omega) \subset L_{M_m}(\Omega)$ avec injection continue.
Si $m > q(M,N)$ alors $W^1L_M(\Omega) \subset C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec injection continue.

Ainsi dans les deux cas, il existe une N-fonction Q telle que $M \ll Q$ et $W^1L_M(\Omega) \subset L_Q(\Omega)$ avec injection continue (voir [1, 39]).
On sait, aussi, qu'il existe une N-fonction Q telle que

$$M \ll Q \text{ et } W^1L_M(\Omega) \subset E_Q(\Omega)$$

avec injection compacte (voir [1, 38]).
En particulier, on a $W^1L_M(\Omega) \subset E_M(\Omega)$ avec injection compacte.
Lorsque Ω est un ouvert quelconque, les injections du lemme précédent restent aussi valables pour $W_0^1L_M(\Omega)$ à la place de $W^1L_M(\Omega)$.
Et l'on déduit, alors, qu'il existe une N-fonction Q telle que

$$M \ll Q \text{ et } W_0^1L_M(\Omega) \subset E_Q(\Omega)$$

avec injection continue (et même, elle peut être supposée, compacte). De plus, on a:

$$W_0^1L_M(\Omega) \subset E_M(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Une deuxième application du lemme précédent permet de voir que, lorsque Ω est aussi ouvert quelconque, il existe une N-fonction Q telle que

$$M \ll Q \text{ et } W^1L_M(\Omega) \subset E_Q^{loc}(\Omega)$$

avec injection continue (et même compacte). Ainsi, $W^1L_M(\Omega) \subset E_M^{loc}(\Omega)$ avec injection continue et compacte.

On désigne par $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ [resp. $W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)$] l'espace des distributions sur Ω qui peuvent s'écrire comme somme des dérivées d'ordre ≤ 1 de fonctions dans $L_{\overline{M}}$ [resp. $E_{\overline{M}}(\Omega)$]. Ce sont des espaces de Banach pour la norme quotient.
Si l'ouvert Ω possède la propriété du segment, alors l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $W_0^1L_M(\Omega)$ pour la convergence modulaire et pour la topologie $\sigma(\Pi L_M, \Pi L_{\overline{M}})$ (voir [40, 41]). Par conséquent, la valeur d'une distribution S dans $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ sur un élément u de $W_0^1L_M(\Omega)$ est bien définie, elle est notée $\langle S, u\rangle$. On rappelle quelques lemmes qui seront appliqués aux opérateurs de troncature (voir [9]).

Lemme 1.4 *Soit $F : I\!R \to I\!R$ une application uniformément lipschitzienne, avec $F(0) = 0$ et soit M une N-function. Alors, $F : X \to X$ est une application dans chacun des cas suivants:*

(i) $X = W^1L_M(\Omega)$
(ii) $X = W_0^1L_M(\Omega)$ et Ω vérifiant la propriété du segment.

De plus, si l'ensemble D l'ensemble de discontinuité de F' est fini on a:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F(u) = \begin{cases} F'(u)\frac{\partial}{\partial x_i}u \text{ p.p. dans } \{x \in \Omega : u(x) \notin D\}, \\ 0 \quad \text{ p.p. dans } \{x \in \Omega : u(x) \notin D\} \end{cases}$$

et $F : X \to X$ est continue pour la norme et séquentiellement continue pour la topologie faible $*\sigma((\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}})$.

on donne, maintenant, un lemme concernant les opérateurs de Nemytskii dans les espaces d'Orlicz (voir [9, 10]).

Lemme 1.5 *Let Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ et soient M, P et Q des N-fonctions telles que $Q \ll P$, et soit $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ une fonction de Carathéodory telle que pour p.p. $x \in \Omega$ et tout $s \in I\!R$:*

$$|f(x, s)| \leq c(x) + k_1 P^{-1}M(k_2|s|),$$

avec k_1, k_2 sont des réels positifs et $c(x) \in E_Q(\Omega)$.
Alors, l'opérateur de Nemytskii N_f défini par $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$, est fortement continue de $\mathcal{P}(E_M(\Omega), \frac{1}{k_2}) = \{u \in L_M(\Omega) : d(u, E_M(\Omega)) < \frac{1}{k_2}\}$ muni de la topologie forte de $L_M(\Omega)$ dans $E_Q(\Omega)$ muni de la topologie forte.

Part I

Existence des solutions pour des problèmes elliptiques fortement non linéaires

Chapter 2

Problème unilatéral à croissance naturelle et à donnée dans L^1

Considérons l'équation non linéaire de type Dirichlet suivant:

$$Au + g(x, u, \nabla u) = f \tag{P}$$

où A est un opérateur de type Leray-Lions, $f \in L^1(\Omega)$ et g est une perturbation à croissance naturelle par rapport au $|\nabla u|$ et qui vérifie une condition de signe classique.
On se propose d'étudier le problème unilatéral associé à (P). Pour le cas d'équation, on peut consulter [53].

2.1 Résultat principal

Soient Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 2$, et $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$.
Soit $A(u) = -div(a(x, u, \nabla u))$ un opérateur de type Leray-Lions défini sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$, où $a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour presque tout $x \in \Omega$, tous $\zeta, \zeta' \in I\!R^N, (\zeta \neq \zeta')$ et tout $s \in I\!R$:

$$|a(x, s, \zeta)| \leq h(x) + k_1|s|^{p-1} + k_2|\zeta|^{p-1} \tag{2.1}$$

$$(a(x, s, \zeta) - a(x, s, \zeta'))(\zeta - \zeta') > 0 \tag{2.2}$$

$$a(x, s, \zeta)\zeta \geq \alpha|\zeta|^p \tag{2.3}$$

with $\alpha > 0,\ k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0$ et $h \in L^{p'}(\Omega)$.(On désigne par p' le conjugué de p).
De plus, soit $g : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une fonction de Carathéodory vérifiant pour presque tout $x \in \Omega$, tout $s \in I\!R$ et tout $\zeta \in I\!R^N$:

$$g(x, s, \zeta)s \geq 0 \tag{2.4}$$

$$|g(x, s, \zeta)| \leq b(|s|)(c(x) + |\zeta|^p) \tag{2.5}$$

où $b : I\!R_+ \to I\!R$ est une fonction croissante continue et $c(x)$ est une fonction positive appartenant à $L^1(\Omega)$.
Soit
$$K_\psi = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}$$
où $\psi : \Omega \to \overline{I\!R}$ est une fonction mesurable sur Ω telle que
$$\psi^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{2.6}$$
Finalement, supposons que
$$f \in L^1(\Omega). \tag{2.7}$$
On définit, pour s et k dans $I\!R$, $k \geq 0$, $T_k(s) = \max(-k, \min(k, s))$.
On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses (2.1)-(2.7) ont lieu. Alors il existe au moins une solution du problème unilatéral suivant:*
$$\left\{\begin{array}{l} u \geq \psi \ p.p. \ dans\ \Omega \\ u \in W_0^{1,q}(\Omega), \forall\ 1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}, \quad g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \forall v \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega). \end{array}\right. \tag{P_ψ}$$

Remarque 2.1 *-Le même résultat reste vrai si on suppose que la condition du signe* (2.4) *est vérifiée seulement à l'infini, ou si le second membre est de la forme $f - div(F)$, avec $f \in L^1(\Omega)$ et $F \in (L^{p'}(\Omega))^N$.*

Remarque 2.2 *Si on suppose que a ne dépend pas de s: $a(x,s,\zeta) = a(x,\zeta)$ et*
$$[a(x,\zeta) - a(x,\zeta')][\zeta - \zeta'] \geq \alpha|\zeta - \zeta'|^p \ si \ \ p \geq 2$$
$$[a(x,\zeta) - a(x,\zeta')][\zeta - \zeta'] \geq \alpha\frac{|\zeta - \zeta'|^2}{(h(x) + |\zeta| + |\zeta'|)^{2-p}} \ si \ \ p < 2$$
avec $\alpha > 0$ et $h \in L^p(\Omega)$. On peut remplacer dans (P_ψ), $K_\psi \cap L^\infty(\Omega)$ par K_ψ.

Preuve de la remarque 2.2.
Soit $v \in K_\psi$.
En prenant $T_n(v), n \geq \|\psi^+\|_\infty$, comme fonction test dans (P_ψ), on obtient
$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u - T_n(v))dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u - T_n(v))dx \leq \int_\Omega f T_k(u - T_n(v))dx \quad (*)$$

alors, si $p \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq \\ \leq \int_\Omega (a(x,\nabla u) - a(x,\nabla T_n(v)))\nabla T_k(u-T_n(v))dx \\ \leq Ck + Ck + C(\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx)^{1/p}\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq C_k$$

où C_k est une constante dépendante de k mais non de n.

Si $p < 2$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq \\ \leq \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u-T_n(v))|^p}{(h(x)+|\nabla u|+|\nabla T_n(v)|)^{(2-p)p/2}}(h(x)+|\nabla u|+|\nabla T_n(v)|)^{(2-p)p/2}dx\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq \\ &\leq [\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u-T_n(v))|^2}{(h(x)+|\nabla u|+|\nabla T_n(v)|)^{2-p}}dx]^{p/2}(\int_{\{|u-T_n(v)|\leq k\}}(h(x)+|\nabla u|+|\nabla T_n(v)|)^p dx)^{(2-p)/2} \\ &\leq [\int_\Omega (a(x,\nabla u)-a(x,\nabla T_n(v)))\nabla T_k(u-T_n(v))dx]^{p/2}[C+C\|\nabla T_k(u-T_n(v))\|_p^{p(2-p)/2}]\end{aligned}$$

ce qui donne, grâce à $(*)$ et l'inégalité de Hölder de nouveau,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq \\ &\leq [2Ck + C\|\nabla T_k(u-T_n(v))\|_p]^{p/2}[C+C\|\nabla T_k(u-T_n(v))\|_p^{p(2-p)/2}]\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u-T_n(v))|^p dx \leq C_k, \quad \forall n.$$

On déduit donc, dans tous les cas, que

$$\nabla T_k(u-T_n(v)) \rightharpoonup \nabla T_k(u-v) \text{ faiblement dans } (L^p(\Omega))^N$$

(pour une sous-suite).

On va passer, maintenant à la limite dans $(*)$.

Remarquons que,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-T_n(v))dx \\ &\qquad = \int_\Omega (a(x,\nabla u)-a(x,\nabla T_n(v)))\nabla T_k(u-T_n(v))dx \\ &\qquad + \int_\Omega a(x,\nabla T_n(v))\nabla T_k(u-T_n(v))dx\end{aligned}$$

alors, par utilisation du lemme de Fatou dans le deuxième terme et le théorème de Lebesgue dans le troisième, on aura

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-T_n(v))dx \\ \geq \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx.$$

Finalement, en appliquant le théorème de Lebesgue dans les autres termes de $(*)$, on complète la preuve de la remarque. ∎

Preuve du Théorème 2.1:

Etape 1: Estimations a priori.

Considérons la suite approchée des problèmes unilatéraux:

$$\begin{cases} u_n \in K_\psi,\ g(x,u_n,\nabla u_n)\in L^1(\Omega),\ g(x,u_n,\nabla u_n)u_n\in L^1(\Omega) \\ \langle A(u_n),u_n-v\rangle + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)(u_n-v)dx \leq \int_\Omega f_n(u_n-v)dx \\ \qquad \forall v\in K_\psi\cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{2.8}$$

où f_n est une suite de fonctions régulières qui converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.
Par le théorème 1.4 du chapitre 1, il existe au moins une solution u_n de (2.8).
Prenons $v\in K_\psi$ et choisissons $h\geq k+\|\psi^+\|_\infty$ de telle façon que $w=T_h(u_n)-T_k(u_n-v)\in K_\psi\cap L^\infty(\Omega)$. En utilisant w comme fonction test dans (2.8) et en tendant $h\to+\infty$, nous obtenons:

$$\begin{cases} \langle A(u_n),T_k(u_n-v)\rangle + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n-v)dx, \\ \qquad\qquad \leq \int_\Omega f_nT_k(u_n-v)dx \\ \qquad \forall v\in K_\psi,\ \forall k>0. \end{cases} \tag{P_n}$$

En choisissant $v=\psi^+$ comme fonction test dans (P_n), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\psi^+)dx + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n-\psi^+)dx \leq \int_\Omega f_nT_k(u_n-\psi^+)dx$$

et en tenant compte du fait que $g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n-\psi^+)\geq 0$, il en découle

$$\int_{\{|u_n-\psi^+|\leq k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(u_n-\psi^+)dx \leq Ck$$

Et par l'inégalité de Young, on aura

$$\int_{\{|u_n-\psi^+|\leq k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \leq C_1+\frac{\alpha}{2}\int_{\{|u_n-\psi^+|\leq k\}}|\nabla u_n|^p dx$$

où C_1 est une constante indépendante de n (mais peut dépendre de $k,\psi^+,c(x),k_1,k_2,\alpha$).
Donc, en utilisant (2.3), on obtient

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\{|u_n-\psi^+|\leq k\}}|\nabla u_n|^p dx \leq C_1.$$

Finalement, on a pour tout $h > 0$

$$\int_{\{|u_n| \leq h\}} |\nabla u_n|^p dx \leq \int_{\{|u_n - \psi^+| \leq h + \|\psi^+\|_\infty\}} |\nabla u_n|^p dx \leq C_1. \tag{2.9}$$

Le choix de $v = T_h(u_n), h \geq \|\psi^+\|_\infty$ comme fonction test dans (P_n) avec $k = 1$, donne

$$\int_{\{h \leq |u_n| < h+1\}} |\nabla u_n|^p dx \leq C$$

et $\displaystyle\int_{\{|u_n| \geq h+1\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq C.$

Par conséquent, comme dans [21], on a pour tout q tel que $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$:

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx \leq C_q. \tag{2.10}$$

Notons qu'on a aussi

$$\int_\Omega |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq C. \tag{2.11}$$

Grâce à (2.10), il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{1,q}(\Omega)$$

et par (2.9)

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall k > 0.$$

<u>Etape 2</u>: Convergence presque partout des gradients.

Fixons q tel que $1 < q < \bar{q}$. Et considérons

$$I_n = \int_\Omega \{[a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)]\nabla(u_n - u)\}^\theta dx$$

avec $0 < \theta < \frac{q}{p}$. Soit $k \geq \|\psi^+\|_\infty$. L'utilisation de $T_k(u)$ comme fonction test dans (P_n), donne, pour tout $\eta > 0$:

$$\begin{aligned} \langle A(u_n), T_\eta(u_n - T_k(u))\rangle \quad &+ \quad \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n) T_\eta(u_n - T_k(u)) dx \\ &\leq \quad \int_\Omega f_n T_\eta(u_n - T_k(u)) dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Grâce à (2.11) et (2.12), on montre , comme dans [18], que I_n converge vers zéro et que

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.13}$$

<u>Etape 3:</u> Convergence forte des troncatures.

Soit, maintenant, k tel que $k \geq \|\psi^+\|_\infty$ et soient $\gamma = (\frac{b(k)}{2\alpha})^2$ et $\phi(s) = s\exp(\gamma s^2)$.
Il est bien connu que

$$\phi'(s) - \frac{b(k)}{\alpha}|\phi(s)| \geq \frac{1}{2}, \ \forall s \in I\!R. \tag{2.14}$$

Considérons la fonction $h_m, m > 0$ définie par:

$$h_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq m \\ -\frac{t}{m}sgn(t) + 2 & \text{si } m \leq |t| \leq 2m \\ 0 & \text{si } |t| > 2m. \end{cases}$$

Soit $v_{n,m} = u_n - \eta h_m(u_n)\phi(z_n)$, avec $\eta = \exp(-4\gamma k^2)$, $z_n = T_k(u_n) - T_k(u)$.
Le choix de $v_{n,m}$ comme fonction test dans (P_n), donne pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} \langle A(u_n), T_h(\eta h_m(u_n)\phi(z_n))\rangle &+ \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)T_h(\eta h_m(u_n)\phi(z_n))dx \\ &\leq \int_\Omega f_n T_h(\eta h_m(u_n)\phi(z_n))dx, \end{aligned}$$

et en prenant $h > \phi(2k)$, on obtient

$$\langle A(u_n), h_m(u_n)\phi(z_n)\rangle + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \leq \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx.$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h'_m(u_n)\phi(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \leq \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notons par $\epsilon^1_m(n), \epsilon^2_m(n), ...$ des différentes suites de nombres réels qui convergent vers 0 quand n tend vers ∞, pour toute valeur fixée de m.
En tenant compte du fait que $g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n) \geq 0$ sur le sous-ensemble $\{x \in \Omega : |u_n(x)| > k\}$, on déduit de (2.15), que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h'_m(u_n)\phi(z_n)dx \\ &\quad + \int_{\{|u_n| \leq k\}} g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \leq \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx = \epsilon^1_m(n). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Le premier terme de l'inégalité précédente peut être écrit comme suit:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\ &\quad = \int_{\{|u_n| \leq k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\ &\quad - \int_{\{|u_n| > k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi'(z_n)dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Or, on a

$$\begin{array}{l}|\displaystyle\int_{\{|u_n|>k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx| \\ \quad \leq C_k \displaystyle\int_\Omega |a(x,T_{2m}(u_n),\nabla T_{2m}(u_n))||\nabla T_k(u)|\chi_{\{|u_n|>k\}}dx\end{array}$$

où $C_k = \phi^{'}(2k)$. Le second terme de l'inégalité précédente tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, la suite $(a(x,T_{2m}(u_n),\nabla T_{2m}(u_n)))_n$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ tandis que $\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|>k\}}$ tend vers 0 fortement dans $(L^p(\Omega))^N$.

Le deuxième terme de (2.17) peut être écrit comme suit

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times \\ \qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ \quad + \displaystyle\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx.\end{array} \tag{2.18}$$

Le troisième terme de (2.18) tend vers 0 puisque

$$a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)) \to a(x,T_k(u),\nabla T_k(u)) \text{ fortement dans } (L^{p'}(\Omega))^N$$

et

$$[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n) \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } (L^p(\Omega))^N.$$

Par conséquent, via (2.16), on a

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times \\ \qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ \quad +\epsilon_m^2(n).\end{array} \tag{2.19}$$

D'autre part, on a

$$|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx| \leq \frac{2\phi(2k)}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx$$

et par utilisation de $T_m(u_n), m \geq \|\psi^+\|_\infty$, comme fonction test dans (P_n) (avec $k=m$), on obtient

$$|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx| \leq 2\phi(2k)\int_{\{|u_n|\geq m\}}|f_n|dx. \tag{2.20}$$

Si on note par $J_{n,m}$, le troisième terme de (2.16), on aura

$$\begin{array}{rcl}|J_{n,m}| & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} b(k)(c(x)+|\nabla u_n|^p h_m(u_n))|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & b(k)\displaystyle\int_\Omega c(x)|\phi(z_n)|dx \\ & + & \dfrac{b(k)}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & \epsilon_m^3(n)+\dfrac{b(k)}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times \\ & & \quad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx\end{array} \tag{2.21}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx\\
&\quad=\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times\\
&\quad\quad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx\\
&\quad+\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx\\
&\quad+\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx.
\end{aligned}$$

Le troisième et le dernier terme de cette égalité tendent vers 0, puisque $(a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))_n$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$,

$$\nabla T_k(u)h_m(u_n)|\phi(z_n)| \to 0 \text{ fortement dans } (L^p(\Omega))^N$$

et

$$a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)) \to a(x,T_k(u),\nabla T_k(u)) \text{ fortement dans } (L^{p'}(\Omega))^N,$$

$$[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)|\phi(z_n)| \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } (L^p(\Omega))^N.$$

En combinant (2.19), (2.20) et (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times\\
&\quad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)(\phi'(z_n)-\tfrac{b(k)}{\alpha}|\phi(z_n)|)dx\\
&\quad\le \epsilon_m^4(n)+2\phi(2k)\int_{\{|u_n|\ge m\}}|f_n|dx.
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, via (2.14),

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times\\
&\quad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx\\
&\quad\le 2\epsilon_m^4(n)+4\phi(2k)\int_{\{|u_n|\ge m\}}|f_n|dx.
\end{aligned}$$

Passons à la limite sup en n

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times\\
&\quad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx\\
&\quad\le 4\phi(2k)\int_{\{|u|\ge m\}}|f|dx
\end{aligned}$$

par passage à la limite sup en m, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega [a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\times\\
&\quad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx\le 0.
\end{aligned}$$

Finalement, on parvient à montrer que

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx \\ = \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx. \tag{2.22}$$

En effet, on a

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx=0$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)h_m(u_n)dx \\ = \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.$$

Choisissons $u_n-(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)$, comme fonction test dans (P_n), on trouve

$$\langle A(u_n),T_k((1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+))\rangle \\ +\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k((1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+))dx \\ \le \int_\Omega f_nT_k((1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+))dx$$

ce qui donne, puisque $|(1-h_m(u_n))T_k(u_n)|\le k$ et

$$g(x,u_n,\nabla u_n)(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)\ge 0,$$

$$\langle A(u_n),(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)\rangle \le \int_\Omega f_n(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)dx$$

ainsi

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx \\ \le \int_\Omega f_n(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)dx \\ +\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)T_k(u_n-\psi^+)dx. \tag{2.23}$$

En tenant compte du fait que
$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)T_k(u_n-\psi^+)dx \le \frac{k}{m}\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx$
l'inégalité (2.23) devient

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx \\ \le \int_\Omega f_n(1-h_m(u_n))T_k(u_n-\psi^+)dx \\ +\frac{k}{m}\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx \\ +\int_{\{|u_n-\psi^+|<k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\psi^+(1-h_m(u_n))dx$$

et par passage à la limite sup en n, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{|u_n-\psi^+|<k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1-h_m(u_n))dx \\
&\qquad \leq \int_\Omega f(1-h_m(u))T_k(u-\psi^+)dx + \limsup_{n\to+\infty}\frac{k}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx \\
&\qquad + \int_{\{|u-\psi^+|\leq k\}} a(x,u,\nabla u)\nabla\psi^+(1-h_m(u))dx
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $h_m \to 1$ quand $m\to\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{|u_n-\psi^+|<k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1-h_m(u_n))dx \\
&\qquad\qquad \leq \limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\frac{k}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

D'autre part, puisque

$$\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx \leq m\int_{\{|u_n|\geq m} |f_n|dx$$

on a

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\frac{k}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx = 0.$$

D'où, d'après (2.24) on déduit que

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{|u_n-\psi^+|<k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1-h_m(u_n))dx = 0,\ \forall k\geq\|\psi^+\|_\infty. \tag{2.25}$$

En remarquant que

$$\int_{\{|u_n|<k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1-h_m(u_n))dx \leq$$

$$\leq \int_{\{|u_n-\psi^+|<k+\|\psi^+\|_\infty\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1-h_m(u_n))dx$$

on obtient par (2.25)

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))dx = 0. \tag{2.26}$$

Ecrivons maintenant comme suit

$$\begin{aligned}
a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n) &= a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n) \\
&+ a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, en utilisant (2.22) et (2.26),

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx \leq \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx$$

ainsi

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx \leq \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx. \tag{2.27}$$

D'autre part, grâce au lemme de Fatou, on a

$$\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx \le \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx$$

par conséquent, en vertu de (2.27), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx = \int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx. \tag{2.28}$$

D'autre part, puisque

$$|\nabla T_k(u_n)|^p \le \frac{1}{\alpha}a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)$$

alors par le théorème de Vitali et (2.28), on aboutit à

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \forall k \ge \|\psi^+\|_\infty. \tag{2.29}$$

Etape 4: Passage à la limite.

En prenant $v \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega)$, comme fonction test dans (P_n), on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u_n),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_n))\nabla T_k(u_n-v)dx&\\ +\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n-v)dx&\\ \le \int_\Omega f_nT_k(u_n-v)dx.&\end{aligned} \tag{2.30}$$

En tenant compte du fait que

$$a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u_n),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_n)) \to a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u)) \text{ fortement dans } (L^{p'}(\Omega))^N$$

et

$$\nabla T_k(u_n-v) \rightharpoonup \nabla T_k(u-v) \text{ faiblement dans } (L^p(\Omega))^N,$$

on aura

$$\int_\Omega a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u_n),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_n))\nabla T_k(u_n-v)dx$$

converge, quand $n\to\infty$, vers

$$\int_\Omega a(x,T_{k+\|v\|_\infty}(u),\nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u))\nabla T_k(u-v)dx.$$

Pour achever la preuve, on doit montrer que

$$g(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

En vertu du théorème de Vitali, il suffit de vérifier que $g(x,u_n,\nabla u_n)$ est équi-intégrable dans $L^1(\Omega)$.

En prenant $v = T_l(u_n),\ l \ge \|\psi^+\|_\infty$, comme fonction test dans (P_n), avec $k=1$, on obtient

$$\int_{\{|u_n|>l+1\}}|g(x,u_n,\nabla u_n)|dx \le \int_{\{|u_n|>l\}}|f_n|dx. \tag{2.31}$$

Soit $\epsilon > 0$, alors par (2.31) il existe $l(\epsilon) > \max\{1, \|\psi^+\|_\infty\}$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>l(\epsilon)\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)|dx < \frac{\epsilon}{2},\ \forall n. \tag{2.32}$$

Pour toute partie mesurable $E \subset \Omega$, on a

$$\int_E |g(x, u_n, \nabla u_n)|dx \le \int_E b(l(\epsilon))(c(x) + |\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|^p)dx + \int_{\{|u_n|>l(\epsilon)\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)|dx$$

et en vue de (2.29), il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_E b(l(\epsilon))(c(x) + |\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|^p)dx < \frac{\epsilon}{2}, \forall E \text{ telle que } mes(E) < \eta(\epsilon). \tag{2.33}$$

Finalement, en combinant (2.32) et (2.33), il résulte donc

$$\int_E |g(x, u_n, \nabla u_n)|dx < \epsilon,\ \forall E \text{ telle que } mes(E) < \eta(\epsilon)$$

ce qui nous permet de passer à la limite dans (2.30), afin d'obtenir l'inéquation (P_ψ). ■

Remarque 2.3 - *Dans le cas où* $p \in]1, 2-\frac{1}{N}]$, *les solutions de* (P_ψ) *appartiennent seulement à* $T_0^{1,p}(\Omega)$ *où*

$$T_0^{1,p}(\Omega) = \{v : \Omega \to I\!R \textit{ mesurable },\ T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall k > 0\}.$$

Chapter 3

Etude des problèmes fortement non linéaires à données dans L^1 dans le cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev

Dans cette section, on étudie le problème de Dirichlet suivant:

$$Au + g(x, u, \nabla u) = f \text{ dans } \Omega,$$

où A est un opérateur de type Leray-Lions défini de $W_0^1 L_M(\Omega)$ dans son dual et g est une non-linéarité à croissance naturelle (i.e. $|g(x, s, \zeta)| \leq b(|s|)(c(x) + M(\frac{|\zeta|}{\mu}))$, voir [9, 10]) et f est dans $L^1(\Omega)$. Dans [10], A. Benkirane et A. Elmahi ont étudié le problème ci-dessus mais sous l'hypothèse de coercivité suivante:

$$|g(x, s, \zeta)| \geq \gamma M(\frac{|\zeta|}{\beta}) \text{ pour } |s| \geq \mu \tag{C}$$

où $\gamma, \beta > 0$ et $\mu \geq 0$. On se propose d'étudier le même problème mais sans supposer (C).

3.1 Existence des solutions pour un problème fortement non linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ vérifiant la propriété du segment.
Soit M une N-fonction satisfaisant la condition Δ_2 au voisinage de l'infini et soit P une N-fonction telle que $P \ll M$.
Soit $A(u) = -div(a(x, u, \nabla u))$ un opérateur aux dérivées partielles défini de $W_0^1 L_M(\Omega)$ dans $W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega)$ avec $a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour p.p. $x \in \Omega$ et tous $s \in I\!R, \zeta, \zeta' \in I\!R^N, (\zeta \neq \zeta')$:

$$|a(x, s, \zeta)| \leq h(x) + k_1 \overline{P}^{-1} M(k_2|s|) + k_3 \overline{M}^{-1} M(k_4|\zeta|) \tag{3.1}$$

$$(a(x, s, \zeta) - a(x, s, \zeta'))(\zeta - \zeta') > 0 \tag{3.2}$$

$$a(x,s,\zeta)\zeta \geq \alpha M(\frac{|\zeta|}{\lambda}) \tag{3.3}$$

où $\alpha, \lambda > 0,\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0,$ et $h \in E_{\overline{M}}(\Omega)$.
De plus, soit $g : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une fonction de Carathéodory vérifiant pour p.p. $x \in \Omega$ et tous $s \in I\!R, \zeta \in I\!R^N$:

$$g(x,s,\zeta)s \geq 0 \tag{3.4}$$

$$|g(x,s,\zeta)| \leq b(|s|)(c(x) + M(\frac{|\zeta|}{\mu})) \tag{3.5}$$

où $b : I\!R_+ \to I\!R$ est une fonction continue croissante et positive, $c(x)$ est une fonction positive donnée dans $L^1(\Omega),\ c(x) \geq 0$ et $\mu > 0$.
Finalement, on suppose que

$$f \in L^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Considérons le problème suivant, avec condition de Dirichlet:

$$A(u) + g(x,u,\nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \tag{3.7}$$

On définit par $T_0^{1,M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to I\!R$ telles que $T_k(u) \in W_0^1 L_M(\Omega)$, où $T_k(s) = \max(-k, \min(k,s)), \forall s \in I\!R, \forall k \geq 0$.
On démontre le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.1 *Supposons que (3.1)-(3.6) ont lieu. Alors, il existe au moins une solution de (3.7) dans le sens suivant:*

$$\begin{cases} u \in T_0^{1,M}(\Omega),\ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad\qquad \forall v \in W_0^1 L_M(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \forall k > 0. \end{cases} \tag{P}$$

Remarque 3.1 - *Notre résultat couvre le cas où $M(t) = (|t|+1)\log(1+|t|) - |t|$ qui satisfait la condition Δ_2 mais $\overline{M}(t) = e^{|t|} - |t| - 1 \notin \Delta_2$.*
- Si $M(t) = \frac{|t|^p}{p}$, on retrouve le résultat obtenu dans [53].

Remarque 3.2 - *Si u est solution de (P) telle que $a(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$, alors est aussi une solution de* (3.7) *au sens des distributions. C'est le cas par exemple, si on prend $a(x,s,\zeta) = a(x,s)|\zeta|^{p-2}\zeta\log^\beta(1+|\zeta|)$ avec $a(x,s)$ est une fonction de Carathéodory telle que:*

$$\alpha \leq a(x,s) \leq \gamma \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et tout } s \in I\!R$$

où $\alpha, \beta, \gamma > 0$. En effet, choisissons $0 < \epsilon < \frac{1}{\beta}(\frac{p-1}{N-1})$, il est facile de voir qu'il existe $C_\epsilon > 0$ tel que

$$\log^\beta(1+|\zeta|) \leq C_\epsilon |\zeta|^{\beta\epsilon}, \quad \textit{pour } |\zeta| \textit{ assez grand}$$

ainsi

$$\int_\Omega |a(x,u,\nabla u)|dx \leq \gamma C_\epsilon \int_\Omega |\nabla u|^{p-1+\beta\epsilon}dx + C.$$

En tenant compte du fait que $p-1+\beta\epsilon < \frac{N(p-1)}{N-1}$*, on déduit que* $a(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$.

Preuve du théorème 3.1:

Etape 1: Estimations a priori.

Considérons la suite des équations approchées:

$$\begin{cases} u_n \in W_0^1 L_M(\Omega),\ g(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega),\ g(x,u_n,\nabla u_n)u_n \in L^1(\Omega) \\ \langle A(u_n), v\rangle + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)v dx = \int_\Omega f_n v dx \\ \forall v \in W_0^1 L_M(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{3.8}$$

où f_n est une suite de fonctions dans $W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)$ qui converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$. Par application du théorème 3.1 de [9], il existe au moins une solution u_n de (3.8).

Utilisons $v = T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n)dx \quad &+ \quad \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n)dx \\ &= \quad \int_\Omega f_n T_k(u_n)dx\end{aligned}$$

et puisque $g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n) \geq 0$, on déduit que

$$\int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx \leq Ck.$$

Ce qui donne, grâce à (3.3),

$$\alpha \int_\Omega M(\frac{|\nabla T_k(u_n)|}{\lambda})dx \leq Ck. \tag{3.9}$$

D'autre part, d'après le lemme 1.2 du chapitre 1, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\int_\Omega M(T_k(u_n))dx \leq c_1 \int_\Omega M(c_2|\nabla T_k(u_n)|)dx. \tag{3.10}$$

Par la condition Δ_2, il existe encore deux réels positifs $c_1^{'}$ et $c_2^{'}$ tels que

$$M(c_2 t) \leq c_1^{'} + c_2^{'} M(\frac{t}{\lambda}) \text{ pour tout } t \geq 0$$

on déduit, par utilisation de (3.9) et (3.10), que

$$\int_\Omega M(T_k(u_n))dx \leq c_1^{'} + c_3^{'}k.$$

Ce qui implique

$$M(k)mes\{|u_n| > k\} \leq c_1^{'} + c_3^{'}k$$

d'où

$$mes\{|u_n| > k\} \leq \frac{c_1^{'} + c_3^{'}k}{M(k)}, \ \forall n \text{ et } \forall k > 0. \tag{3.11}$$

On a, pour tout $\delta > 0$

$$\begin{array}{rcl} mes\{|u_n - u_m| > \delta\} & \leq & mes\{|u_n| > k\} + mes\{|u_m| > k\} \\ & + & mes\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\} \end{array} \tag{3.12}$$

or $T_k(u_n)$ est bornée dans $W_0^1 L_M(\Omega)$, d'où l'existence de $v_k \in W_0^1 L_M(\Omega)$ telle que

$$T_k(u_n) \rightharpoonup v_k \text{ faiblement dans } W_0^1 L_M(\Omega) \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}), \text{ fortement dans } E_M(\Omega),$$

et p.p. dans Ω. Par conséquent, on peut supposer que $T_k(u_n)$ est une suite de cauchy en mesure.

Soit $\epsilon > 0$, alors, par (3.11) et (3.12), on déduit l'existence d'un certain $k(\epsilon) > 0$ tel que

$$mes\{|u_n - u_m| > \delta\} \leq \epsilon$$

pour tous $n, m \geq n_0(k(\epsilon), \delta)$. Ceci montre que (u_n) est une suite de Cauchy en mesure , d'où u_n converge presque partout vers une fonction mesurable u.

Finalement, via le lemme 1.1 du chapitre 1, on obtient

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ faiblement dans } W_0^1 L_M(\Omega) \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}), \text{ fortement dans } E_M(\Omega).$$

Soit Q une N-fonction telle que $M \ll Q$ et l'injection continue $W_0^1 L_M(\Omega) \subset E_Q(\Omega)$ a lieu.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $t_\epsilon > 0$ tel que:

$$M(k_2 t) \leq Q(\epsilon t), \ \forall t \geq t_\epsilon.$$

Puisque la N-fonction M satisfait la condition Δ_2 au voisinage de l'infini, il existe deux constantes $t_\epsilon^{'}, K_\epsilon > 0$ telles que:

$$M(k_4 t) \leq K_\epsilon M(\epsilon t), \ \forall t \geq t_\epsilon^{'}.$$

Donc

$$\overline{P}^{-1} M(k_2 t) \leq \overline{M}^{-1} Q(\epsilon t) + C_\epsilon^{'}, \forall t \geq 0 \text{ pour un certain } C_\epsilon^{'} > 0$$

$$\text{et } \overline{M}^{-1} M(k_4 t) \leq \overline{M}^{-1}[K_\epsilon M(\epsilon t)] + C_\epsilon^{"}, \forall t \geq 0 \text{ pour un certain } C_\epsilon^{"} > 0.$$

Par conséquent, il existe $C_\epsilon > 0$, tel que:

$$|a(x, s, \zeta)| \leq h(x) + C_\epsilon + k_1 \overline{M}^{-1} Q(\epsilon |s|) + k_3 \overline{M}^{-1}[K_\epsilon M(\epsilon |\zeta|)] \tag{3.13}$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $(s, \zeta) \in I\!R \times I\!R^N$.

De (3.9) et (3.13), on déduit que $(a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))_n$ est bornée dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$.

Etape 2: Convergence presque partout des gradients.

Fixons $r, k > 0$ et definissons $\Omega_r = \{x \in \Omega : |\nabla T_k(u(x))| \leq r\}$. Notons par χ_r la fonction caractéristique de Ω_r. Considérons, maintenant,

$$I_{n,r} = \int_{\Omega_r} \{[a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\}^{\theta} dx$$

où $0 < \theta < 1$.

Posons $A_n = [a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]$.

On écrit pour tout $\eta > 0$

$$I_{n,r} = \int_{\Omega_r \cap \{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} A_n^{\theta} dx + \int_{\Omega_r \cap \{|T_k(u_n) - T_k(u)| > \eta\}} A_n^{\theta} dx.$$

D'après (3.13), on déduit que A_n est bornée dans $L^1(\Omega)$ et par application de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$I_{n,r} \leq C_1 \{\int_{\Omega_r \cap \{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} A_n dx\}^{\theta} + C_2 mes\{x : |T_k(u_n) - T_k(u)| > \eta\}^{1-\theta}. \tag{3.14}$$

D'autre part, on a pour tout $s \geq r$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_r \cap \{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} A_n dx \\
&\leq \int_{\{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} [a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)] \times \\
&\qquad \times [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s)] dx \\
&\leq \int_{\{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s) dx \\
&+ \int_{\{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s) dx \\
&= \int_{\Omega} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) \nabla T_\eta(T_k(u_n) - T_k(u)) dx \\
&+ \int_{\Omega} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) \nabla T_k(u) \chi_{\Omega \setminus \Omega_s} \chi_{\{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} dx \\
&+ \int_{\{|T_k(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s) dx.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

L'utilisation de la fonction test $T_\eta(u_n - T_k(u))$ dans (3.8), donne :

$$\begin{aligned}
\langle A(u_n), T_\eta(u_n - T_k(u)) \rangle \quad &+ \quad \int_{\Omega} g(x, u_n, \nabla u_n) T_\eta(u_n - T_k(u) dx \\
&\leq \quad \int_{\Omega} f_n T_\eta(u_n - T_k(u) dx,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ce qui implique

$$\langle A(u_n), T_\eta(u_n - T_k(u)) \rangle \leq C\eta. \tag{3.17}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\langle A(u_n), T_\eta(u_n - T_k(u)) \rangle \quad &\geq \quad \int_{\Omega} a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) \nabla T_\eta(T_k(u_n) - T_k(u)) dx \\
&- \quad \int_{|u_n| > k} |a(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_{k+\eta}(u_n))| |\nabla T_k(u)| dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Notons par $\epsilon_i^\eta(n)$ $(i = 1, 2, ...)$ toute suite de nombres réels qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ avec η fixé.
Le troisième terme de l'inégalité (3.18) tend vers 0 puisque $a(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_{k+\eta}(u_n))$ est bornée dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$ tandis que $\chi_{\{|u_n|>k\}}|\nabla T_k(u)| \to 0$ fortement dans $(E_M(\Omega))^N$ et par conséquent, d'après (3.17) et (3.18), on a

$$\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_\eta(T_k(u_n) - T_k(u))dx \leq C\eta + \epsilon_1^\eta(n). \tag{3.19}$$

Puisque $a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\chi_{\{|T_k(u_n)-T_k(u)|\leq\eta\}}$ est bornée dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$ alors $a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\chi_{\{|T_k(u_n)-T_k(u)|\leq\eta\}}$ converge vers h faiblement dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$ pour $\sigma(\Pi L_{\overline{M}}, \Pi E_M)$, pour un certain $h \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^N$. On déduit que
$\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\backslash\Omega_s}\chi_{\{|T_k(u_n)-T_k(u)|\leq\eta\}}dx$ converge vers

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_s} h\nabla T_k(u)dx \text{ quand } n \to \infty.$$

Le dernier terme de (3.15) tend vers 0 puisque
$a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)\chi_{\{|T_k(u_n)-T_k(u)|\leq\eta\}}$ tend fortement vers $a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)\chi_s)$ dans $E_{\overline{M}}(\Omega)^N$ par le lemme 1.5, tandis que $\nabla T_k(u_n)$ tend faiblement vers $\nabla T_k(u)$ et

$$\int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)\chi_s)[\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s]dx = 0.$$

Finalement, en vertu de (3.15) et de (3.19), on aura

$$I_{n,r} \leq C_1(C\eta + \epsilon_2^\eta(n) + \int_\Omega h\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\backslash\Omega_s}dx)^\theta + C_2 mes\{x : |T_k(u_n) - T_k(u)| > \eta\}^{1-\theta}$$

ce qui donne en passant à la limite sup en n

$$\limsup_{n\to\infty} I_{n,r} \leq C(\eta + \int_\Omega h\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\backslash\Omega_s}dx)^\theta$$

et alors, en tendant $s \to +\infty$ et en choisissant η assez petit, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,r} = 0.$$

Comme r et k sont arbitraires, on peut construire une sous-suite telle que:

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.20}$$

Etape 3: Convergence forte de $M(\frac{|\nabla T_k(u_n)|}{\mu})$ dans $L^1(\Omega)$ (ou convergence modulaire de $\nabla T_k(u_n)$ dans $(L_M(\Omega))^N$).

Fixons, maintenant, $k > 0$, et soient $\gamma = (K\frac{b(k)}{2\alpha})^2$ et $\phi(s) = s\exp(\gamma s^2)$.
On a

$$\phi^{'}(s) - K\frac{b(k)}{\alpha}|\phi(s)| \geq \frac{1}{2},\ \forall s \in I\!R,\ \forall s \in I\!R, \tag{3.21}$$

où K est une constante qui apparaîtera par la suite.
Considérons la fonction $h_m, m > 0$ definie par:

$$h_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq m \\ -\frac{t}{m}sgn(t) + 2 & \text{si } m \leq |t| \leq 2m \\ 0 & \text{si } |t| > 2m. \end{cases}$$

Posons $v_{n,m} = h_m(u_n)\phi(z_n)$, avec $z_n = T_k(u_n) - T_k(u)$.
L'utilisation de $v_{n,m}$ comme fonction test dans (3.8), donne

$$\begin{aligned} \langle A(u_n), h_m(u_n)\phi(z_n)\rangle &+ \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \\ &= \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx, \end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h^{'}_m(u_n)\phi(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \leq \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dans ce qui suit, on désigne par $\epsilon^1_m(n), \epsilon^2_m(n), ...$ quelques suites de nombre réels qui convergent vers 0 lorsque n tend vers ∞ avec m fixée.
En tenant compte du fait que $g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n) \geq 0$ sur l'ensemble $\{x \in \Omega : |u_n(x)| > k\}$, on déduit de (3.22), que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h^{'}_m(u_n)\phi(z_n)dx \\ &\quad + \int_{\{|u_n| \leq k\}} g(x, u_n, \nabla u_n)h_m(u_n)\phi(z_n)dx \leq \int_\Omega f_n h_m(u_n)\phi(z_n)dx = \epsilon^1_m(n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le premier terme de cette inégalité peut être écrit comme suit:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ &\quad = \int_{\{|u_n| \leq k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx \\ &\quad - \int_{\{|u_n| > k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

A propos du troisième terme de (3.23), on a

$$\begin{aligned} &|\int_{\{|u_n| > k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx| \\ &\quad \leq C_k \int_\Omega |a(x, T_{2m}(u_n), \nabla T_{2m}(u_n))||\nabla T_k(u)|\chi_{\{|u_n| > k\}}dx \end{aligned}$$

où $C_k = \phi'(2k)$. Le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, la suite $(a(x, T_{2m}(u_n), \nabla T_{2m}(u_n)))_n$ est bornée dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$ tandis que $\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|>k\}}$ tend vers 0 fortement dans $(E_M(\Omega))^N$.
Le premier terme de (3.24) peut être écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\
&\quad = \int_\Omega [a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)]\times \\
&\qquad \times[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\
&\quad + \int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\
&\quad - \int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u_n)\phi'(z_n)dx.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Le troisième terme de (3.25) tend vers 0 puisque

$$a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)h_m(u_n)\phi'(z_n) \to a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)\chi_s)h_m(u)$$

fortement dans $(E_{\overline{M}}(\Omega))^N$ via le lemme 1.5 et

$$\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \text{ faiblement dans } (L_M(\Omega))^N \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}).$$

Le dernier terme de (3.25) tend vers $-\int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx$ quand $n \to \infty$ puisque

$$a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s) \rightharpoonup a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)\chi_s) \text{ faiblement dans } E_{\overline{M}}(\Omega)$$

pour $\sigma(\Pi E_{\overline{M}}, \Pi L_M)$. Par conséquent, on a, d'après (3.24),

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\
&\quad = \int_\Omega [a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)\chi_s)]\times \\
&\qquad \times[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)\phi'(z_n)dx \\
&\quad - \int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx \ + \epsilon_m^2(n).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

D'autre part,

$$|\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h'_m(u_n)\phi(z_n)dx| \leq \frac{2\phi(2k)}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n dx$$

et par utilisation de $T_m(u_n - T_m(u_n))$ comme fonction test dans (3.8), on obtient

$$|\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h'_m(u_n)\phi(z_n)dx| \leq 2\phi(2k)\int_{\{|u_n|\geq m\}} |f_n|dx. \tag{3.27}$$

Grâce à la condition Δ_2, il existe deux constantes positives K et K' telles que:

$$M(\frac{t}{\mu}) \leq KM(\frac{t}{\lambda}) + K', \ \forall t \geq 0. \tag{3.28}$$

Si on désigne par $J_{n,m}$ le troisième terme de (3.23), on a via (3.28)

$$
\begin{aligned}
|J_{n,m}| &\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} b(k)(c(x)+K'+KM(\frac{|\nabla u_n|}{\lambda}))h_m(u_n))|\phi(z_n)|dx \\
&\leq b(k)\int_{\Omega}(c(x)+K')|\phi(z_n)|dx \\
&+ K\frac{b(k)}{\alpha}\int_{\Omega} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\
&\leq \epsilon_m^3(n)+K\frac{b(k)}{\alpha}\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)]\times \\
&\qquad\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

En effet, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\
&= \int_{\Omega}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)]\times \\
&\quad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\
&+ \int_{\Omega} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\chi_s h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\
&+ \int_{\Omega} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Il est facile de voir que le troisième terme de cette égalité tend vers 0 quand $n\to\infty$, puisque $(a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))_n$ est bornée dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$, tandis que

$$\nabla T_k(u)\chi_s h_m(u_n)|\phi(z_n)| \to 0 \text{ fortement dans } (E_M(\Omega))^N$$

par le théorème de Lebesgue.
Le quatrième terme de (3.30) tend aussi vers 0 puisque

$$a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)|\phi(z_n)| \to 0 \text{ fortement dans } (E_{\overline{M}}(\Omega))^N \tag{3.31}$$

par le Lemme 1.5 tandis que

$$[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n) \text{ est bornée dans } (L_M(\Omega))^N. \tag{3.32}$$

En Combinant (3.23),(3.26),(3.27) et (3.29), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)]\times \\
&\qquad \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)(\phi'(z_n)-K\tfrac{b(k)}{\alpha}|\phi(z_n)|)dx \\
&\qquad \leq \epsilon_m^4(n)+\int_{\Omega} a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx \\
&\qquad +\phi(2k)\int_{\{|u_n|\geq m\}}|f_n|dx.
\end{aligned}
$$

ce qui implique, grâce à (3.21),

$$\begin{aligned}\int_\Omega &[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)]\times\\ &\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)dx\\ &\leq 2\epsilon_m^4(n)\\ &+2\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx\\ &+4\phi(2k)\int_{\{|u_n|\geq m\}}|f_n|dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx\leq\\ &\leq\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\chi_s dx\\ &+\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)dx\\ &+2\epsilon_m^4(n)\\ &+2\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx\\ &+4\phi(2k)\int_{\{|u_n|\geq m\}}|f_n|dx.\end{aligned}$$

En passant à la limite sup en n, on obtient

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx\leq\\ &\leq\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\chi_s h_m(u_n)dx\\ &\quad+\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s]h_m(u_n)dx\\ &+2\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx\\ &+4\phi(2k)\int_{\{|u|\geq m\}}|f|dx.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Le troisième terme de cette inégalité tend vers 0, puisque $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)\to a(x,T_k(u),\nabla T_k(u)\chi_s)$ fort tandis que $\nabla T_k(u_n)$ tend faiblement vers $\nabla T_k(u)$.
Le deuxième terme de l'inégalité (3.33) tend vers $\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_s h_m(u)dx$ puisque

$$a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))h_m(u_n)\rightharpoonup a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))h_m(u)\text{ faiblement dans }(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$$

pour $\sigma(\Pi L_{\overline{M}},\Pi E_M)$ tandis que $\nabla T_k(u)\chi_s\in E_M(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)h_m(u)dx\leq\\ &\leq\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_s h_m(u)dx\\ &+2\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s}h_m(u)dx\\ &+4\phi(2k)\int_{\{|u|\geq m\}}|f|dx,\end{aligned}$$

passons de nouveau à la limite sup en m, et utilisons le fait que $a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u) \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et $h_m(u) \to 1$ quand $m \to +\infty$, nous obtenons par application du théorème de Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx \leq \\
&\leq \int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_s dx \\
&+2\int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)\chi_{\Omega\setminus\Omega_s} dx.
\end{aligned}$$

Utilisons de nouveau le fait que $a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u) \in L^1(\Omega)$ et tendons $s \to \infty$, nous obtenons , puisque $mes(\Omega\setminus\Omega_s) \to 0$,

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx \leq \int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.$$

D'autre part, en utilisant le lemme de Fatou, on trouve

$$\int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx \leq \limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx$$

ce qui implique finalement

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx \\
&\qquad = \int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Prenons $(1 - h_m(u_n))T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle A(u_n), (1 - h_m(u_n))T_k(u_n)\rangle \\
&\quad + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)(1 - h_m(u_n))T_k(u_n))dx \\
&\qquad = \int_\Omega f_n(1 - h_m(u_n))T_k(u_n)dx
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, grâce à la condition du signe (3.4),

$$\langle A(u_n), (1 - h_m(u_n))T_k(u_n)\rangle \leq \int_\Omega f_n(1 - h_m(u_n))T_k(u_n)dx,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1 - h_m(u_n))dx \leq \\
&\leq \int_\Omega f_n(1 - h_m(u_n))T_k(u_n)dx + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h_m'(u_n)T_k(u_n)dx.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Puisque $\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n h_m'(u_n)T_k(u_n)dx \leq \frac{k}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n dx$ l'inégalité (3.35) devient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1 - h_m(u_n))dx \\
&\qquad \leq \int_\Omega f_n(1 - h_m(u_n))T_k(u_n)dx + \frac{k}{m}\int_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n dx
\end{aligned} \tag{3.36}$$

En passant à la limite sup en n, on aura

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))dx\\&\qquad\le\int_\Omega f(1-h_m(u))T_k(u)dx+\limsup_{n\to+\infty}\frac{k}{m}\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx\end{aligned}$$

et par passage à la limite en m, on obtient

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))dx\\&\qquad\le\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}k\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx.\end{aligned}\tag{3.37}$$

D'autre part, puisque

$$\frac{1}{m}\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx\le\int_{\{|u_n|\ge m\}}|f_n|dx,$$

on obtient facilement

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{m}\int_{\{m\le|u_n|\le 2m\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx=0.$$

Donc, d'après (3.37), on déduit que

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))dx=0.\tag{3.38}$$

Ecrivons, maintenant,

$$\begin{aligned}a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)&=a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)\\&+\ a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-h_m(u_n))\end{aligned}$$

ce qui donne, via (3.34) et (3.38),

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx\le\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx$$

ainsi

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx\le\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.\tag{3.39}$$

D'autre part, grâce au lemme de Fatou, on a

$$\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx\le\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx$$

par conséquent, via (3.39), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)dx=\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.\tag{3.40}$$

D'après (3.28), on a

$$M(\frac{|\nabla T_k(u_n)|}{\mu})\le K'+KM(\frac{|\nabla T_k(u_n)|}{\lambda})$$

et en tenant compte de (3.40), on obtient par le théorème de Vitali

$$M(\frac{|\nabla T_k(u_n)|}{\mu}) \to M(\frac{|\nabla T_k(u)|}{\mu}) \text{ dans } L^1(\Omega). \tag{3.41}$$

Etape 4: Passage à la limite.

Choisissons $T_k(u_n - v)$ comme fonction test dans (3.8), avec $v \in W_0^1 L_M(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla T_k(u_n - v) dx \\ &+ \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - v) dx \\ &\quad = \int_\Omega f_n T_k(u_n - v) dx \end{aligned} \tag{3.42}$$

Par le lemme de Fatou et le fait que

$a(x, T_{k+\|v\|_\infty}(u_n), \nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_n)) \rightharpoonup a(x, T_{k+\|v\|_\infty}(u), \nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u))$ faiblement dans $(L_{\overline{M}}(\Omega))^N$

pour $\sigma(\Pi L_{\overline{M}}, \Pi E_M)$, il résulte

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, T_{k+\|v\|_\infty}(u), \nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u)) \nabla T_k(u - v) dx \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega a(x, T_{k+\|v\|_\infty}(u_n), \nabla T_{k+\|v\|_\infty}(u_n)) \nabla T_k(u_n - v) dx \end{aligned} \tag{3.43}$$

Montrons, maintenant, que

$$g(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

En vertu du théorème de Vitali, il suffit de vérifier que $g(x, u_n, \nabla u_n)$ est équi-intégrable dans $L^1(\Omega)$.

D'une part, le choix de $T_1(u_n - T_l(u_n))$ comme fonction test dans (3.8), nous donne

$$\int_{\{|u_n|>l+1\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq \int_{\{|u_n|>l\}} |f_n| dx.$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $l(\epsilon) \geq 1$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>l(\epsilon)\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.44}$$

Soit E un sous-ensemble mesurable inclus dans Ω, on a

$$\int_E |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq \int_E b(l(\epsilon))(c(x) + M(\frac{|\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|}{\mu}) dx + \int_{\{|u_n|>l(\epsilon)\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx$$

en vertu de (3.41), il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_E b(l(\epsilon))(c(x) + M(\frac{|\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|}{\mu}) dx < \frac{\epsilon}{2}, \text{ pour tout } E \text{ tel que } mes(E) < \eta(\epsilon). \tag{3.45}$$

Finalement, en combinant (3.44) et (3.45), on obtient

$$\int_E |g(x, u_n, \nabla u_n)|dx < \epsilon, \ \forall E \text{ tel que } mes(E) < \eta(\epsilon)$$

ce qui achève la démonstration.

$\blacksquare$

Remarque 3.3 - *On obtient le même résultat si on remplace* (3.1) *par une condition de croissance plus générale de type:*

$$|a(x, s, \zeta)| \leq \overline{b}(s)(\overline{h}(x) + \overline{M}^{-1} M(k|\zeta|)) \tag{3.46}$$

où $k \geq 0$, $\overline{h}(x) \in E_{\overline{M}}(\Omega)$ *et* $\overline{b} : I\!R_+ \to I\!R$ *est une fonction croissante. En effet, on considère la suite approchée des équations:*

$$\begin{cases} -div(a(x, T_n(u_n), \nabla u_n)) + g(x, u_n, \nabla u_n) = f_n \ \ dans \ \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^1 L_M(\Omega), \ g(x, u_n, \nabla u_n) \in L^1(\Omega), \ g(x, u_n, \nabla u_n)u_n \in L^1(\Omega) \end{cases} \tag{Q_n}$$

et on raisonne comme précédemment.
Pour des résultats obtenus dans le cas L^p *et sous l'hypothèse* (3.46)*, on peut se référer à* [*50*] *et* [*52*].

On va maintenant étendre le résultat précédent aux problèmes unilatéraux.
Soit

$$K_\psi^M = \{v \in W_0^1 L_M(\Omega) : v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

où $\psi : \Omega \to \overline{I\!R}$ est une fonction mesurable sur Ω telle que

$$\psi^+ \in W_0^1 L_M(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{3.47}$$

Corollaire 3.1 *Supposons que* (3.1) – (3.6) *et* (3.47) *ont lieu. Alors, le problème unilatéral suivant:*

$$\begin{cases} u \in T_0^{1,M}(\Omega), u \geq \psi \ \ p.p. \\ \\ g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \nabla T_k(u - v)dx + \int_\Omega g(x, u, \nabla u) T_k(u - v)dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u - v)dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in K_\psi^M \cap L^\infty(\Omega), \ \forall k > 0. \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Preuve:

Considérons le problème approché suivant:

$$\begin{cases} u_n \in K_\psi^M, \\ \langle A(u_n), u_n - v\rangle + \displaystyle\int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)(u_n - v)dx \le \int_\Omega f_n(u_n - v)dx \\ \forall v \in K_\psi^M \end{cases}$$

où $g_n(x,u_n,\nabla u_n) = \frac{g(x,u_n,\nabla u_n)}{1+\frac{1}{n}|g(x,u_n,\nabla u_n)|}$ et (f_n) est une suite assez régulière convergeant vers f dans $L^1(\Omega)$.

L'existence de u_n est donnée par un résultat de [43].

En faisant un couplage entre les techniques utilisées ci-dessus et celles du deuxième chapitre, on peut achever facilement la démonstration de ce corollaire.

3.2 Existence des solutions pour un problème elliptique faisant intervenir un terme en forme divergentielle

Dans cette section, on donne un résultat d'existence des solutions pour le problème elliptique de Dirichlet suivant:

$$Au + g(x,u,\nabla u) - div(\phi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \tag{$\tilde{\mathcal{P}}$}$$

où $f \in L^1(\Omega)$, $\phi \in C(I\!R, I\!R^N)$, A et g sont définis comme précédemment.

Dans le cas L^p avec $g \equiv 0$ (voir [18]), on rappelle que pour $v \in W_0^{1,r}(\Omega), 1 < r < \frac{N(p-1)}{N-1}$, le terme $-div(\phi(v))$ peut ne pas avoir de sens puisque aucune croissance n'est supposée sur ϕ.

On montre le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Supposons que (3.1)-(3.6) ont lieu. Alors, il existe au moins une solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$ dans le sens suivant:*

$$\begin{cases} u \in T_0^{1,M}(\Omega),\ \ g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega \phi(u)\nabla T_k(u-v)dx \le \int_\Omega f T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in W_0^1L_M(\Omega)\cap L^\infty(\Omega),\ \ \forall k > 0. \end{cases}$$

Preuve: On considère le problème approché suivant:

$$\begin{cases} u_n \in W_0^1L_M(\Omega), \\ A(u_n) + g_n(x,u_n,\nabla u_n) - div(\phi(T_n(u_n))) = f_n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{3.48}$$

où $g_n(x,u_n,\nabla u_n) = \frac{g(x,u_n,\nabla u_n)}{1+\frac{1}{n}|g(x,u_n,\nabla u_n)|}$ et (f_n) est une suite de fonctions dans $W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)$ qui converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.

L'existence de u_n est donnée par un résultat de [43].

On donne brièvement la démonstration.

Etape 1: Estimations a priori.

On procède comme précédemment en prenant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.48) et utilisant le fait que $\int_\Omega div(v)dx = 0$ pour tout $v \in W_0^1 L_M(\Omega)$, on aura
$\int_\Omega \phi(T_n(u_n))\nabla T_k(u_n)dx = \int_\Omega div(\psi(u_n))dx = 0$, où $\psi(s) = \int_0^{T_k(s)} \phi(T_n(t))dt$.
Étape 2: Convergence presque partout des gradients.

La démonstration est presque similaire à la précédente. En effet, il suffit de vérifier que

$$I_n = \int_\Omega \phi(T_n(u_n))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))dx \to 0.$$

Pour $n > k + \eta$, on écrit $I_n = \int_\Omega \phi(T_{k+\eta}(u_n))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))dx$ qui converge vers I où $I = \int_\Omega \phi(T_{k+\eta}(u))\nabla T_\eta(u - T_k(u))dx = 0$ puisque

$$\phi(T_{k+\eta}(u_n)) \to \phi(T_{k+\eta}(u)) \text{ fortement dans } E_{\overline{M}}(\Omega)$$

tandis que

$$T_\eta(u_n - T_k(u)) \to T_\eta(u - T_k(u)) \text{ faiblement dans } W_0^1 L_M(\Omega) \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}).$$

Etape 3: Convergence forte des troncatures.

On reprend la démonstration de la section précédente. En prenant $h_m(u_n)\phi(z_n)$ comme fonction test dans (3.48), deux nouveaux termes apparaissent
$J_{n,m}^1 = \int_\Omega \phi(T_n(u_n))h_m^{'}(u_n)\nabla u_n \phi(z_n)dx$ et $J_{n,m}^2 = \int_\Omega \phi(T_n(u_n))\nabla z_n \phi^{'}(z_n)h_m(u_n)dx$.
on a

$$J_{n,m}^1 = \epsilon_m^5(n).$$

En effet, on a d'une part

$$h_m^{'}(u_n)\nabla u_n \text{ est bornée dans } (L_{\overline{M}}(\Omega))^N$$

tandis que

$$\phi(T_n(u_n))\phi(z_n)\chi_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}} \to 0 \text{ fortement dans } E_{\overline{M}},$$

puisque on a pour $n > 2m$

$$|\phi(T_n(u_n))\phi(z_n)\chi_{\{m\leq|u_n|\leq 2m\}}| \leq c_m|\phi(2k)|$$

où $c_m = \sup_{\{m\leq|s|\leq 2m\}} |\phi(s)|$. D'autre part $J_{n,m}^2 = \int_\Omega \phi(T_{2m}(u_n))\nabla z_n \phi^{'}(z_n)h_m(u_n)dx = \epsilon_m^6(n)$ puisque

$$\phi(T_{2m}(u_n))h_m(u_n) \to \phi(T_{2m}(u))h_m(u) \text{ fortement dans } E_{\overline{M}}(\Omega)$$

tandis que

$$z_n \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } W_0^1 L_M(\Omega) \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}).$$

Etape 4: Passage à la limite. Soit $v \in W_0^1 L_M(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En prenant $T_k(u_n - v)$ comme fonction dans (3.48), nous obtenons

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla T_k(u_n - v)dx + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - v)dx$$
$$+ \int_\Omega \phi(T_n(u_n)) \nabla T_k(u_n - v)dx$$
$$= \int_\Omega f_n T_k(u_n - v)dx$$

Il suffit donc de vérifier que $\int_\Omega \phi(T_n(u_n)) \nabla T_k(u_n - v)dx$ converge vers $\int_\Omega \phi(u) \nabla T_k(u - v)dx$. En effet, pour $n > k + \|v\|_\infty$ on peut écrire $\int_\Omega \phi(T_n(u_n)) \nabla T_k(u_n - v)dx = \int_\Omega \phi(T_{k+\|v\|_\infty}(u_n)) \nabla T_k(u_n - v)dx$ dans laquelle on passe facilement à la limite, puisque

$$\phi(T_{k+\|v\|_\infty}(u_n)) \to \phi(T_{k+\|v\|_\infty}(u)) \text{ fortement dans } E_{\overline{M}}(\Omega)$$

tandis que

$$T_k(u_n - v) \to T_k(u - v) \text{ faiblement dans } W_0^1 L_M(\Omega) \text{ pour } \sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\overline{M}}).$$

■

Part II

Sur la limite de quelques problèmes fortement non linéaires elliptiques et paraboliques

Chapter 4

Limite de quelques équations faisant intervenir les puissances croissantes

Dans ce chapitre, on utilise une méthode récente de pénalisation pour montrer l'existence des solutions de quelques inéquations variationnelles. On rapelle que cette technique a été introduite par L. Boccardo et F. Murat dans [26]: ils ont approché le problème variationnel:

$$\begin{cases} \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |v(x)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}, \end{cases}$$

où $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et A un opérateur de type Leray-Lions , par la suite des équations:

$$\begin{cases} Au_n + |u_n|^{n-1}u_n = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^n(\Omega). \end{cases}$$

Dans [36], A. Dall'aglio et L. Orsina ont généralisé ce resultat en considérant des puissances croissantes dépendant de certaine fonction de Carathéodory g satisfaisant la condition du signe et une hypothèse d'intégrabilité . C'est dans ce sens qu'on introduit la suite générale des problèmes:

$$\begin{cases} Au_n + |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), \ |g(x,u_n)|^n G(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

où G est une fonction de Carathéodory satisfaisant une condition de croissance.
On remarque que le terme puissance est multiplié par la fonction G qui dépend de x, u_n et ∇u_n. On s'intérèsse à l'étude de la limite de la suite u_n. On montre que cette limite est solution d'un problème bilatéral à obstacles dépendant de g et G.
On traîtera les deux cas: $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega)$.

4.1 Le cas variationnel

Soient Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 1$ et $1 < p < \infty$.
Soit A un opérateur de type Leray-Lions défini par $A(u) = -div(a(x, \nabla u))$ où
$a : \Omega \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour presque tout $x \in \Omega$ et tous $\zeta, \zeta' \in I\!R^N, (\zeta \neq \zeta')$:

$$|a(x,\zeta)| \leq \beta(h(x) + |\zeta|^{p-1}) \tag{4.1}$$

$$(a(x,\zeta) - a(x,\zeta^{'}))(\zeta - \zeta') > 0 \tag{4.2}$$

$$a(x,\zeta)\zeta \geq \alpha|\zeta|^p \tag{4.3}$$

avec $\alpha, \beta > 0$, et $h \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$.
De plus, soient $g : \Omega \times I\!R \to I\!R$ et $G : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ deux fonctions de Carathéodory satisfaisant pour presque tout $x \in \Omega$ et tous $s \in I\!R, \zeta \in I\!R^N$:

$$g(x,s)s \geq 0 \tag{4.4}$$

$$|g(x,s)| \leq b(|s|) \tag{4.5}$$

$$|G(x,s,\zeta)| \leq \bar{b}(|s|)(c(x) + |\zeta|^p) \tag{4.6}$$

où b et $\bar{b} : I\!R_+ \to I\!R_+$ deux fonctions continues croissantes, avec $b(0) = 0$, et $c(x) \in L^1(\Omega), c \geq 0$. on suppose, encore, que g et G vérifient les deux hypothèses suivantes:

$$\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : G(x,v,\nabla v) = 0 \text{ p.p.}\} \subset \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |g(x,v)| \leq 1 \text{ p.p.}\} \tag{4.7}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ pour presque tout } x \in \Omega\backslash\Omega_+^\infty \text{ il existe } \epsilon = \epsilon(x) > 0 \text{ tel que :} \\ g(x,s) > 1, \ \forall s \in]q_+(x), q_+(x) + \epsilon[\\ \text{ pour presque tout } \ x \in \Omega\backslash\Omega_-^\infty \ \text{ il existe } \epsilon = \epsilon(x) > 0 \text{ tel que } \ : \\ g(x,s) < -1, \ \forall s \in]q_-(x) - \epsilon, q_-(x)[. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

où

$$q_+(x) = \inf\{s > 0 : g(x,s) \geq 1\}$$

$$q_-(x) = \sup\{s < 0 : g(x,s) \leq -1\}$$

$$\Omega_+^\infty = \{x \in \Omega : q_+(x) = +\infty\}$$

$$\Omega_-^\infty = \{x \in \Omega : q_-(x) = -\infty\}.$$

Théorème 4.1 *Soit $f \in W^{-1,p^{'}}(\Omega)$. Supposons que $(4.1) - (4.8)$ ont lieu et que la fonction $s \to g(x,s)$ est croissante pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, le problème*

$$\left\{ \begin{array}{c} A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)| = f \ \ dans \ \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), |g(x,u_n)|^n G(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{P_n}$$

admet au moins une solution u_n telle que:

$$u_n \to u \textit{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4.9}$$

où u est l'unique solution du problème bilatéral suivant:

$$\begin{cases} \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \ \ p.p.\ \}. \end{cases} \tag{P}$$

Preuve:

Etape 1: Estimations a priori .

L'existence de u_n est donnée par le théorème 1.1 du chapitre 1. En choisissant $v = u_n$ comme fonction test dans (P_n), et utilisant la condition de signe (2.4), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq \|f\|_{-1,p'} \|u_n\|_{1,p}$$

ce qui implique

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C, \quad \text{pour tout } n. \tag{4.10}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|u_n dx \leq C$$

ce qui entraîne

$$\int_{\{|u_n|>k\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq C, \quad \text{pour tout } n$$

où $k > 0$. La continuité de b et le fait que $b(0) = 0$ impliquent l'existence d'un certain $\delta > 0$ tel que

$$b(|s|) \leq 1 \text{ pour tout } |s| \leq \delta$$

ce qui donne, en utilisant (4.5) et (4.10),

$$\int_{\{|u_n|\leq\delta\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq \int_{\{|u_n|\leq\delta\}} \bar{b}(\delta)(c(x) + |\nabla u_n|^p) dx \leq C.$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq C, \text{ pour tout } n. \tag{4.11}$$

Etape 2: Convergence presque partout des gradients.

D'après (4.10) il existe une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que (pour une sous-suite de u_n)

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \text{ fortement dans } L^p(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \tag{4.12}$$

De plus, on a $Au_n = f - |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|$ avec $|g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ donc, en utilisant un résultat de [25], on obtient

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ fortement dans } L^q(\Omega),\ \forall\ 1 \le q < p,$$

ce qui implique (pour une sous-suite)

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{4.13}$$

Etape 3: $u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \le v \le q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

Puisque $s \to g(x,s)$ est croissante donc en vertu de (4.8), on a (voir [36])

$$\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |g(x,v)| \le 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \le v \le q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

il suffit donc de vérifier que $|g(x,u)| \le 1$ p.p. D'après (4.11), on a immédiatement

$$\int_{\{|g(x,u_n)|>k\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)|dx \le C$$

et

$$\int_{\{|g(x,u_n)|>k\}} |G(x,u_n,\nabla u_n)|dx \le \frac{C}{k^n}$$

où $k > 1$. En tendant $n \to +\infty$ pour k fixé, on déduit par le lemme de Fatou

$$\int_{\{|g(x,u)|>k\}} |G(x,u,\nabla u)|dx = 0$$

ainsi, par (4.7)

$$|g(x,u)| \le 1 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Etape 4: Convergence forte des troncatures.

Soit $\phi(s) = s\exp(\gamma s^2)$ où γ est choisi tel que $\gamma \ge \left(\frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\right)^2$, de telle façon qu'on a $\phi'(s) - \frac{2\bar{b}(k)}{\alpha}|\phi(s)| \ge \frac{1}{2}, \forall s \in I\!R$.
Le choix de la fonction test $v_n = \phi(z_n)$ dans (P_n) où $z_n = T_k(u_n) - T_k(u)$ donne

$$\langle Au_n, \phi(z_n)\rangle + \int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|\phi(z_n)dx = \langle f, \phi(z_n)\rangle$$

ce qui implique en tenant compte du fait que $g(x,u_n)\phi(z_n) \ge 0$ sur $\{x \in \Omega : |u_n| > k\}$,

$$\begin{aligned}\langle Au_n, \phi(z_n)\rangle \quad &+ \quad \int_{\{0\le u_n \le T_k(u)\}\cap\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|\phi(z_n)dx \\ &+ \quad \int_{\{T_k(u)\le u_n \le 0\}\cap\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|\phi(z_n)dx \\ &\le \langle f, \phi(z_n)\rangle.\end{aligned}$$

Le second et le troisième termes de cette inégalité seront notés respectivement par $I^1_{n,k}$ et $I^2_{n,k}$. On désignera $\epsilon_i(n)(i=1,i=2,...)$ toute suite de nombres réels qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
|I^1_{n,k}| &\leq \int_{\{0\leq u_n \leq T_k(u)\}\cap\{|u_n|\leq k\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)||\phi(z_n)|dx \\
&\leq \int_{\{0\leq u_n \leq u\}\cap\{|u_n|\leq k\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)||\phi(z_n)|dx
\end{aligned}$$

or $|g(x,u_n)| \leq 1$ sur la partie $\{x \in \Omega : 0 \leq u_n \leq u\}$ d'où

$$\begin{aligned}
|I^1_{n,k}| &\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} |G(x,u_n,\nabla u_n)||\phi(z_n)|dx \\
&\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)(c(x)+|\nabla u_n|^p)|\phi(z_n)|dx \\
&\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)|\phi(z_n)|dx + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\phi(z_n)|dx.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Lebesgue, on a

$$\int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)|\phi(z_n)|dx \to 0$$

ce qui entraîne

$$|I^1_{n,k}| \leq \epsilon_1(n) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\phi(z_n)|dx \tag{4.14}$$

et d'une façon similaire, on aboutit à

$$\begin{aligned}
|I^2_{n,k}| &\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} |G(x,u_n,\nabla u_n)||\phi(z_n)|dx \\
&\leq \int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)|\phi(z_n)|dx + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\phi(z_n)|dx \qquad (4.15)\\
&\leq \epsilon_1(n) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)|\phi(z_n)|dx.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle Au_n, \phi(z_n)\rangle &= \int_\Omega a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi'(z_n)dx \\
&= \int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi'(z_n)dx \\
&+ \int_{\{|u_n|> k\}} a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi'(z_n)dx \\
&= \int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi'(z_n)dx \\
&- \int_{\{|u_n|> k\}} a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u)\phi'(z_n)dx.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre de cette égalité tend vers 0 quand $n \to +\infty$ puisque $(a(x,\nabla u_n)\phi'(z_n))_n$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ tandis que $\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|>k\}} \to 0$ fortement

dans $(L^p(\Omega))^N$ via le théorème de Lebesgue.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\langle Au_n, \phi(z_n)\rangle &= \int_{\{|u_n|\leq k\}} a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi^{'}(z_n)dx + \epsilon_2(n)\\ &= \int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]\phi^{'}(z_n)dx + \epsilon_3(n)\end{aligned}$$

grâce à (4.14) et (4.15), on en déduit

$$\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)](\phi^{'}(z_n) - \frac{2\bar{b}(k)}{\alpha}|\phi(z_n)|)dx \leq \epsilon_4(n)$$

ou encore

$$\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]dx \leq 2\epsilon_4(n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

et par le lemme 5 de [30], on aura finalement

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Etape 5: u est solution du problème variationnel (P).

Choisissons $w = T_k(u_n - \theta T_m(v))$ comme fonction test dans (P_n) avec $v \in K$ et $0 < \theta < 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\langle Au_n, T_k(u_n - \theta T_m(v))\rangle + \int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_k(u_n - \theta T_m(v))dx\\ = \langle f, T_k(u_n - \theta T_m(v))\rangle\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $g(x,u_n)T_k(u_n - \theta T_m(v)) \geq 0$ sur l'ensemble

$$\{x \in \Omega : u_n \geq 0 \text{ et } u_n \geq \theta T_m(v)\} \cup \{x \in \Omega : u_n \leq 0 \text{ et } u_n \leq \theta T_m(v)\}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_k(u_n - \theta T_m(v))dx\\ \geq &\int_{\{0\leq u_n\leq\theta T_m(v)\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_k(u_n - \theta T_m(v))dx\\ + &\int_{\{\theta T_m(v)\leq u_n\leq 0\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_k(u_n - \theta T_m(v))dx.\end{aligned}$$

Le premier et le deuxième termes du second membre de cette inégalité seront notés respectivement par $J^1_{n,m}$ et $J^2_{n,m}$.
Définissons

$$\delta_{1,m}(x) = \sup_{0\leq s\leq\theta T_m(v)} g(x,s)$$

on a $0 \leq \delta_{1,m}(x) < 1$ p.p. et

$$|J^1_{n,m}| \quad \leq \quad k \int_{\{0 \leq u_n \leq \theta T_m(v)\}} (\delta_{1,m}(x))^n |G(x, u_n, \nabla u_n)| dx.$$

or

$$|(\delta_{1,m}(x))^n |G(x, u_n, \nabla u_n)| \chi_{\{|u_n| \leq m\}}| \leq \bar{b}(m)(c(x) + |\nabla T_m(u_n)|^p)$$

et puisque $\bar{b}(m)(c(x)+|\nabla T_m(u_n)|^p)$ est une suite fortement compacte dans $L^1(\Omega)$, on a donc par le théorème de Lebesgue

$$J^1_{n,m} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

D'une façon similaire, on a la domination suivante

$$|J^2_{n,m}| \leq k \int_{\{|u_n| \leq m\}} |\delta_{2,m}(x)|^n |G(x, u_n, \nabla u_n)| dx \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

où

$$\delta_{2,m}(x) = \inf_{\theta T_m(v) \leq s \leq 0} g(x, s).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle Au_n, T_k(u_n - \theta T_m(v))\rangle &= \int_\Omega a(x, \nabla u_n)[\nabla u_n - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u_n - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx \\ &= \int_\Omega [a(x, \nabla u_n) - a(x, \theta \nabla T_m(v))][\nabla u_n - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\|u_n - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx \\ &+ \int_\Omega a(x, \theta \nabla T_m(v))[\nabla u_n - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u_n - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx.\end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité précédente tend vers $\int_\Omega a(x, \theta \nabla T_m(v))[\nabla u - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx$ quand $n \to +\infty$ puisque $a(x, \theta \nabla T_m(v)$ appartient à $(L^{p'}(\Omega))^N$ tandis que $[\nabla u_n - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u_n - \theta T_m(v)| \leq k\}}$ tend vers $[\nabla u - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u - \theta T_m(v)| \leq k\}}$ faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$.

En utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}&\liminf_{n \to +\infty} \langle Au_n, T_k(u_n - \theta T_m(v))\rangle \geq \\ &\qquad \geq \int_\Omega [a(x, \nabla u) - a(x, \theta \nabla T_m(v))][\nabla u - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx \\ &\qquad + \int_\Omega a(x, \theta \nabla T_m(v))[\nabla u - \theta \nabla T_m(v)] \chi_{\{|u - \theta T_m(v)| \leq k\}} dx \\ &\qquad = \langle Au, T_k(u - \theta T_m(v))\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\langle Au, T_k(u - \theta T_m(v))\rangle \leq \langle f, T_k(u - \theta T_m(v))\rangle$$

ce qui implique en tendant $k \to +\infty$, et en tenant compte du fait que $T_k(u - \theta T_m(v)) \to u - \theta T_m(v)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\langle Au, u - \theta T_m(v)\rangle \leq \langle f, u - \theta T_m(v)\rangle$$

En tendant $\theta \to 1$ et $m \to +\infty$, on obtient finalement

$$\langle Au, u - v\rangle \leq \langle f, u - v\rangle.$$

Etape 6 $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

En Prenant $v_n = T_k(u_n - T_h(u_n))$ comme fonction test dans (P_n) et en utilisant le fait que $g(x, u_n)v_n \geq 0$, on obtient

$$\langle Au_n, T_k(u_n - T_h(u_n))\rangle \leq \langle f, T_k(u_n - T_h(u_n))\rangle$$

ce qui donne lorsque $k \to +\infty$ et n, h fixés,

$$\langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle \leq \langle f, u_n - T_h(u_n)\rangle$$

et par passage à la limite sup en n

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle \leq \langle f, u - T_h(u)\rangle.$$

Ainsi,

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle \leq 0.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle &= \int_{\{|u_n|>h\}} a(x, \nabla u_n)\nabla u_n dx \\
&\geq \alpha \int_{\{|u_n|>h\}} |\nabla u_n|^p dx \\
&= \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u_n - T_h(u_n))|^p dx
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$u_n - T_h(u_n) \to 0 \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

En écrivant

$$\|u_n - u\|_{1,p} \leq \|u_n - T_h(u_n))\|_{1,p} + \|T_h(u_n) - T_h(u)\|_{1,p} + \|u - T_h(u)\|_{1,p},$$

avec $\|.\|_{1,p}$ désigne la norme de $W_0^{1,p}(\Omega)$,
Il découle donc de la convergence forte des troncatures, que

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 4.1 - *La monotonie de g peut être supprimée si elle ne dépend pas de x et sous les mêmes hypothèses (4.1)-(4.8), le problème (P_n) admet au moins une solution u_n telle que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, où u est l'unique solution du problème bilatéral:*

$$\begin{cases} \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \ p.p. \ \}. \end{cases}$$

En effet, puisque g ne dépend pas de x, on a

$$\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |g(v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

(voir [36]).

Remarque 4.2 - *Notons que l'hypothèse* (4.7) *est vérifiée pour* $G(x,s,\zeta) = \frac{s}{(s+1)^2}(|\zeta|^p + h(x))$ *avec* $h \geq 0$ *p.p., mais non pas pour* $G(x,s,\zeta) = |g(x,s)| - 2$.

Remarque 4.3 *Le choix de* $G(x,s,\zeta) = g(x,s)$ *dans* (P_n) *fournit une suite de problèmes de la forme*

$$\begin{cases} A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) = f \ \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), |g(x,u_n)|^n \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

et c'est le même type étudié par A. Dall'aglio et L. Orsina dans [36].

4.2 Le cas L^1

Dans cette section, on étudie la limite de la suite des probèmes:

$$\begin{cases} A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |G(x,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), |g(x,u_n)|^n G(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \end{cases} \qquad (Q_n)$$

où G est comme précédemment, vérifiant de plus la condition:

$$|G(x,s,\zeta)| \geq \beta |\zeta|^p, \forall s \in I\!R : |s| \geq \gamma, \ \forall \zeta \in I\!R^N \text{ et presque tout } x \in \Omega, \qquad (4.16)$$

avec $\beta > 0, \gamma \geq 0$.
En outre, on suppose que q_- et q_+ sont des fonctions bornées.

Théorème 4.2 *Soit* $f \in L^1(\Omega)$. *Supposons que les hypothèses du précédent théorème ont lieu,* q_- *et* q_+ *sont dans* $L^\infty(\Omega)$ *et que la condition (4.16) est vérifiée. Alors, le problème* (Q_n) *admet au moins une solution* u_n *telle que:*

$$u_n \to u \textit{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega),$$

où u *est l'unique solution du problème bilatéral:*

$$\begin{cases} \langle Au, v-u \rangle \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \ p.p. \ \} \end{cases} \qquad (Q)$$

Preuve:

Les étapes de cette démonstration sont similaires à celles du précédent théorème.

L'existence de u_n est donnée par le théorème 1.2 du chapitre 1. En effet, il est facile de voir que $|g(x,s)| \geq 1$ sur $\{|s| \geq \bar{\gamma}\}$ où $\bar{\gamma} = max\{supessq_+, -infessq_-\}$ et par suite

$$|g(x,s)|^n |G(x,s,\zeta)| \geq \beta |\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq max\{\gamma, \bar{\gamma}\}.$$

Etape 1: Estimations a priori.

En Choisissant $v = T_h(u_n)$ comme fonction test dans (Q_n), avec $h = max\{\gamma, \bar{\gamma}\}$ et utilisant la condition du signe (4.4), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_h(u_n)|^p dx \leq h \|f\|_1 \tag{4.17}$$

et

$$\int_{\{|u_n| \geq h\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq \|f\|_1.$$

Ce qui implique

$$\int_{\{|u_n| \geq h\}} |\nabla u_n|^p dx \leq C$$

et finalement

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C. \tag{4.18}$$

D'autre part, comme dans la section précédente, on a

$$\int_\Omega |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq C. \tag{4.19}$$

Etape 2: Convergence presque partout des gradients.

D'après (4.18) il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que (au moins pour une sous-suite)

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ecrivons l'équation $Au_n = f - |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |G(x,u_n,\nabla u_n)|$ et remarquons, via (4.19), que son second membre est uniformément borné dans $L^1(\Omega)$. Donc, comme dans la section précédente, on a

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Etape 3: $u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

Il est facile de voir qu'il découle de (4.19).

Etape 4: Convergence des troncatures.

la preuve est similaire au cas variationnel.

étape 5: u est solution du problème bilatéral (Q).

Soient $v \in K$ et $0 < \theta < 1$. Prenons $v_n = T_k(u_n - \theta v), k > 0$ comme fonction test dans (Q_n), et on achève la preuve de cette étape comme précédemment, en remplaçant $T_m(v)$ par v. On remarquera que $K \subset L^\infty(\Omega)$.

Etape 6: $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On montrera que $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $(L^p(\Omega))^N$ en utilisant le lemme de Vitali.
Pour des raisons de simplicité, on suppose que $\beta = 1$.
Soit E une partie mesurable dans Ω, on a pour tout $k > 0$

$$\int_E |\nabla u_n|^p dx \leq \int_{E\cap\{|u_n|\leq k\}} |\nabla u_n|^p dx + \int_{E\cap\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p dx.$$

Soit $\epsilon > 0$. En vertu de la convergence forte des troncatures, il existe un certain $\eta(\epsilon, k)$ tel que pour tout E mesurable

$$mes(E) < \eta(\epsilon, k) \Rightarrow \int_{E\cap\{|u_n|\leq k\}} |\nabla u_n|^p dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n. \tag{4.20}$$

En prenant $T_1(u_n - T_k(u_n))$, avec $k > 0$, comme fonction test dans (Q_n), on obtient:

$$\langle Au_n, T_1(u_n - T_k(u_n))\rangle + \int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)| T_1(u_n - T_k(u_n))dx$$

$$= \int_\Omega f T_1(u_n - T_k(u_n))dx$$

ce qui implique

$$\int_{\{|u_n|>k+1\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)|dx \leq \int_{\{|u_n|>k\}} |f|dx,$$

et puisque $mes\{x \in \Omega : |u_n(x)| > k\} \to 0$ uniformément en n quand $k \to \infty$, il existera $k = k(\epsilon)$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>k\}} |f|dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n$$

ce qui entraîne

$$\int_{\{|u_n|>k+1\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)|dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n.$$

En posant $h(\epsilon) = max\{k+1, \gamma, \bar{\gamma}\}$, on constate que

$$\int_{\{|u_n|>h(\epsilon)\}} |\nabla u_n|^p dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n. \tag{4.21}$$

En combinant (4.20) et (4.21), on déduit l'existence d'un $\eta > 0$ tel que

$$\int_E |\nabla u_n|^p dx \leq \epsilon, \quad \forall n \text{ si } mes(E) < \eta, \ E \text{ mesurable}$$

ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(|\nabla u_n|^p)_n$ dans $L^1(\Omega)$.

Remarques 4.4 *-La condition $b(0) = 0$ n'est pas nécessaire. En effet, le choix de $\theta_h(u_n), h > 0$, comme fonction test dans (Q_n), avec*

$$\theta_h(s) = \begin{cases} hs \quad si \quad |s| \leq \frac{1}{h} \\ sign(s) \quad si \quad |s| \geq \frac{1}{h}, \end{cases}$$

donne

$$\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |G(x,u_n,\nabla u_n)| \theta_h(u_n) dx \leq \int_\Omega f \theta_h(u_n) dx$$

ainsi par le lemme de Fatou, $h \to +\infty$, on trouve

$$\int_\Omega |g(x,u_n)|^n |G(x,u_n,\nabla u_n)| dx \leq C.$$

-On peut aussi étudier des problèmes de la forme:

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,r}(\Omega), \ 1 < r < \frac{N(p-1)}{N-1} \\ |g(x,u_n)|^n \bar{G}(x,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega) \\ T_k(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0 \\ \langle A(u_n), T_k(u_n - v) \rangle + \int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |\bar{G}(x,u_n,\nabla u_n)| T_k(u_n - v) dx \\ \leq \int_\Omega f T_k(u_n - v) dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases} \qquad (R_n)$$

où $\bar{G} : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ est une fonction de Carathéodory telle que:

$$|\bar{G}(x,s,\zeta)| \leq \bar{b}(|s|)(c(x) + |\zeta|^q)$$

et

$$\{v \in W_0^{1,r_0}(\Omega) : \bar{G}(x,v,\nabla v) = 0 \ p.p. \ \} \subset \{v \in W_0^{1,r_0}(\Omega) : |g(x,v)| \leq 1 \ p.p. \ \}$$

avec $2 - \frac{1}{N} < p < N, 1 \leq q < p, 1 < r_0 < \frac{N(p-1)}{N-1}$ et $\bar{b}, c$ sont comme précédemment.

En effet, on peut montrer par les mêmes étapes, que ce problème admet au moins une solution u_n telle que

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W_0^{1,r}(\Omega), \forall r < \frac{N(p-1)}{N-1}$$

où u est l'unique solution du problème bilatéral:

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,r}(\Omega), \ 1 < r < \frac{N(p-1)}{N-1} \\ q_- \leq u \leq q_+ \ \text{ p.p. dans } \Omega. \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \forall k > 0 \\ \langle Au, T_k(v-u) \rangle \geq \int_\Omega f T_k(v-u) dx, \ \forall v \in K \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \qquad (R)$$

Concernant la preuve de l'unicité, on adapte la technique utilisée dans [17] ou [28].

Remarques 4.5 - *Notons que si q_- et q_+ sont bornées alors l'unique solution de (R) appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, tandis que les solutions u_n appartiennent seulement à $W_0^{1,r}(\Omega), \forall r < \frac{N(p-1)}{N-1}$.*
- Si on prend $\bar{G}(x,s,\zeta) = g(x,s)$ dans (R_n), on retrouve la suite des problèmes étudiée dans [36].

4.3 Exemples d'application.

4.3.1 Exemple 1: Problème à obstacles changeant de signes.

Soient ϕ et ψ deux fonctions mesurables. On fixe $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et on suppose qu'il existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que: $\phi + \delta \le w \le \psi - \delta,\ \delta > 0$.
On pose $g(x,s) = \frac{s^+}{\psi - w} + \frac{s^-}{\phi - w}$. On montre que le problème:

$$\left\{ \begin{array}{c} A(u_n) + |g(x,u_n - w)|^{n-1} g(x, u_n - w)|\nabla(u_n - w)|^p = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), |g(x,u_n - w)|^n |\nabla(u_n - w)|^p \in L^1(\Omega) \end{array} \right. \qquad (E_n^1)$$

admet au moins une solution u_n telle que:

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

où u est l'unique solution du problème à obstacles suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle Au, v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle,\ \forall v \in K \\ u \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \phi \le v \le \psi \text{ p.p. } \}. \end{array} \right. \qquad (E^1)$$

Preuve:

Etape 1: Estimations a priori.

En prenant $u_n - w$ comme fonction test dans (E_n^1) on obtient

$$\langle Au_n, u_n - w\rangle \le \langle f, u_n - w\rangle$$

et par l'inégalité de Young, on trouve

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le C.\ \forall n$$

d'où

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

pour un certain $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x,u_n-w)|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx &\leq \int_{\{|u_n-w|\leq\delta\}} |\frac{u_n-w}{\delta}|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx \\
&+ \int_{\{|u_n-w|\geq\delta\}} |g(x,u_n-w)|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx \\
&\leq \int_{\{|u_n-w|\leq\delta\}} |\nabla(u_n-w)|^p dx \\
&+ \int_{\{|u_n-w|\geq\delta\}} |g(x,u_n-w)|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx.
\end{aligned}$$

L'utilisation de $T_\delta(u_n-w)$ comme fonction test dans (E_n^1), donne

$$\int_{|u_n-w|\geq\delta} |g(x,u_n-w)|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx \leq C$$

et par suite

$$\int_\Omega |g(x,u_n-w)|^n |\nabla(u_n-w)|^p dx \leq C. \tag{4.22}$$

Etape 2: Convergence presque partout des gradients.

En écrivant $Au_n = f - |g(x,u_n-w)|^{n-1} g(x,u_n-w)|\nabla(u_n-w)|^p$, on déduit immédiatement d'après (4.22)

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Etape 3: $u \in K$.

Il découle directement de la convergence des gradients et de l'estimation (4.22).

Etape 4: Convergence forte des troncatures.

On montre comme précédemment que

$$\forall k \geq \|w\|_\infty : T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Etape 5: u est solution de (E).

Prenons $T_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)$ comme fonction test dans (E_n^1) on obtient

$$\langle Au_n, T_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)\rangle + \int_\Omega |g(x,u_n-w)|^{n-1} g(x,u_n-w)|\nabla(u_n-w)|^p T_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)dx$$
$$\leq \langle f, T_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)\rangle.$$

D'autre part, on remarque que

$$\int_\Omega |g(x,u_n-w)|^{n-1} g(x,u_n-w)|\nabla(u_n-w)|^p T_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)dx \geq H_n^1 + H_n^2$$

où

$$H_n^1=\int_{\{0\le u_n-w\le\theta(v-w)\}}|g(x,u_n-w)|^{n-1}g(x,u_n-w)|\nabla(u_n-w)|^pT_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)dx$$

et

$$H_n^2=\int_{\{\theta(v-w)\le u_n-w\le 0\}}|g(x,u_n-w)|^{n-1}g(x,u_n-w)|\nabla(u_n-w)|^pT_k(u_n-\theta v+(\theta-1)w)dx.$$

et on achève la preuve comme précédemment.

Remarque 4.6 - *Si les obstacles ϕ et ψ sont bornés alors on peut adapter l'exemple précédent au cas où $f\in L^1(\Omega)$. En effet, il est facile de vérifier que*

$$|g(x,s-w)|^n|\zeta-\nabla w|^p\ge\frac{1}{2^p}|\zeta|^p-|\nabla w|^p$$

pour $|s|\ge\|w\|_\infty+1+\sup\{\|\psi-w\|_\infty,\|\phi-w\|_\infty\}$.

4.3.2 Exemple 2: Problème à obstacles tels que leur somme appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Soient ϕ et ψ deux fonctions mesurables telles que $m=\frac{\phi+\psi}{2}\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ et $d=\frac{\psi-\phi}{2}\ge\delta$ avec $\delta>0$.
Soit $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$ et considérons le problème:

$$\begin{cases} A(u_n)+|\frac{u_n-m}{d}|^{n-1}(\frac{u_n-m}{d})|\nabla(u_n-m)|^p=f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\\ u_n\in W_0^{1,p}(\Omega),|\frac{u_n-m}{d}|^n|\nabla(u_n-m)|^p\in L^1(\Omega)\end{cases}\qquad (E_n^2)$$

Alors, on montre comme dans le précédent exemple qu'il existe au moins une solution u_n du problème (E_n^2) telle que

$$u_n\to u \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

où u est l'unique solution du problème:

$$\begin{cases}\langle Au,u-v\rangle\le\langle f,u-v\rangle,\forall v\in K,\\ u\in K=\{v\in W_0^{1,p}(\Omega):\phi\le v\le\psi \text{ p.p. }\}.\end{cases}\qquad (E^2)$$

Preuve: Pour montrer que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il suffit de prendre u_n-m comme fonction test dans (E_n^2). D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\frac{u_n-m}{d}|^n|\nabla(u_n-m)|^pdx &\le \int_{\{|u_n-m|\le d\}}|\frac{u_n-m}{d}|^n|\nabla(u_n-m)|^pdx\\ &+\int_{\{|u_n-m|\ge d\}}|\frac{u_n-m}{d}|^n|\nabla(u_n-m)|^pdx\\ &\le\int_{\{|u_n-m|\le d\}}|\nabla(u_n-m)|^pdx\\ &+\int_{\{|u_n-m|\ge\delta\}}|\frac{u_n-m}{d}|^n|\nabla(u_n-m)|^pdx.\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega |\frac{u_n - m}{d}|^n |\nabla(u_n - m)|^p dx \leq C.$$

on achève la preuve via les mêmes étapes de l'exemple précédent.

Remarque 4.7 *-On peut étudier aussi le cas L^1 si ψ et ϕ sont des fonctions bornées. En effet, on vérifie aisément que*

$$|\frac{s-m}{d}|^n |\zeta - \nabla m|^p \geq \frac{1}{2^p}|\zeta|^p - |\nabla m|^p \textit{ pour } |s| \geq \|m\|_\infty + \|d\|_\infty.$$

Chapter 5

Limite de quelques problèmes entropiques

Dans ce chapitre, on va étendre notre étude au cas non variationnel. Rappelons d'abord, quelques résultats utilisant cette méthode. Dans [36], A. Dall'aglio et L. Orsina ont étudié la suite des problèmes:

$$\begin{cases} u_n \in T_0^{1,p}(\Omega),\ |g(u_n)|^n \in L^1(\Omega) \\ \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla T_k(u-v)dx + \int_\Omega |g(u_n)|^{n-1} g(u_n) T_k(u-v)dx \\ \leq \int_\Omega f T_k(u-v)dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

où $f \in L^1(\Omega)$, $1 < p < N$, Ω est un ouvert borné de $I\!R^N$,

$$T_0^{1,p}(\Omega) = \{\phi : \Omega \to I\!R \text{ mesurable } : T_k(\phi) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0\}$$

et g est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition du signe classique et une hypothèse d'intégrabilité.

Dans le chapitre précédent, on a étudié le comportement la limite de la suite u_n solution du problème suivant:

$$\begin{cases} Au_n + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \Omega \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

avec A est un opérateur de type Leray-Lions défini par $A(u) = -div(a(x,\nabla u))$ et $G(x,u_n,\nabla u_n)$ est une non-linéarité ayant une croissance naturelle par rapport au $|\nabla u_n|$ (d'ordre p) et vérifiant de plus la condition de coercivité suivante:

$$|G(x,s,\zeta)| \geq \beta|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \gamma. \tag{5.2}$$

Dans ce chapitre, on va étudier la limite de la suite des problèmes (5.1) sans supposer (5.2). Plus précisément, Nous portons notre intérêt sur la forme entropique correspondante à (5.1).

5.1 Résultat principal

Soient Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 2$ et $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$.
Soit $A(u) = -div(a(x, \nabla u))$ un opérateur de type Leray-Lions défini sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual où $a : \Omega \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant (4.1), (4.2) et (4.3).
De plus, soit $g : \Omega \times I\!R \to I\!R$ une fonction de Carathéodory vérifiant (4.4), (4.5) et (4.8).
Soit encore $G : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une autre fonction de Carathéodory vérifiant (4.6) et (4.7).
On suppose, pour simplifier, que $G(x, s, 0) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $s \in I\!R$.

Théorème 5.1 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Supposons que (4.1)-(4.8) sont vérifiées et que la fonction $s \to g(x, s)$ est croissante pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, Le problème*

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,q}(\Omega), \forall 1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1},\ |g(x, u_n)|^n G(x, u_n, \nabla u_n) \in L^1(\Omega) \\ T_k(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla T_k(u_n - v)dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega |g(x, u_n)|^{n-1} g(x, u_n)|G(x, u_n, \nabla u_n)| T_k(u_n - v)dx \\ \qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u_n - v)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{array}\right. \tag{P_n}$$

admet au moins une solution u_n telle que:

$$u_n \to u \textit{ fortement dans } W_0^{1,q}(\Omega),\ \forall q < \frac{N(p-1)}{N-1}$$

où u est l'unique solution du problème bilatéral

$$\left\{\begin{array}{l} q_- \leq u \leq q_+ \quad p.p.\ dans\ \Omega, \\ u \in W_0^{1,q}(\Omega),\ \forall 1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1} \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla T_k(u - v)dx \leq \int_\Omega f T_k(u - v)dx,\ \forall v \in K \cap L^\infty(\Omega) \end{array}\right. \tag{P}$$

où $K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ q_- \leq v \leq q_+\ p.p.\ \}$.
De plus, on a pour tout $k > 0$

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \textit{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 5.1 *-Concernant l'unicité de la solution du problème (P), on peut adapter la technique utilisée dans [17].*

Remarque 5.2 *-Si q_- et q_+ sont bornées alors u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tandis que u_n est seulement dans $W_0^{1,q}(\Omega), \forall q < \frac{N(p-1)}{N-1}$.*

On donne ici un lemme qu'on utilisera par la suite.

Lemme 5.1 *Soient $(f_{n,m})$ et $(g_{n,m})$ deux suites dans $L^1(\Omega)$ telles que*

$$\begin{cases} i)\ |f_{n,m}| \leq g_{n,m}, \quad \forall n, m \\ ii)\ \lim_{n\to+\infty} f_{n,m} = f_m \ \ et \ \lim_{m\to+\infty} f_m = f \ \ p.p. \\ iii)\ \lim_{n\to+\infty} g_{n,m} = g_m \ \ et \ \lim_{m\to+\infty} g_m = g \ \ p.p. \quad avec\ g\ et\ g_m\ sont\ dans\ L^1(\Omega) \\ iv)\ \limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_{n,m} dx = \int_\Omega g dx. \end{cases}$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \ et \ \lim_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx = 0.$$

Preuve.

Posons $h_{n,m} = g_{n,m} + g - |f_{n,m} - f| \geq 0$.

En utilisant le lemme de Fatou en n, on obtient

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} h_{n,m} dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega h_{n,m} dx$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega (g_m + g - |f_m - f|) dx &\leq \liminf_{n\to+\infty} [-\int_\Omega |f_{n,m} - f| dx + \int_\Omega g dx + \int_\Omega g_{n,m} dx] \\ &\leq -\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx + \int_\Omega g dx + \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_{n,m} dx. \end{aligned}$$

Passons encore par le lemme de Fatou, mais cette fois en m,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \liminf_{m\to+\infty} (g_m + g - |f_m - f|) dx \\ &\leq \liminf_{m\to+\infty} [-\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx + \int_\Omega g dx + \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_{n,m} dx] \\ &\leq -\limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx + \int_\Omega g dx + \limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_{n,m} dx \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$2 \int_\Omega g dx \leq 2 \int_\Omega g dx - \limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx$$

d'où

$$\limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx \leq 0$$

et finalement

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_{n,m} - f| dx = 0.$$

Preuve du théorème 5.1.

Etape 1: Estimations a priori.

L'existence de u_n est assurée par le Théorème 2.1 du chapitre 2 (prendre $\psi = -\infty$). Choisissons $v = 0$ comme fonction test dans (P_n), alors en utilisant (4.3) et (4.4), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p dx \leq \|f\|_1 k. \tag{5.3}$$

L'utilisation de la fonction test $v = T_h(u_n)$ dans (P_n) avec $k = 1$ donne, en utilisant de nouveau (4.3) et (4.4),

$$\int_{\{k \leq |u_n| < k+1\}} |\nabla u_n|^p dx \leq C, \quad \text{pour tout } n. \tag{5.4}$$

Alors, comme dans [21], (5.3) et (5.4) entraînent: pour $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$ il existe $C_q > 0$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx \leq C_q. \tag{5.5}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega g(x, u_n)|g(x, u_n)|^{n-1}|G(x, u_n, \nabla u_n)|T_k(u_n) dx \leq Ck$$

ce qui entraîne,

$$\int_\Omega |g(x, u_n)|^n |G(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq C, \ \forall n. \tag{5.6}$$

En tenant compte de (5.3) et (5.5), il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ telle que (pour une sous-suite de u_n)

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement } W_0^{1,q}(\Omega), \forall q < \frac{N(p-1)}{N-1}, \text{ fortement dans } L^r(\Omega), \forall r < \frac{N(p-1)}{N-p} \tag{5.7}$$

et

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0. \tag{5.8}$$

<u>Step 2:</u> Convergence presque partout des gradients.

Fixons $q < \frac{N(p-1)}{N-1}$ et considérons $I_n = \int_\Omega \{[a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u)][\nabla u_n - \nabla u]\}^\theta dx$, où $0 < \theta < \frac{q}{p}$. Prenons, maintenant, $v = T_k(u)$, avec $k > 0$, comme fonction test dans (P_n). On obtient pour tout $\eta > 0$

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) dx + \int_\Omega |g(x, u_n)|^{n-1} g(x, u_n)|G(x, u_n, \nabla u_n)|T_\eta(u_n - T_k(u))$$
$$\leq \int_\Omega f T_\eta(u_n - T_k(u)) dx.$$

En utilisant la précédente inégalité et (5.6), on montre facilement, comme dans [18], que $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$ ainsi par le Lemme 3.3 de [48]

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{5.9}$$

Etape 3: $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,r}(\Omega), \forall r < \frac{N(p-1)}{N-1}$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Vitali. Soit $1 < r < \frac{N(p-1)}{N-1}$ et choisissons s tel que $r < s < \frac{N(p-1)}{N-1}$. Remarquons que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \Omega$, on a

$$\int_E |\nabla u_n|^r dx \leq (\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx)^{\frac{r}{s}} |E|^{1-\frac{r}{s}}$$

ce qui donne, grâce à (5.9), le résultat voulu.

Etape 4: $q_- \leq u \leq q_+$ p.p. dans Ω.

Puisque $G(x, s, 0) = 0$, on a pour tout $h > 0$,

$$\int_\Omega |g(x, T_h(u_n))|^n |G(x, T_h(u_n), \nabla T_h(u_n))| dx \leq C$$

ce qui donne

$$\int_{\{|g(x,T_h(u_n))|>k\}\}} |g(x, T_h(u_n))|^n |G(x, T_h(u_n), \nabla T_h(u_n))| dx \leq C$$

et

$$\int_{\{|g(x,T_h(u_n))|>k\}} |G(x, T_h(u_n), \nabla T_h(u_n))| dx \leq \frac{C}{k^n}$$

où $k > 1$. En tendant $n \to +\infty$ pour k fixé, on trouve

$$\int_{\{|g(x,T_h(u))|>k\}} |G(x, T_h(u), \nabla T_h(u))| dx = 0$$

ainsi, par (4.7)

$$|g(x, T_h(u))| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega$$

d'où $q_- \leq T_h(u) \leq q_+$ p.p. dans Ω. Ainsi le résultat en découle en tendant $h \to +\infty$.

Etape 5: Passage à la limite de (P_n).

Fixons $k > 0$ et soit $\phi(s) = s\exp(\gamma s^2)$, avec γ est choisi $\geq (\frac{\bar{b}(k)}{\alpha})^2$, de telle façon que $\phi'(s) - \frac{2\bar{b}(k)}{\alpha}|\phi(s)| \geq \frac{1}{2}, \forall s \in I\!R$.

Considérons la fonction

$$h_m(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq m, \\ -sign(s)s + m + 1 & \text{si } m \leq |s| \leq m+1 \\ 0 & \text{si } |s| \geq m+1. \end{cases}$$

Le choix de $v_{n,m,h} = T_h(u_n) - h_m(u_n)\phi(z_n)$, comme fonction test dans (P_n), où $z_n = T_k(u_n) - T_k(u)$, donne pour tout $\eta > 0$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla T_\eta(u_n - T_h(u_n) - h_m(u_n)\phi(z_n)) dx \\ &\qquad + \int_\Omega |g(x, u_n)|^{n-1} g(x, u_n) |G(x, u_n, \nabla u_n)| T_\eta(u_n - T_h(u_n) + h_m(u_n)\phi(z_n)) dx \\ &\qquad \leq \int_\Omega f T_\eta(u_n - T_h(u_n) + h_m(u_n)\phi(z_n)) dx \end{aligned}$$

ce qui implique, en utilisant le fait que $\int_{\{|u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)\phi(z_n)|\leq\eta\}} a(x,\nabla u_n)\nabla(u_n-T_h(u_n))dx \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)\phi(z_n)|\leq\eta\}} a(x,\nabla u_n)\nabla z_n\phi^{'}(z_n)h_m(u_n)dx\\
&+\int_{\{|u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)\phi(z_n)|\leq\eta\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx\\
&+\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_\eta(u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)\phi(z_n))dx\\
&\leq \int_\Omega fT_\eta(u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)\phi(z_n))dx
\end{aligned}$$

et en vertu du théorème de Lebesgue, on obtient en tendant $h\to+\infty$

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|h_m(u_n)\phi(z_n)|\leq\eta\}} a(x,\nabla u_n)\nabla z_n\phi^{'}(z_n)h_m(u_n)dx\\
&+\int_{\{|h_m(u_n)\phi(z_n)|\leq\eta\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx\\
&+\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|T_\eta(h_m(u_n)\phi(z_n))dx\\
&\leq \int_\Omega fT_\eta(h_m(u_n)\phi(z_n))dx.
\end{aligned}$$

Pour $\eta>\phi(2k)$, on a facilement

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla z_n\phi^{'}(z_n)h_m(u_n)dx\\
&+\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx\\
&+\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)dx\\
&\leq \int_\Omega fh_m(u_n)\phi(z_n)dx.
\end{aligned}\tag{5.10}$$

Notons par $\epsilon_m^1(n),\epsilon_m^2(n)$, ... des différentes suites qui convergent vers 0 quand n tend vers l'infini avec toute valeur fixée de m.
Puisque $|g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)\geq 0$ sur le sous-ensemble $\{x\in\Omega:|u_n(x)|>k\}$, on a d'après (5.10)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx\\
&\quad+\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx\\
&\quad+\int_{\{|u_n|\leq k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)dx\\
&\quad\leq \int_\Omega fh_m(u_n)\phi(z_n)dx=\epsilon_m^1(n).
\end{aligned}\tag{5.11}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx\\
&\quad=\int_{\{|u_n|\le k\}} a(x,\nabla u_n)[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx\\
&\quad-\int_{\{|u_n|>k\}} a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx\\
&\quad=\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n))-a(x,\nabla T_k(u))]\times\\
&\qquad\times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx\\
&\quad+\epsilon_m^2(n).
\end{aligned}\tag{5.12}$$

En effet, on a la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&|\int_{\{|u_n|>k\}} a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u)h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx|\\
&\le \phi^{'}(2k)\int_\Omega |a(x,\nabla T_{m+1}(u_n))\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|>k\}}|dx
\end{aligned}$$

le second membre de cette inégalité tend vers 0, puisque $(a(x,\nabla T_{m+1}(u_n))_n$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ tandis que

$$\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|>k\}}\to 0 \text{ fortement dans } (L^p(\Omega))^N.$$

Le terme $\displaystyle\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)dx$ tend vers 0, puisque $a(x,\nabla T_k(u))\in (L^{p'}(\Omega))^N$ tandis que

$$[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)\phi^{'}(z_n)\rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } (L^p(\Omega))^N.$$

D'autre part, on a

$$|\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx|\le \phi(2k)\int_{\{m\le|u_n|\le m+1\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dx$$

et en utilisant $v=T_m(u_n)$ comme fonction test dans (P_n), on obtient

$$|\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)\phi(z_n)dx|\le \phi(2k)\int_{\{|u_n|\ge m\}}|f|dx.\tag{5.13}$$

A propos du troisième terme de (5.10), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)dx\\
&\qquad\ge\int_{\{0\le u_n\le T_k(u)\}\cap\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)dx\\
&\qquad+\int_{\{T_k(u)\le u_n\le 0\}\cap\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)\phi(z_n)dx
\end{aligned}$$

le deuxième et le troisième termes seront respectivement notés par $I^1_{n,m}$ et $I^2_{n,m}$.
On a $|I^1_{n,m}|\le \displaystyle\int_{\{0\le u_n\le u\}\cap\{|u_n|\le k\}} |g(x,u_n)|^n|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx$

en tenant compte du fait que $|g(x,u_n)| \leq 1$ sur l'ensemble $\{0 \leq u_n \leq u\}$ et grâce à (4.6), on obtient

$$\begin{array}{rcl} |I^1_{n,m}| & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} |G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)(h_m(u_n)c(x)+|\nabla u_n|^p)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & + & \displaystyle\frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx. \end{array}$$

Par le théorème de Lebesgue, on a

$$\int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \to 0$$

ce qui donne

$$|I^1_{n,m}| \leq \epsilon^3_m(n) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \tag{5.14}$$

similairement, on a la domination suivante

$$\begin{array}{rcl} |I^2_{n,m}| & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} |G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & \displaystyle\int_{\{|u_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & + & \displaystyle\frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ & \leq & \displaystyle\epsilon^3_m(n) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx. \end{array} \tag{5.15}$$

Maintenant, remarquons que

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ = \displaystyle\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))]\times \\ \quad \times[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)|\phi(z_n)|dx \\ \quad +\epsilon^4_m(n). \end{array} \tag{5.16}$$

En combinant (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16), on obtient

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))]\times \\ \qquad \times[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)(\phi'(z_n) - \tfrac{2b(\bar{k})}{\alpha}|\phi(z_n)|)dx \\ \qquad \leq \epsilon^5_m(n) + \phi(2k)\displaystyle\int_{\{|u_n|\geq m\}} |f|dx. \end{array}$$

ce qui implique

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n)) - a(x,\nabla T_k(u))]\times \\ \qquad \times[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx \\ \qquad \leq 2\epsilon^5_m(n) + 2\phi(2k)\displaystyle\int_{\{|u_n|\geq m\}} |f|dx. \end{array}$$

Passons à la limite sup en n, on trouve

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n))-a(x,\nabla T_k(u))]\times\\ \times[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx\\ \le 2\phi(2k)\int_{\{|u|\ge m\}}|f|dx\end{aligned}$$

et par passage à la limite en m

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega [a(x,\nabla T_k(u_n))-a(x,\nabla T_k(u))][\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx\le 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)h_m(u_n)dx\\ =\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.\end{aligned} \tag{5.17}$$

En effet, on a

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)]h_m(u_n)dx=0$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)h_m(u_n)dx\\ =\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que u est solution du problème (P).
Soient $0<\theta<1$ et $v\in K\cap L^\infty(\Omega)$. En prenant $T_h(u_n)-h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)$ comme fonction test dans (P_n), on trouve

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v))dx\\ &+\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|(T_k(u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v))dx\\ &\le\int_\Omega fT_k(u_n-T_h(u_n)+h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v))dx\end{aligned}$$

en tendant $h\to+\infty$ et en utilisant le fait que $|h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)|\le k$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\ &+\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h_m^{'}(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx\\ &+\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx\\ &\le\int_\Omega fh_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx\\ \ge J^1_{m,n}+J^2_{m,n}\end{aligned} \tag{5.19}$$

où

$$J^1_{m,n} = \int_{\{0\le u_n\le \theta v\}} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx$$

et

$$J^2_{m,n} = \int_{\{\theta v\le u_n\le 0\}} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,u_n,\nabla u_n)|h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx.$$

De (5.18) et (5.19), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&+\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla u_n h'_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx\\
&+J^1_{m,n}+J^2_{m,n}\\
&\le \int_\Omega f h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Posons, pour presque tout $x\in\Omega$: $\delta_1(x) = \sup\limits_{0\le s\le \theta v(x)} g(x,s)$. Il est facile de voir que $0\le \delta_1(x) < 1$ p.p. On a alors en utilisant (4.6)

$$\begin{aligned}
|J^1_{m,n}| &\le k\int_{\{|u_n|\le \|v\|_\infty\}} \bar b(\|v\|_\infty)(\delta_1(x))^n h_m(u_n)(c(x)+|\nabla u_n|^p)dx\\
&\le k\bar b(\|v\|_\infty)\int_\Omega (\delta_1(x))^n(c(x)+|\nabla T_{\|v\|_\infty}(u_n)|^p h_m(u_n))dx
\end{aligned}$$

or

$$(\delta_1(x))^n(c(x)+|\nabla T_{\|v\|_\infty}(u_n)|^p h_m(u_n)) \le c(x)+\frac{1}{\alpha}a(x,\nabla T_{\|v\|_\infty}(u_n))\nabla T_{\|v\|_\infty}(u_n)h_m(u_n)$$

et en utilisant (5.17) et en appliquant le lemme 5.1, on trouve facilement

$$\lim_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|J^1_{m,n}| = 0. \tag{5.21}$$

De la même façon, on montre que

$$|J^2_{m,n}| \le k\bar b(\|v\|_\infty)\int_\Omega |\delta_2(x)|^n(c(x)+|\nabla T_{\|v\|_\infty}(u_n)|^p h_m(u_n))$$

où $-1 < \delta_2(x) = \inf\limits_{s\le \theta v\le 0} g(x,s) \le 0$ ainsi

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|J^2_{m,n}| = 0. \tag{5.22}$$

De (5.20), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&\quad\le k\int_{\{m\le |u_n|<m+1\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n dx\\
&\quad+|J^1_{m,n}|+|J^2_{m,n}|\\
&\quad+\int_\Omega f h_m(u_n)T_k(u_n-\theta v)dx
\end{aligned}$$

dans laquelle, on passe à la limite sup en n

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&\quad\le \limsup_{n\to+\infty} k\int_{\{m\le|u_n|<m+1\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n dx\\
&\quad+\limsup_{n\to+\infty}|J^1_{m,n}|+\limsup_{n\to+\infty}|J^2_{m,n}|\\
&\quad+\int_\Omega f h_m(u)T_k(u-\theta v)dx
\end{aligned}$$

et par passage à la limite en m, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&\quad\le \limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty} k\int_{\{m\le|u_n|<m+1\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n dx\\
&\quad+\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|J^1_{m,n}|+\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|J^2_{m,n}|\\
&\quad+\int_\Omega f T_k(u-\theta v)dx.
\end{aligned}\tag{5.23}$$

D'une part, en utilisant le lemme de Fatou et le fait que

$$\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)\rightharpoonup \nabla T_k(u-\theta v)h_m(u) \text{ faiblement dans } L^{p'}(\Omega)$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&\qquad\ge\int_\Omega [a(x,\nabla u)-a(x,\theta\nabla v)]\nabla T_k(u-\theta v)h_m(u)dx\\
&\qquad+\int_\Omega a(x,\theta\nabla v)\nabla T_k(u-\theta v)h_m(u)dx
\end{aligned}$$

dans laquelle on passe à la limite, en appliquant le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{m\to+\infty}\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\theta v)h_m(u_n)dx\\
&\qquad\ge\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-\theta v)dx.
\end{aligned}\tag{5.24}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\{m\le|u_n|<m+1\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n dx\le\int_{\{|u_n|\ge m\}}|f|dx$$

ce qui implique

$$\limsup_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{m\le|u_n|<m+1\}} a(x,\nabla u_n)\nabla u_n dx=0. \tag{5.25}$$

En combinant (5.21), (5.22), (5.24), (5.25) et (5.23), on obtient

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-\theta v)dx\le\int_\Omega fT_k(u-\theta v)dx \tag{2.32}$$

dans laquelle on passe à la limite quand $\theta\to 1$

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-v)dx\le\int_\Omega fT_k(u-v)dx.$$

Pour la convergence forte des troncatures, on adapte la technique utilisée dans le deuxième chapitre. ■

Remarque 5.3 - *On aurait utiliser la convergence forte des troncatures dans la dernière étape de la démonstration.*

Remarque 5.4 - *Si* $G(x, s, 0) \neq 0$, *on remplace la condition* (4.7) *par l'hypothèse suivante*

$$\{v \in W_0^{1,r}(\Omega) : G(x, v, \nabla v) = 0 \ p.p. \ \} \subset \{v \in W_0^{1,r}(\Omega) : |g(x, v)| \leq 1 \ p.p. \ \} \tag{5.26}$$

avec $1 \leq r < \frac{N(p-1)}{N-1}$, *et dans le cas où* $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$, *on la remplace par*

$$\{v \in T_0^{1,p}(\Omega) : G(x, v, \nabla v) = 0 \ a.e. \ \} \subset \{v \in T_0^{1,p}(\Omega) : |g(x, v)| \leq 1 \ p.p. \ \} \tag{5.27}$$

où $T_0^{1,p}(\Omega) = \{v : \Omega \to I\!R \text{ mesurable}, \ T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \forall k > 0\}$.
Ainsi, on peut étudier la suite des problèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in T_0^{1,p}(\Omega), |g(x, u_n)|^n G(x, u_n, \nabla u_n) \in L^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla T_k(u_n - v) dx \\ \qquad\quad + \displaystyle\int_\Omega |g(x, u_n)|^{n-1} g(x, u_n) |G(x, u_n, \nabla u_n)| T_k(u_n - v) dx \\ \qquad\quad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u_n - v) dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \forall k > 0 \end{array} \right. \tag{Q_n}$$

on montre facilement que

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

où u *est l'unique solution du problème bilatéral*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in T_0^{1,p}(\Omega) \\ q_- \leq u \leq q_+ \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla T_k(u - v) dx \leq \int_\Omega f T_k(u - v) dx, \ \forall v \in K \cap L^\infty(\Omega), \ \forall k > 0. \end{array} \right. \tag{Q}$$

Remarque 5.5 -*On peut reprendre les exemples 1 et 2 du précédent chapitre lorsque* ψ *et* ϕ *ne sont pas forcément bornées.*

Chapter 6

Limite de quelques problèmes paraboliques

On considère dans ce chapitre, la suite des problèmes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + Au_n + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)) \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), u_n(0) = 0, \\ |g(x,u_n)|^n G(x,t,u_n,\nabla u_n) \in L^1(\Omega \times (0,T)). \end{cases} \tag{P_n}$$

on remarque que le terme en puissance est multiplié par une fonction G qui dépend de x, t, u_n et de ∇u_n. On s'intéressera à la limite de la suite u_n. On montre que cette limite est solution de certaine inéquation parabolique en supposant quelques hypothèses sur g et G.

En outre, on prouve qu'on peut approcher un problème elliptique par une suite d'équations paraboliques.

On envisagera les deux cas $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ et $f \in L^1(\Omega \times (0,T))$.

6.1 Le cas variationnel

Soient Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, $N \geq 1$ et $1 < p < \infty$.

Pour $\tau > 0$, on désigne par Q_τ le cylindre $\Omega \times (0,\tau)$. Fixons $T > 0$ et soit $A(u) = -div(a(x,t,\nabla u))$ un opérateur de type Leray-Lions défini de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ dans son dual $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, où $a : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour p.p. $x \in \Omega$ et tous $t \in I\!R$, $\zeta, \zeta' \in I\!R^N, (\zeta \neq \zeta')$:

$$|a(x,t,\zeta)| \leq \beta(h(x,t) + |\zeta|^{p-1}) \tag{6.1}$$

$$(a(x,t,\zeta) - a(x,t,\zeta'))(\zeta - \zeta') > 0 \tag{6.2}$$

$$a(x,t,\zeta)\zeta \geq \alpha|\zeta|^p \tag{6.3}$$

où $\alpha > 0, \beta \geq 0,\ h \in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$.

De plus, soit $g : \Omega \times I\!R \to I\!R$ une fonction de Carathéodory vérifiant (4.4), (4.5) et (4.8).

Soit $G : \Omega \times I\!R \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R$ une autre fonction de Carathéodory vérifiant pour p.p. $x \in \Omega$ et tous $t, s \in I\!R$, $\zeta \in I\!R^N$:

$$|G(x,t,s,\zeta)| \leq \bar{b}(|s|)(c(x,t) + |\zeta|^p) \tag{6.4}$$

avec $\bar{b} : I\!R^+ \to I\!R^+$ est une fonction continue croissante $c(x,t) \in L^1(Q_T), c \geq 0$,
et

$$\begin{aligned} \{v \in L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega)) : G(x,t,v,\nabla v) = 0 \text{ p.p. dans } Q_{T+1}\} \subset \\ \subset \{v \in L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega)) : |g(x,v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_{T+1}\}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

On définit, pour tous $s, k \in I\!R$ avec $k \geq 0$, $T_k(s) = \max(-k, min(k,s))$.

Théorème 6.1 *Soit* $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. *Supposons que* $(4.4),(4.5),(4.8),(6.1)-(6.5)$ *sont vérifiées et que la fonction* $s \to g(x,s)$ *est croissante pour p.p.* $x \in \Omega$. *Alors, le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1}g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| = f \;\; dans \;\mathcal{D}'(Q_T) \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), u_n(0) = 0, |g(x,u_n)|^n G(x,t,u_n,\nabla u_n) \in L^1(Q_T) \end{cases} \tag{P_n}$$

admet au moins une solution u_n *telle que:*

$$u_n \to u \textit{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{6.6}$$

où u *est l'unique solution du problème parabolique suivant:*

$$\begin{cases} \int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, v-u\rangle dt + \int_0^T \langle Au, v-u\rangle dt \geq \int_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \;\forall v \in \mathcal{K}\cap D \\ u \in \mathcal{K} = \{v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) : v(t) \in K \;\; p.p.\}, \end{cases} \tag{P}$$

où $D = \{v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))\}$ *et*
$K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \;\; p.p. \;\; dans \;\Omega\}$.

Soit $w \in L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega)$, on définit pour tout $\mu > 0$, la régularisée w_μ de w par:

$$w_\mu(x,t) = \mu \int_{-\infty}^t \bar{w}(x,s)\exp(\mu(s-t))ds,$$

où $\bar{w}(x,s)$ est l'extention par 0 de w pour $s \notin [0,T+1]$. De plus, w_μ possède les propriétés suivantes (voir [46]):

$$w_\mu \to w \text{ fortement dans } L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial t} = \mu(w - w_\mu) \text{ au sens des distibutions.}$$

On présente d'abord, un lemme qu'on va utiliser dans la preuve du théorème (voir [37]).

Lemme 6.1 *Soit* $\{v_n\}$ *une suite dans* $L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega))\cap C([0,T+1],L^1(\Omega))$ *telle que* $v_n(.,0)=0$ *et* $\frac{\partial v_n}{\partial t}=\rho_{1n}+\rho_{2n}$*, avec* $\rho_{1n}\in L^{p'}(0,T+1,W^{-1,p'}(\Omega))$ *et* $\rho_{2n}\in L^1(Q_{T+1})$ *et supposons que* $v_n\to v$ *fortement dans* $L^p(Q_{T+1})$*.*
Soit ψ *une fonction dans* $C^1([0,T+1])$ *telle que* $\psi\geq 0,\ \psi'(t)\leq 0,\ \psi(T+1)=0$*.*
Soit encore $\phi I\!R\to I\!R$ *une fonction lipschitzienne croissante telle que* $\phi(0)=0$*. Alors,* $\forall k,\mu>0$*, on a*

$$\langle\langle\rho_{1n},\psi\phi(T_k(v_n)-T_k(v_m)_\mu)\rangle\rangle+\int_{Q_{T+1}}\rho_{1n}\psi\phi(T_k(v_n)-T_k(v_m)_\mu)dxdt\geq\circ^{\mu,n}(\frac{1}{m})+\circ^{\mu}(\frac{1}{n})$$

où $\langle\langle,\rangle\rangle$ *désigne la dualité entre* $L^{p'}(0,T+1;W^{-1,p'}(\Omega))$ *et* $L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega))$*; et* $\circ^\sigma(\epsilon)$ *est une quantité qui tend vers* 0 *quand* ϵ *tend vers* 0 *avec* σ *fixé.*

Preuve du théorème:

Etape 1: Estimations a priori.

On commence par étendre notre problème sur tout l'intervalle $]0,T+1[$. On pose pour $t\in[T,T+1[$:

$$a(x,t,\zeta)=\alpha|\zeta|^{p-2}\zeta,\ G(x,t,s,\zeta)=|\zeta|^p,\ f(x,t)=0.$$

Avec ces choix, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases}\frac{\partial v_n}{\partial t}+A(v_n)+|g(x,v_n)|^{n-1}g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|=f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_{T+1})\\ v_n\in L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega)),v_n(0)=0,|g(x,v_n)|^nG(x,t,v_n,\nabla v_n)\in L^1(Q_{T+1})\end{cases}\qquad (Q_n)$$

L'existence de v_n est donnée par le théorème 1.6 du chapitre 1. Choisissons $v=T_k(v_n)$ comme fonction test dans (Q_n), et utilisons la condition du signe (4.4), on obtient

$$\int_\Omega S_k(v_n(T+1))dx+\alpha\int_{Q_{T+1}}|\nabla T_k(v_n)|^pdxdt\leq\|f\|_{L^{p'}(0,T+1,W^{-1,p'}(\Omega))}\|T_k(v_n)\|_{L^p(0,T+1,W_0^{1,p}(\Omega))}$$

où $S_k(s)=\displaystyle\int_0^s T_k(t)dt$.
En vertu de la positivité de S_k, on déduit

$$\int_{Q_{T+1}}|\nabla T_k(v_n)|^pdxdt\leq C$$

où C est une constante indépendante de n et de k. En tendant $k\to+\infty$ pour n fixé, on obtient par le lemme de Fatou

$$\int_{Q_{T+1}}|\nabla v_n|^pdxdt\leq C,\quad\text{pour tout } n.\qquad (6.7)$$

On a aussi

$$\int_{Q_{T+1}}|g(x,v_n)|^{n-1}g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|T_k(v_n)dxdt\leq C$$

ce qui donne

$$\int_{\{|v_n(x,t)|>k\}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq C, \quad \text{pour tout } n.$$

Par la continuité de b et le fait que $b(0)=0$, il existe $\delta>0$ tel que

$$b(|s|) \leq 1 \text{ pour tout } |s| \leq \delta$$

ce qui implique, par utilisation de (6.4) et (6.7),

$$\int_{\{|v_n(x,t)|\leq\delta\}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq \int_{\{|v_n(x,t)|\leq\delta\}} \bar{b}(\delta)(c(x,t)+|\nabla v_n|^p) dxdt \leq C.$$

Par conséquent

$$\int_{Q_{T+1}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq C, \text{ pour tout } n. \tag{6.8}$$

En écrivant, maintenant, comme suit $\frac{\partial v_n}{\partial t} = (f - Av_n) - |g(x,v_n)|^{n-1} g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|$. Puisque $f - A(v_n)$ est bornée dans $L^{p'}(0,T+1;W^{-1,p'}(\Omega))$ et $|g(x,v_n)|^{n-1}g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|$ est bornée dans $L^1(Q_{T+1})$ alors, en utilisant un résultat de [34] (voir aussi [56]) nous obtenons facilement

$$v_n \to v \text{ fortement dans } L^p(Q_{T+1}).$$

Etape 2: Convergence presque partout des gradients.

Pour tout $\psi \in L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_{T+1})$, on a

$$\langle\langle \frac{\partial v_n}{\partial t}, \psi\rangle\rangle + \langle\langle A(v_n), \psi\rangle\rangle \leq |\langle\langle f, \psi\rangle\rangle| + C\|\psi\|_\infty, \quad \forall n.$$

Alors, en utilisant le Lemme 1 de [47], on obtient

$$\nabla v_n \to \nabla v \text{ p.p. dans } Q_{T+1}. \tag{6.9}$$

Etape 3: Pour tout $t \in]0,T+1[$, $v(t) \in K = \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq w \leq q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

On a

$$\int_{Q_{T+1}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq C$$

ce qui implique

$$\int_{\{|g(x,v_n)|>k\}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq C$$

et

$$\int_{\{|g(x,v_n)|>k\}} |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq \frac{C}{k^n}$$

où $k > 1$. En tendant $n \to +\infty$ pour k fixé, on déduit par le lemme de Fatou

$$\int_{\{|g(x,v)|>k\}} |G(x,t,v,\nabla v)|dx = 0$$

ainsi par (6.5)

$$|g(x,v(x,t))| \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_{T+1}.$$

Etape 4: Convergence forte des troncatures.

Soit $\phi(s) = s\exp(\gamma s^2)$ où γ est choisie telle que $\gamma \geq (\frac{\bar{b}(k)}{\alpha})^2$.
On a $\phi'(s) - \frac{2\bar{b}(k)}{\alpha}|\phi(s)| \geq \frac{1}{2}, \forall s \in I\!R$.
Posons $v_{n,m,\mu} = \psi\phi(z^\mu_{n,m})$, avec $\psi \in C^1[0,T+1], \psi \geq 0,\ \psi'(t) \leq 0,\ \psi(T+1) = 0,\ \psi = 1$ dans $[0,T]$ et $z^\mu_{n,m} = T_k(v_n) - T_k(v_m)_\mu$.
Le choix de la fonction test $v_{n,m,\mu}$ dans (Q_n), donne

$$\begin{aligned}\int_0^{T+1} \langle \frac{\partial v_n}{\partial t}, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt &+ \int_0^{T+1} \langle Av_n, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt \\ &+ \int_{Q_{T+1}} |g(x,v_n)|^{n-1} g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi\phi(z^\mu_{n,m})dxdt \\ &= \int_0^{T+1} \langle f, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt\end{aligned}$$

ce qui entraîne, en utilisant le fait que $g(x,v_n)\psi\phi(z^\mu_{n,m}) \geq 0$ sur $\{(x,t) \in Q_{T+1} : |v_n(x,t)| > k\}$,

$$\begin{aligned}&\int_0^{T+1} \langle \frac{\partial v_n}{\partial t}, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt + \\ &\quad + \int_0^{T+1} \langle Av_n, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt \\ &\quad + \int_{\{0\leq v_n\leq T_k(v_m)_\mu\}\cap\{|v_n|\leq k\}} |g(x,v_n)|^{n-1} g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi\phi(z^\mu_{n,m})dxdt \\ &\quad + \int_{\{T_k(v_m)_\mu\leq v_n\leq 0\}\cap\{|v_n|\leq k\}} |g(x,v_n)|^{n-1} g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi\phi(z^\mu_{n,m})dxdt \\ &\quad \leq \int_0^{T+1} \langle f, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt.\end{aligned} \tag{6.10}$$

On notera par $\epsilon(m,n,\mu)$ toute quantité qui vérifie $\limsup_{\mu\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty}\epsilon(m,n,\mu) = 0$, tout en respectant l'ordre des paramètres m, n, μ. De même, on écrira $\epsilon(m)$, ou $\epsilon(m,n)$ pour désigner que les limites sont faites suivant des paramètres spécifiques.
D'abord, grâce au lemme 6.1, on a

$$\int_0^{T+1} \langle \frac{\partial v_n}{\partial t}, \psi\phi(z^\mu_{n,m})\rangle dt \geq \epsilon(m,n).$$

Le troisième et le quatrième termes de l'inégalité (6.10) seront notés respectivement par $I^1_{n,k}$ et $I^2_{n,k}$.
D'une part, on a

$$|I^1_{n,k}| \leq \int_{\{0\leq v_n\leq T_k(v_m)_\mu\}\cap\{|v_n|\leq k\}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi|\phi(z^\mu_{n,m})|dxdt$$

or $|g(x,v_n)| \leq 1$ sur $\{x \in \Omega : 0 \leq v_n \leq T_k(v)_\mu\}$ donc, en désignant par $z_n^\mu = T_k(v_n) - T_k(v)_\mu$, on aura

$$\begin{aligned}
|I_{n,k}^1| &\leq \int_{\{|v_n|\leq k\}} |G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt + \epsilon(m) \\
&\leq \int_{\{|v_n|\leq k\}} \bar{b}(k)(c(x,t) + |\nabla v_n|^p))\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt + \epsilon(m) \\
&\leq \int_{\{|v_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x,t)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt \\
&+ \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_{Q_{T+1}} a(x,t,\nabla T_k(v_n))\nabla T_k(v_n)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt + \epsilon(m).
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Lebesgue, on a

$$\int_{\{|v_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x,t)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt \to 0 \text{ lorsque } n,\mu \to +\infty$$

ce qui donne

$$|I_{n,k}^1| \leq \epsilon(m,n,\mu) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_{Q_{T+1}} a(x,t,\nabla T_k(v_n))\nabla T_k(v_n)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt \tag{6.11}$$

similairement, on a

$$\begin{aligned}
|I_{n,k}^2| &\leq \int_{\{|v_n|\leq k\}} |G(x,t,v_n,\nabla v_n)|\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt + \epsilon(m) \\
&\leq \int_{\{|v_n|\leq k\}} \bar{b}(k)c(x,t)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt \\
&+ \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_{Q_{T+1}} a(x,t,\nabla T_k(v_n))\nabla T_k(v_n)\psi|\phi(z_n^\mu)|dxdt + \epsilon(m) \\
&\leq \epsilon(m,n,\mu) + \frac{\bar{b}(k)}{\alpha}\int_{Q_{T+1}} a(x,t,\nabla T_k(v_n))\nabla T_k(v_n)|\phi(z_n^\mu)|dxdt
\end{aligned} \tag{6.12}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{T+1}\langle Av_n, \psi\phi(z_{n,m}^\mu)\rangle dt &= \int_{Q_{T+1}} \psi a(x,t,\nabla v_n)[\nabla T_k(v_n) - \nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt + \epsilon(m) \\
&= \int_{\{|v_n|\leq k\}} \psi a(x,t,\nabla v_n)[\nabla T_k(v_n) - \nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt \\
&+ \int_{\{|v_n|> k\}} \psi a(x,t,\nabla v_n)[\nabla T_k(v_n) - \nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt \\
&+ \epsilon(m) \\
&= \int_{\{|v_n|\leq k\}} \psi a(x,t,\nabla v_n)[\nabla T_k(v_n) - \nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt \\
&- \int_{\{|v_n|> k\}} \psi a(x,t,\nabla v_n)\nabla T_k(v)_\mu\phi'(z_n^\mu)dxdt \\
&+ \epsilon(m).
\end{aligned}$$

Notons par $J_{\mu,n}$ l'avant-dernier terme de cette égalité. On a

$$|J_{n,\mu}| \leq C\|\nabla T_k(v)_\mu \chi_{\{|v_n|>k\}}\|_{L^p(Q_{T+1})}$$

car $\psi(a(x,t,\nabla v_n)\phi'(z_n^\mu))_n$ est bornée dans $(L^{p'}(Q_{T+1}))^N$,
et en utilisant le fait que $T(v)_\mu \to T_k(v)$ fortement dans $L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega))$, on obtient

$$\lim_{\mu\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|J_{\mu,n}|=0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T+1}\langle Av_n,\psi\phi(z_{n,m}^\mu)\rangle dt=\int_{\{|v_n|\le k\}}\psi a(x,t,\nabla v_n)[\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt+\epsilon(m,n)\\
&=\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt\\
&+\int_{Q_{T+1}}\psi a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt+\epsilon(m,n)\\
&=\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt+\epsilon(m,n,\mu)\\
&=\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)]\phi'(z_n^\mu)dxdt\\
&+\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt+\epsilon(m,n,\mu)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $T_k(v)_\mu \to T_k(v)$ fortement dans $L^p(0,T+1;W_0^{1,p}(\Omega))$, on aura
$\displaystyle\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v)-\nabla T_k(v)_\mu]\phi'(z_n^\mu)dxdt\to 0$ quand $\mu\to\infty$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_0^{T+1}\langle Av_n,\psi\phi(z_{n,m}^\mu)\rangle dt=\int_{Q_{T+1}}&\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))]\times\\
&\times[\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)]\phi'(z_n^\mu)dxdt+\epsilon(m,n,\mu)
\end{aligned}$$

et en utilisant (6.11) et (6.12), on obtient
$\displaystyle\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,t,\nabla T_k(v))]\times$

$$\times[\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)](\phi'(z_n^\mu)-\frac{2\bar{b}(k)}{\alpha}|\phi(z_n^\mu)|)dxdt\le\epsilon(m,n,\mu)$$

et par suite

$$\int_{Q_{T+1}}\psi[a(x,t,\nabla T_k(v_n))-a(x,\nabla T_k(v))][\nabla T_k(v_n)-\nabla T_k(v)]dxdt\le 2\epsilon(m,n,\mu)$$

le lemme 5 de [30] et le fait que $\psi=1$ sur $[0,T]$, impliquent

$$T_k(v_n)\to T_k(v) \text{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

En posant, maintenant, $u_n=v_n|Q_T$ et $u=v|Q_T$, il est facile de voir que u_n est solution de (P_n) et que

$$T_k(u_n)\to T_k(u) \text{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Etape 5: u est solution de l'inéquation variationnelle (P).

Choisissons $w_n = T_k(u_n - \theta v)$ comme fonction test dans (P_n), où $v \in \mathcal{K} \cap D$ et $0 < \theta < 1$, nous obtenons

$$\int_0^T \langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, T_k(u_n - \theta v)\rangle dt + \int_0^T \langle Au_n, T_k(u_n - \theta v))\rangle dt +$$
$$+ \int_{Q_T} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| T_k(u_n - \theta v) dxdt$$
$$= \int_0^T \langle f, T_k(u_n - \theta v)\rangle dt$$

et en tenant compte du fait que $g(x,u_n)T_k(u_n - v) \geq 0$ sur

$$\{x \in \Omega : u_n \geq 0 \text{ et } u_n \geq \theta v\} \cup \{x \in \Omega : u_n \leq 0 \text{ et } u_n \leq \theta v\}$$

nous aurons

$$\int_{Q_T} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| T_k(u_n - \theta v) dxdt$$
$$\geq \int_{\{0 \leq u_n \leq \theta v\}} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| T_k(u_n - \theta v) dxdt$$
$$+ \int_{\{\theta v \leq u_n \leq 0\}} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| T_k(u_n - \theta v) dxdt.$$

Le deuxième et le troisième termes de cette inégalité seront notés respectivement par J_n^1 et J_n^2.
Définissons par

$$\delta_1(x,t) = \sup_{0 \leq s \leq \theta v} g(x,s),$$

on a $0 \leq \delta_1(x,t) < 1$ p.p. dans Q_T.
D'une part, on a pour tout $l > 0$

$$\begin{array}{rcl} |J_n^1| & \leq & k \int_{\{0 \leq u_n \leq \theta v\} \cap \{|u_n| < l\}} (\delta_1(x,t))^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \\ & + & \int_{\{|u_n| > l\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \end{array} . \tag{6.13}$$

D'autre part, on a

$$\int_{Q_T} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| u_n dxdt \leq C$$

et par suite

$$\int_{\{|u_n| > l\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \leq \frac{C}{l}. \tag{6.14}$$

Soit $\epsilon > 0$, alors d'après (6.14) il existe $l(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_{\{|u_n| > l(\epsilon)\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt < \epsilon. \tag{6.15}$$

Choisissons $l = l(\epsilon)$ dans (6.13), nous obtenons

$$|J_n^1| \leq \int_{\{|u_n| \leq l(\epsilon)\}} (\delta_1(x,t))^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt + \epsilon$$

or

$$|(\delta_1(x,t))^n|G(x,t,u_n,\nabla u_n)||\chi_{\{|u_n|\leq l(\epsilon)\}} \leq \bar{b}(l(\epsilon))(c(x,t)+|\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|^p)$$

et puisque $\bar{b}(l(\epsilon))(c(x,t)+|\nabla T_{l(\epsilon)}(u_n)|^p)$ est fortement compact dans $L^1(Q_T)$ alors par le théorème de Lebesgue, on aura

$$J_n^1 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

De la même façon, on peut trouver un certain $l'(\epsilon) > 0$ tel que:

$$|J_n^2| \leq k \int_{\{|u_n|\leq l'(\epsilon)\}} |\delta_2(x,t)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)|dxdt + \epsilon$$

où

$$\delta_2(x,t) = \inf_{\theta v \leq s \leq 0} g(x,s).$$

Ce qui montre que

$$J_n^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle Au_n, T_k(u_n-\theta v))\rangle dt &= \int_{Q_T} a(x,t,\nabla u_n)[\nabla u_n - \theta\nabla v]\chi_{\{|u_n-\theta v|\leq k\}}dxdt \\ &= \int_{Q_T} [a(x,t,\nabla u_n) - a(x,t,\theta\nabla v)][\nabla u_n - \theta\nabla v]\chi_{\{|u_n-\theta v|\leq k\}}dxdt \\ &+ \int_{Q_T} a(x,t,\theta\nabla v)[\nabla u_n - \theta\nabla v]\chi_{\{|u_n-\theta v|\leq k\}}dxdt.\end{aligned}$$

Le troisième terme de cette égalité tend vers $\int_{Q_T} a(x,t,\theta\nabla v)[\nabla u - \theta\nabla v]\chi_{\{|u-\theta v|\leq k\}}dxdt$ lorsque $n \to +\infty$ puisque $a(x,t,\theta\nabla v)$ appartient à $(L^{p'}(Q_T))^N$ tandis que $[\nabla u_n - \theta\nabla v]\chi_{\{|u_n-\theta v|\leq k\}}$ tend vers $[\nabla u - \theta\nabla v]\chi_{\{|u-\theta v|\leq k\}}$ faiblement dans $(L^p(Q_T))^N$.
En utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \langle Au_n, T_k(u_n-\theta v))\rangle dt$$

$$\geq \int_{Q_T} [a(x,t,\nabla u) - a(x,t,\theta\nabla v)][\nabla u - \theta\nabla v]\chi_{\{|u-\theta v|\leq k\}}dxdt$$

$$+ \int_{Q_T} a(x,t,\theta\nabla v)[\nabla u - \theta\nabla v]\chi_{\{|u-\theta v|\leq k\}}dxdt$$

$$= \int_0^T \langle Au, T_k(u-\theta v)\rangle dt.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle\frac{\partial u_n}{\partial t}, T_k(u_n-\theta v)\rangle dt &= \int_0^T \langle\frac{\partial u_n}{\partial t} - \theta\frac{\partial v}{\partial t}, T_k(u_n-\theta v)\rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle\theta\frac{\partial v}{\partial t}, T_k(u_n-\theta v\rangle dt,\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $u_n(0) = 0$ et $v(0) = 0$, on obtient

$$\int_0^T \langle \frac{\partial u_n}{\partial t} - \theta \frac{\partial v}{\partial t}, T_k(u_n - \theta v)\rangle dt = \int_\Omega S_k(u_n - \theta v)(T) dx \geq 0$$

par conséquent

$$\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, T_k(u - \theta v)\rangle dt + \int_0^T \langle Au, T_k(u - \theta v)\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, T_k(u - \theta v)\rangle dt$$

ceci implique, en utilisant le fait que $T_k(u - \theta v) \to u - \theta v$ fortement dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$,

$$\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, u - \theta v\rangle dt + \int_0^T \langle Au, u - \theta v\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, u - \theta v\rangle dt$$

dans laquelle on peut passer à la limite, $\theta \to 1$,

$$\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, u - v\rangle dt + \int_0^T \langle Au, u - v\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, u - v\rangle dt.$$

Etape 6: $u_n \to u$ fortement dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Utilisons $T_k(u_n - T_h(u_n))$ comme fonction test dans (P_n), et puisque $g(x, u_n)v_n \geq 0$ et $\int_\Omega S_k(u_n - T_h(u_n))(T) dx \geq 0$, nous obtenons

$$\int_0^T \langle Au_n, T_k(u_n - T_h(u_n))\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, T_k(u_n - T_h(u_n))\rangle dt$$

il en découle quand $k \to +\infty$, avec n et h fixés,

$$\int_0^T \langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, u_n - T_h(u_n)\rangle dt$$

et en tendant $n \to +\infty$, on obtient

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_0^T \langle Au_n, u_n - T_h(u_n)\rangle dt \leq \int_0^T \langle f, u - T_h(u)\rangle dt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla u_n - \nabla u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} dt &\leq 3^p \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_h(u_n) - \nabla T_h(u)|^p dx dt \\
&+ 3^p \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \chi_{\{|u_n| > h\}} dx dt + 3^p \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{\{|u| > h\}} dx dt \\
&\leq 3^p \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_h(u_n) - \nabla T_h(u)|^p dx dt \\
&+ \frac{3^p}{\alpha} \int_0^T \langle f, u_n - T_h(u_n)\rangle dt + \frac{3^p}{\alpha} \int_0^T \langle f, u - T_h(u)\rangle dt
\end{aligned}$$

ce qui donne, en tenant compte de la convergence forte des troncatures,

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_0^T \|\nabla u_n - \nabla u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} dt \leq \frac{2 \times 3^p}{\alpha} \int_0^T \langle f, u - T_h(u)\rangle dt.$$

Finalement, puisque $T_h(u) \to u$ fortement dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, on obtient immédiatement

$$\|u_n - u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \to 0.$$

Remarque 6.1 *Dans le cas où g ne dépend pas de x et sous les hypothèses* (4.4), (4.5), *(*4.8*),* (6.1) – (6.5)*, le problème* (P_n) *admet au moins une solution u_n telle que $u_n \to u$ fortement dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, où u est l'unique solution du problème suivant:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, v-u\rangle dt + \int_0^T \langle Au, v-u\rangle dt \geq \int_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \ \forall v \in \mathcal{K}\cap D, \\ u \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

où $\mathcal{K}$ et D sont définis comme précédemment.

En effet, le résultat découle du fait que lorsque g ne dépend pas de x, on a

$$\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : |g(v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

voir([36]).

6.2 Le cas L^1

Dans cette section, on étudie la limite de la suite des problèmes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n)|G(x,t,u_n,\nabla u_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), u_n(0) = 0, |g(x,u_n)|^n G(x,t,u_n,\nabla u_n) \in L^1(Q_T) \end{cases} \qquad (R_n)$$

où G est comme précédemment et vérifie, en plus, la condition de coercivité suivante:

$$|G(x,t,s,\zeta)| \geq \beta|\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq \gamma. \qquad (6.16)$$

où $\beta > 0, \gamma \geq 0$.

On se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème 6.2 *Soit $f \in L^1(Q_T)$. Supposons que les hypothèses du théorème 6.1 sont satisfaites, q_- and q_+ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et que la condition (6.16) est vérifiée. Alors, le problème (R_n) admet au moins une solution u_n telle que:*

$$u_n \to u \textit{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

où u est l'unique solution du problème bilatéral suivant:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{K} = \{v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) : v(t) \in K \ p.p.\} \\ \displaystyle\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, u-v\rangle dt + \int_0^T \langle Au, v-u\rangle dt \geq \int_{Q_T} f(v-u)dxdt, \\ \forall v \in \mathcal{K}\cap D \\ u \in \mathcal{K} = \{v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) : v(t) \in K \ p.p.\} \end{cases} \qquad (R)$$

où $D = \{v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))\}$ et
$K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \ p.p. \ dans \ \Omega\}$.

Remarque 6.2 *La condition* $u_n(0) = 0$ *a bien un sens puisque* $u_n \in C([0,T], L^1(\Omega))$. *En effet, on a* $u_n \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ *et* $\frac{\partial u_n}{\partial t} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q_T)$ *ce qui montre que* $u_n \in C([0,T], L^1(\Omega))$. *(Voir [54]).*

Preuve:

Les étapes de la démonstration sont similaires au cas variationnel.

<u>Etape 1:</u> Estimations a priori.

On étend notre problème, comme précédemment, sur tout l'intérvalle $]0, T+1[$ et on considère la suite des équations:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_n}{\partial t} + A(v_n) + |g(x,v_n)|^{n-1} g(x,v_n)|G(x,t,v_n,\nabla v_n)| = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_{T+1}) \\ v_n \in L^p(0,T+1; W_0^{1,p}(\Omega)), v_n(0) = 0, |g(x,v_n)|^n G(x,t,v_n,\nabla v_n) \in L^1(Q_{T+1}) \end{cases} \qquad (\tilde{R_n})$$

L'existence de v_n est donnée par le théorème 1.7 du chapitre 1. En effet, il est facile de voir que $|g(x,s)| \geq 1$ sur l'ensemble $\{|s| \geq \bar{\gamma}\}$ où $\bar{\gamma} = max\{supessq_+, -infessq_-\}$ ainsi

$$|g(x,s)|^n |G(x,t,s,\zeta)| \geq \beta |\zeta|^p \text{ pour } |s| \geq max\{\gamma, \bar{\gamma}\}.$$

Choisissons $v = T_h(v_n)$, comme fonction test dans $(\tilde{R_n})$, avec $h = max\{\gamma, \bar{\gamma}\}$ et utilisons la condition du signe (4.4) et la positivité du terme $\int_\Omega S_h(v_n(T+1))dx$, nous obtenons

$$\alpha \int_{Q_{T+1}} |\nabla T_h(v_n)|^p dxdt \leq h \|f\|_1 \qquad (6.17)$$

et

$$\int_{\{|v_n| \geq h\}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq \|f\|_1.$$

Ce qui donne

$$\int_{\{|v_n| \geq h\}} |\nabla v_n|^p dxdt \leq C$$

et par suite

$$\int_{Q_{T+1}} |\nabla v_n|^p dxdt \leq C. \qquad (6.18)$$

D'autre part, comme dans la section précédente, on a

$$\int_{Q_{T+1}} |g(x,v_n)|^n |G(x,t,v_n,\nabla v_n)| dxdt \leq C. \qquad (6.19)$$

<u>Etape 2:</u> Convergence presque partout des gradients ∇v_n.

D'après (6.18), il existe $v \in L^p(0,T+1; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que (pour une sous-suite)

$$v_n \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } L^p(0,T+1, W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Ecrivons, maintenant, $\frac{\partial v_n}{dt} = -Av_n + f - |g(x, v_n)|^{n-1} g(x, v_n)|G(x, t, v_n, \nabla v_n)|$ et remarquons, par (6.19), que le second membre est uniformément borné dans $L^{p'}(0, T+1; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q_{T+1})$. Alors, comme dans la section précédente, on aura

$$\nabla v_n \to \nabla v \text{ p.p. dans } Q_{T+1}.$$

Etape 3: Pour presque tout $t \in]0, T+1[$, $v(t) \in K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

le résultat découle immédiatement de (6.19).

Etape 4: Convergence forte des troncatures.

On raisonne comme dans la section précédente.

Etape 5: Posons $u_n = v_n|Q_T$ et $u = v|Q_T$. Montrons que u est solution du problème bilatéral (R).

Soient $v \in \mathcal{K}$ et $0 < \theta < 1$. Prenons $T_k(u_n - \theta v), k > 0$, comme fonction dans (R_n). On adapte la même démonstration, comme dans la preuve du théorème 6.1 sauf l'inéquation (6.15) qu'on peut trouver en choisissant $T_1(u_n - T_k(u_n))$ comme fonction test dans (R_n). En effet, on a

$$\int_\Omega S_1(u_n - T_k(u_n))(T)dx + \int_0^T \langle Au_n, T_1(u_n - T_k(u_n))\rangle dt$$
$$+ \int_{Q_T} |g(x, u_n)|^{n-1} g(x, u_n)|G(x, t, u_n, \nabla u_n)| T_1(u_n - T_k(u_n))dxdt$$
$$= \int_{Q_T} f T_1(u_n - T_k(u_n))dxdt$$

ce qui implique

$$\int_{\{|u_n|>k+1\}} |g(x, u_n)|^n |G(x, t, u_n, \nabla u_n)|dxdt \leq \int_{\{|u_n|>k\}} |f|dxdt.$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $l(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>l(\epsilon)\}} |g(x, u_n)|^n |G(x, t, u_n, \nabla u_n)|dxdt \leq \epsilon.$$

Etape 6: $u_n \to u$ fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$.

Par le thérème de Vitali, on montre que $\nabla u_n \to \nabla u$ fortement dans $(L^p(\Omega))^N$.
Pour simplifier, on suppose que $\beta = 1$.
Soit E un sous-ensemble mesurable de Ω, on a pour tout $k > 0$

$$\int_E |\nabla u_n|^p dxdt \leq \int_{E\cap\{|u_n|\leq k\}} |\nabla u_n|^p dxdt + \int_{E\cap\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p dxdt.$$

Soit $\epsilon > 0$. En vertu de la convergence forte des troncatures, il existe $\eta(\epsilon, k)$ tel que pour tout E mesurable

$$mes(E) < \eta(\epsilon, k) \Rightarrow \int_{E\cap\{|u_n|\leq k\}} |\nabla u_n|^p dxdt \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n. \tag{6.20}$$

Choisissons $T_1(u_n - T_k(u_n))$, $k > 0$, comme fonction test (Q_n), nous obtenons, comme précédemment,

$$\int_{\{|u_n|>k+1\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \leq \int_{\{|u_n|>k\}} |f| dxdt$$

et par suite, il existe $k = k(\epsilon)$ tel que

$$\int_{\{|u_n|>k+1\}} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n.$$

En posant $h(\epsilon) = max\{k+1, \gamma, \bar{\gamma}\}$, on obtient

$$\int_{\{|u_n|>h(\epsilon)\}} |\nabla u_n|^p dxdt \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n. \tag{6.21}$$

En combinant (6.20) et (6.21), on déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_E |\nabla u_n|^p dxdt \leq \epsilon, \quad \forall n, \ \forall E \text{ mesurable}, mes(E) < \eta$$

ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(|\nabla u_n|^p)_n$ dans $L^1(Q_T)$.

Remarque 6.3 - *La condition $b(0) = 0$ n'est pas nécessaire. En effet, on a pour tout $h > 0$,*

$$\int_{Q_T} |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| \frac{T_h(u_n)}{h} dxdt \leq C$$

ce qui donne en tendant $h \to 0$,

$$\int_{Q_T} |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| dxdt \leq C.$$

6.3 Approximation d'une inéquation elliptique par une suite d'équations paraboliques

Dans cette section, on utilise une autre méthode de pénalisation. Elle consiste à approcher un problème elliptique par une suite d'équations paraboliques. on portera notre intérêt sur l'étude de la limite des équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) + |g(x,u_n)|^{n-1} g(x,u_n) |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| = F \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathcal{Q}_T) \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \ u_n(0) = 0, \ |g(x,u_n)|^n |G(x,t,u_n,\nabla u_n)| \in L^1(Q_T) \end{cases} \tag{T_n}$$

où $F(t) = f$ p.p. $\in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $A(u) = -div(a(x,\nabla u))$.
On définit pour tout $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, $\tilde{v}(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(x,t)dt$.
On a le théorème suivant.

Théorème 6.3 *Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Supposons que les hypothèses du théorème 6.1 ont lieu. Alors, il existe au moins une solution u_n de (T_n) telle que*

$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

où $\tilde{u}$ est l'unique solution du problème bilatéral suivant:

$$\begin{cases} \tilde{u} \in K \\ \langle A\tilde{u}, v - \tilde{u}\rangle \geq \langle f, v - \tilde{u}\rangle, \ \forall v \in K, \end{cases} \tag{T}$$

où $K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : q_- \leq v \leq q_+ \text{ p.p. } \}$.

Remarque 6.4 *-Le même résultat peut être obtenu dans le cas L^1 si on suppose que (3.1) a lieu et que q_-, q_+ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$.*

Preuve:

La suite u_n étant construite comme précédemment.

Il suffit de montrer seulement que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $\tilde{u}$ est solution de (T).

On a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq \int_0^T \frac{1}{T}\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} dt \\ &\leq C\|u_n - u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu puisque $u_n \to u$ fortement dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

Montrons, maintenant, que $\tilde{u}$ est solution de (T).

Prenons $v\chi_{]0,T[} \in \mathcal{K} \cap D$, avec $v \in K$, comme fonction test dans (P) (voir le théorème (6.1)), on obtient

$$\int_0^T \langle Au, v - u\rangle dt \geq \int_0^T \langle f, v\chi_{]0,T[} - u\rangle dt$$

ce qui donne, puisque A est monotone,

$$\int_0^T \langle Av, v - u\rangle dt \geq \int_0^T \langle f, v\chi_{]0,T[} - u\rangle dt$$

donc

$$\langle Av, v - \tilde{u}\rangle \geq \langle f, v - \tilde{u}\rangle. \tag{6.22}$$

En remplaçant dans (6.22) v par $t\tilde{u} + (1-t)v, 0 < t < 1$ et en tendant $t \to 1$, on obtient

$$\langle A\tilde{u}, v - \tilde{u}\rangle \geq \langle f, v - \tilde{u}\rangle.$$

■

Remarque 6.5 *-Pour quelques applications des résultats obtenus dans ce chapitre, on peut reprendre les exemples du Chapitre 4.*

Bibliography

[1] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] R. Adams, On the Orlicz-Sobolev imbedding theorem, J. Func. Analysis, **24** (1977), 241-257.

[3] F. Andreu, J. M. Mazon, S. Segura De Leon, J. Toledo, Existence and uniqueness for a degenerate parabolic equation with L^1-data, Trans. Amer. Math. Society, **351** (1999), 285-306.

[4] A. Benkirane, Approximation de type Hedberg dans les espaces $W^m LlogL(\Omega)$ et applications, Ann. Faculté Sci. Toulouse **XI(2)** (1990) 67-78.

[5] A. Benkirane, J. Bennouna, Existence of entropy solutions of some nonlinear problems in Orlicz Spaces, Abstract and Applied Analysis. **7** (2002), 85-102.

[6] A. Benkirane, J.-P. Gossez, An approximation theorem for higher order Orlicz-Sobolev spaces, Studia Math. **92** (1989) 231-255.

[7] A. Benkirane, A. Elmahi, Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic equations in Orlicz spaces and application, Nonlinear Anal. T.M.A. **28** (11) (1997) 1769-1784.

[8] A. Benkirane, A. Elmahi, Strongly nonlinear elliptic unilateral problems having natural growth terms and L^1 data, Rend. Mat., **18** (1998), 289-303.

[9] A. Benkirane, A. Elmahi, An existence theorem for a strongly nonlinear elliptic problem in Orlicz spaces, Nonlinear Anal. T.M.A. **36** (1999) 11-24.

[10] A. Benkirane, A. Elmahi, A strongly nonlinear elliptic equation having natural growth terms and L^1 data, Nonlinear Anal. T.M.A. **39** (2000) 403-411.

[11] A. Benkirane, A. Elmahi, D. Meskine, On the limit of some nonlinear elliptic problems, to appear in Archives of Inequalities and Applications.

[12] A. Benkirane, A. Elmahi, D. Meskine, On the limit of some penalized problems involving increasing powers, to appear in Asymptotic Analysis.

[13] A. Benkirane, A. Elmahi, D. Meskine, An existence theorem for a class of elliptic problems in L^1, Applicationes Mathematicae, **29**, 4, (2002), pp. 439-457.

[14] A. Benkirane, A. Elmahi, D. Meskine, On the limit of some parabolic problems. Submitted.

[15] A. Elmahi, D. Meskine, Unilateral problem in L^1 with natural growth terms, to appear in Nonlinear and Convex Analysis.

[16] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution, Ann. Inst. Henri Poincaré, n. 4, **5** (1988), 347-364.

[17] P. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre and J. L. Vasquez, An L^1 theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1995), 240- 273.

[18] L. Boccardo, Some nonlinear Dirichlet problems in L^1 involving lower order terms in divergence form, Progress in elliptic and parabolic partial differential equations (Capri, 1994), Pitman Res. Notes Math. Ser., **350**, pp. 43-57, longman, Harlow, 1996.

[19] L. Boccardo, L'effet régularisant des termes d'ordre inférieur dans des problèmes de Dirichlet, Colloque international de Fès (1999).

[20] L. Boccardo, G. R. Cirmi, Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 data, Convex Anal. **6**, No 1 (1999), 195-206.

[21] L. Boccardo, T. Gallouët, Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, J. Funct. Anal., **87** (1989), 149- 169.

[22] L. Boccardo, T. Gallouët, Nonlinear elliptic equations with right hand side measures, Commun. in partial diff. equations, **17** (3& 4) (1992), 641-655.

[23] L. Boccardo, T. Gallouët, Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth and L^1 data., Nonlinear Anal. T.M.A., n.6, **19** (1992), 573-578.

[24] L. Boccardo, T. Gallouët, Problèmes unilatéraux in L^1, C. R. Acad. Sci. Paris, **311** (1990), 617-619.

[25] L. Boccardo, F. Murat, Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations, Nonlinear Anal. T.M.A., **92** (1992), 581-597.

[26] L. Boccardo, F. Murat, Increase of power leads to bilateral problems, in Composite Media and Homogenization Theory, G. Dal Maso and G. F. Dell'Antonio, eds., World Scientific, Singapore, 1995, pp. 113-123.

[27] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, A unifed presentation of two existence results of problems with natural growth, in Progress in PDE, the metz surveys 2, M. Chipot editor, Research in Mathematics, Longman, **296** (1993), 127-137.

[28] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, bf 13, n.5 (1996), 539-551.

[29] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations, Journal d'Analyse Math. **73** (1997), 203-223.

[30] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems, Annali. Mat. Pura Appl. **152** (1988), 183-196.

[31] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët, L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with measure data, Journ. of Functional Anal., **147** (1997), 273-258.

[32] L. Boccardo, I. Diaz, D. Giachetti, F. Murat, Existence of a solution for a weak form of a nonlinear elliptic equation, Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988), Pitman Res. Notes Math. Ser., 208, Longman (1989), 229-246.

[33] H. Brézis and W. Strauss, Semilinear elliptic equations in L^1, T. Math. Soc. Japan **25** (1973), 565-590.

[34] F. Browder, Strongly nonlinear parabolic equations of higher order, Atti Acc. Lincei, **77** (1986), 159-172.

[35] F. E. Browder, Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly nonlinear lower order terms, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S., **23** (1973), 269-286.

[36] A. Dall'aglio, L. Orsina, On the limit of some nonlinear elliptic equations involving increasing powers, in Asympt. Anal., **14** (1997), 49-71.

[37] A. Dall'Aglio, L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data, Nonlinear Anal. T.M.A., **27**, n.1 (1996), 59-73.

[38] T. Donaldson, N.S. Trudinger, Orlicz-Sobolev spaces and embedding theorem, J. Functional Analysis, **8** (1971), 52-75.

[39] J. -P. Gossez, Surjectivity results for pseudo-mapping in complementary systems, J. Math. Appl., **53** (1976), 484-494.

[40] J.-P. Gossez, Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients, Trans. Amer. Math. Soc. **190** (1974) 163-205.

[41] J.-P. Gossez, Some approximation properties in Orlicz-Sobolev spaces, Studia Math. **74** (1982) 17-24.

[42] J.-P. Gossez, A strongly nonlinear elliptic problem in Orlicz-Sobolev spaces, Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. **45** (1986) 455-462.

[43] J.-P. Gossez, V. Mustonen, Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces, Nonlinear Anal. T.M.A. **11** (1987) 379-392.

[44] P. Hess, A strongly nonlinear elliptic boundary value problem, J. Math. Anal. Appl., **43** (1973), 241-249.

[45] M. Krasnosel'skii, Ya. Rutickii, Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff Groningen, 1969.

[46] R. Landes, On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic initial-boundary value problems, Proc. Roy. Soc. Edinburg sect. A. **89** (1981), 217-137.

[47] R. Landes, V. Mustonen, On parabolic initial-boundary value problems with critical growth for the gradient, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, **11** (1994), 135-158.

[48] J. Leray, J. L. Lions, Quelques résultats de Visik sur les problèmes non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97-107

[49] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthiers-Villars (1969).

[50] C. Leone, A. Porretta, Entropy solutions for nonlinear elliptic equations in L^1, Nonlinear Anal. T.M.A. **32** (1998), 325-334.

[51] F. Murat, Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales, publication of C.N.R.S., Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (1993).

[52] A. Porretta, Some remarks on the regularity of solutions for a class of elliptic equations with measure data, Houston Journal of Math., **26** (1) (2000), 183-213.

[53] A. Porretta, Existence for elliptic equations in L^1 having lower order terms with natural growth, Portugaliae. Math., **57** (2000), 179-190.

[54] A. Porretta, Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations. Ann. Mat. Pura Appl., **CLXXVII** (1999), 143-172.

[55] A. Prignet, Existence and uniqueness of entropy solutions for parabolic problems with L^1-data, Nonlinear Anal. T.M.A., **28** (12) (1997), 1943-1954.

[56] J. Simon, Compact sets in $L^p(0, T, B)$, Ann. Mat. Pura Appl., **146** (4) (1987), 65-96.

[57] G. Stampacchia, Le problème de pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** n. 1 (1965), 189-258.

[58] J. Webb, Boundary value problems for strongly nonlinear elliptic equations, J. London Math. Soc., **21** (1980).