**Applied Sciences *** Monographs # 2**

Angela PĂSĂRESCU

# Nonstandard Algebraic Methodsin the Study of Analytic Spaces

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Nonstandard Algebraic Methods
in the Study of Analytic Spaces (Romanian)
Monographs # 2

Applied Sciences * Monographs


**Nonstandard Algebraic Methods**
**in the Study of Analytic Spaces (Romanian)**
Angela PĂSĂRESCU . - Bucharest:
Applied Sciences * Monographs, 2003

Includes bibliographical references.

# CUPRINS

# Bibliografie


[An] Th. ANGHELUŢĂ, Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.

[AC] C.A. CAZACU, Teoria funcţiilor de mai multe variabile complexe. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[ACJ] C.A. CAZACU, G. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU. Probleme moderne de teoria funcţiilor, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1965.

[AM] Analiză matematică II. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[Ba] S. BASARAB, Teorema lui Roth. Aspecte nonstandard. St. Cerc. Mat. Tom 35, Nr.2, p.105-113, Bucureşti, 1983.

[Bg] IP.v.d BERG, Nonstandard Asymtotic Analysis. vol. 1249 of LNM, Springer-Verlag, 1987.

[BSt] C. BĂNICĂ, O. STĂNĂŞILĂ, Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe. Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1974.

[BS] J.L. BELL, A.B. SLOMSON, Models and Ultraproducts: An Introduction. Amsterdam, North Holland, 1971.

[AM] N. CUTLAND, Nonstandard Analysis and its Applications. London Math. Soc. Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988.

[CK] C.C. CHANG, H.J. KEISLER, Model Theory, Studies in Logic and the foundations of mathematics. vol. 73, North Holland, 1990.

[Dv] M. DAVIS, Applied Nonstandard Analysis. Wiley, New York, 1977.

[DD] F. DIENER, M. DIENNER, Nonstandard Analysis in Practice. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[DR] F. DIENER, G. REEB, Analyse Nonstandard. Hermann, 1982.

[Fr] A. FRUCHARD, Complex analysis in Nonstandard Analysis in Practice, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[GR] R.C. GUNNING, H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables. Englewood Clifs, N.J: Prentice-Hall, 1965.

[HiM] J. HIRSCHFELD, M. MACHOVER, Lecture Notes on Non-Standard Analysis. L.N.M. 94, Springer Verlag, 1969.

[HeM] C.W. HENSON, L.C. MOORE, The nonstandard theory of topological vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 405-435.

[I1] C. IMPENS, Local Microcontinuity of nonstandard polynomials. Isr. J. Math. 59, nr.1, 81-97, 1987.

[I2] C. IMPENS, Propagation of microcontinuity for nonstandard polynomials. J. Anal. Math. vol. 53, 1989.

[I3] C. IMPENS, Real functions as traces of infinite polynomials. Math. Ann. 284, 63-73, 1989.

[I4] C. IMPENS, Standard and Nonstandard Polynomial Approximation. Journal of Math. Analysis and Applications, vol. 171, nr.2, 1992.

[Lu1] W.A.J. LUXEMBURG, What is Non-Standard Analysis. Amer. Math. Monthly, 80, 38-67

[Lu2] W.A.J. LUXEMBURG, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Holt, New York, 1969.

[Li] T. LINDSTRØM, An invitation to nonstandard analysis, in Nonstandard Analysis and its Applications. London Math. Soc. St. Texts,10, 1988.

[LG] R. LUTZ, M. GOZE, Non-Standard Analysis a practical guide with applications, L.N.M. 881. Springer, 1982.

[Na] R. NARASIMHAN, Analiză pe varietăţi reale şi complexe; Texte matematice esenţiale. Theta, Bucureşti, 2001.

[Ne] E. NELSON, Internal Set Theory. Bull. Amer. Math. Soc., 83, p.1165-1198, 1977.

[Ra] N. RADU, Inele locale, vol. I şi II. ED. Academiei RSR, Bucureşti, 1968.

[Ro1] A. ROBINSON, Nonstandard Analysis. Princeton University Press, 1996.

[Ro2] A. ROBINSON, "Germs", In Proc. of Internat. Sympos. on Applications of Model Theory to Algebra Analysis and Probability. Pasa. Calif. Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[R] P. ROQUETTE, Nonstandard aspects of Hilbertş irreducibility theorem; in Model Theory and Algebra Lecture Notes in Mathematics 498, Springer Verlag, 231-275, 1975.

[RR] A. ROBINSON, P. ROQUETTE, On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations. J. Number Theory 7, 121-176, 1975.

[Ru] S. RUDEANU, Elemente de teoria mulţimilor, Bucureşti, 1973.

[RZ] A. ROBINSON, E. ZAKON, A set theoretical characterization of enlargements; in [Lu2], 109-122, (1968).

[RW] W. RUDIN, Real and complex analysis. McGraw-Hill, New Delhi, 1974.

[St] S. STOILOW, Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, vol. I, II. Ed. Academiei RSR, 1954.

[SL] K.D. STROYAN, W.A.J. LUXEMBURG, Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press, 1976.

[SZ] P. SAMUEL, O. ZARISKI, Commutative Algebra, vol.1, 2. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1960.

[Vo] R.L. VAUGHT, Some aspects of the Theory of Models.

[PP] A. PĂSĂRESCU, O. PĂSĂRESCU, Study on formal convergent series with nonstandard methods. Analele Univ. Piteşti. Proceeding of Algebra nr.5, 2000.

# INTRODUCERE

Mărimile variabile tinzând spre zero (numite infinitezimale) au fost aşezate de Leibnitz la baza calcului diferenţial şi integral. Ulterior, Euler le-a numit "infiniţi mici" (tot el a numit "infiniţi mari" mărimile tinzând spre $\pm\infty$).

Timp de peste 200 de ani manualele de Analiză matematică au folosit aceşti termeni până ce Dirichlet, Weierstrass şi C. Jordan au impus limbajul $\varepsilon - \delta$ în fundamentarea conceptului modern de limită, considerat astăzi singurul riguros. A. Robinson are meritul de a fi pus bazele logice ale Calculului cu infinitezimale (privite ca elemente nonstandard, care merită dreptul la existenţă matematică deoarece nu implică nici o contradicţie). S-a ajuns astfel la crearea Analizei nonstandard, care a devenit un domeniu matematic de sine stătător, având probleme specifice, metode noi de investigaţie şi un câmp de aplicaţii în mare expansiune.

Lucrarea de faţă prezintă în Capitolul I câteva elemente privind evoluţia noţiunilor de bază ale Analizei nonstandard şi listarea câtorva clase de aplicaţii.

În Capitolul II sunt prezentate din Calculul Predicatelor noţiunile fundamentale şi din Teoria Modelelor suprastructurile şi conceptul de univers nonstandard, într-o formă inedită, care pregăteşte expunerea rezultatelor originale ale tezei.

Suprastructurile au fost introduse de Robinson şi Zakon în 1969, iar IST (Internal Set Theory) a fost creată de E. Nelson în 1977 [Ne], ca o extensie conservativă a sistemului Zermelo-Fraenkel plus Axioma Alegerii (ZFC).

În perioada 1980-1990 şcoala lui Reeb din Strasbourg a elaborat mai multe lucrări folosind IST şi dezvoltând cercetări semnificative în studiul ecuaţiilor diferenţiale şi sistemelor dinamice.

În Capitolul III sunt prezentate în limbaj IST $S$-proprietăţile, umbrele mulţimilor şi funcţiilor, $S$-diferenţiabilitatea, precum şi Principiile de Permanenţă Cauchy şi Fehrele.

Teoria nonstandard a funcţiilor complexe cuprinde studiul polinoamelor, lozalizării zerourilor de polinoame, studiul seriilor convergente şi al analiticităţii.

În ultimul timp studiul comportării locale a funcţiilor analitice interne are reflexe în cercetarea iteraţiilor (mulţimi Julia şi Mandelbrot) şi fractalilor.

În Capitolul IV prezentăm mai multe rezultate originale. Acest capitol este dedicat studiului prin metode nonstandard al corpurilor normate, nediscrete, complete, de caracteristică arbitrară, $K$.

După o prezentare a câtorva rezultate de bază privind studiul topologic metric al lui $K^n$, studiem seriile formale convergente peste $K$, generalizând de la $\mathbf{C}$ la $K^n$, prima parte a unei teoreme a lui Robinson-Callot ([Fr]), dedicată studiului din punct de vedere infinitezimal al funcţiilor olomorfe într-o variabilă. Metoda noastră foloseşte analiticitatea (în locul olomorfiei folosită în [Fr]).

În Capitolul V aplicăm noţiuni şi rezultate din Teoria modelelor în Algebră (mai exact în teoria inelelor de polinoame peste corpuri real închise) în demonstraţia unei extensii a teoremei zerourilor a lui Hilbert pentru corpuri real închise.

De asemenea aplicăm conceptele dezvoltate în secţiunile precedente şi în teoria germenilor de funcţii analitice. Astfel extindem teorema clasică a lui Ruckert [GR] de la $\mathbf{C}$ la extinderea $K \subset \tilde{K}$ (= completatul închiderii algebrice a lui $K$), unde $K$ este corp normat, nediscret, complet de caracteristică arbitrară.

Demonstraţia nonstandard a Teoremei lui Ruckert se bazează pe găsirea unui punct generic pentru un ideal şi foloseşte versiunile nonstandard ale Teoremelor de pregătire şi de împărţire ale lui Weierstrass. Metodele de demonstraţie, deşi inspirate din demonstraţia lui Robinson [Ro 2] includ importante clarificări şi adaptări la contextul considerat. Cele două rezultate nu erau cunoscute după ştiinţa nostră în literatură.

În Capitolul VI, vom da câteva aplicaţii în Geometrie a Analizei nonstandard, anume: în studiul Varietăţilor Gauss de dimensiune $m$ cu curbură continuă [SL], este exemplificată utilizarea infinitezimală din Analiza nonstandard la probleme de natură locală în care apar nu funcţii ci germeni de funcţii, prin introducerea triedrului lui Frenét nonstandard pentru curbe diferenţiale şi a curburii totale a unei suprafeţe.

Aduc pe această cale mulţumiri conducătorului meu de doctorat, d-lui Prof.Dr. Octavian Stănăşilă, pentru ajutorul dat în cadrul cercetărilor mele, pentru competenţa deosebită cu care m-a îndrumat, pentru încurajările şi îndemnul de a finaliza această teză.

Mulţumesc d-lui Cerc.Pr.I. Dr. Şerban Basarab şi d-lui Prof.Dr. George Georgescu, pentru discuţiile utile purtate cu dânşii asupra subiectului tezei şi pentru recomandările bibliografice.

De asemenea, doresc să exprim mulţumirile şi recunoştinţa mea Dr. Ovidiu Păsărescu pentru sprijinul moral acordat, pentru observaţiile, discuţiile şi clarificările aduse în elaborarea şi redactarea tezei.

# Capitolul I
# SURSE ŞI MOTIVAŢII PENTRU ANALIZA NONSTANDARD

Analiza nonstandard (sau infinitezimală) a fost inventată de Abraham Robinson în 1960, prin punerea la baza calculului infinitezimal a unei fundamentări logice. În cartea sa **Non-standard Analysis**, Proceedings of the Royal Academy Amsterdam, Ser.A 64, 1960, 432-440 (o carte cu acelaşi titlu există în colecţia "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", North Holland, Amsterdam, 1966), A. Robinson a arătat că atât conceptele cât şi metodele Logicii matematice sunt capabile să furnizeze un cadru adecvat pentru dezvoltarea Calculului Diferenţial şi Integral cu ajutorul infiniţilor mici şi a infiniţilor mari.

În 1960, logicianul american A. Robinson a arătat o modalitate prin care "infiniţii mici" şi "infiniţii mari" pot căpăta legitimitate, punând astfel bazele Analizei matematice nonstandard.

Ideea principală este următoarea: fie $K$ un corp comutativ total ordonat care conţine $\mathbf{R}$ (corpul numerelor reale). Pentru orice $u \in K$ se defineşte $|u| = \max(u, -u)$. Un exemplu este corpul $K = \mathbf{R}(X)$ al fracţiilor raţionale; el este total ordonat, considerând că o fracţie $\frac{P}{Q}$ (cât de polinoame din $\mathbf{R}[X]$, $Q \neq 0$) este pozitivă dacă polinoamele $P, Q$ au coeficienţii termenilor de grad maxim de acelaşi semn.

Un element $a \in K$ se numeşte *infinit mic* (respectiv *infinit mare*) dacă pentru orice $r > 0$ real, avem $|a| < r$ (respectiv ($|a| > r$). Elementele $b \in K$ astfel încât există $r > 0$ real cu $|b| < r$ se numesc *finite*. $O_{\mathbf{R}}$ este un infinit mic (singurul infinit mic care aparţine lui $\mathbf{R}$).

Deoarece $K$ nu este arhimedian, există $c \in K$ astfel încât pentru orice $n$ natural să avem $c \geq n$.

Acest $c$ este un infinit mare, iar $\frac{1}{c}$ un infinit mic. Două elemente $a, b \in K$ se numesc *echivalente* dacă $a - b$ este un infinit mic (se mai spune că $a$ este infinitezimal apropiat de $b$). Se poate arăta că pentru orice $a \in K$ finit există şi este unic un număr real $a$ infinitezimal apropiat de $a$. Robinson a arătat că există un corp $^*\mathbf{R}$, comutativ, total ordonat, conţinând strict $\mathbf{R}$ (aici $^*\mathbf{R}$ nu înseamnă $\mathbf{R} \setminus \{0\}$), minimal într-un anumit sens; elementele lui $^*\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}$ se numesc numere *nonstandard*.

Analiza nonstandard are o istorie sinuoasă. Ea îşi are rădăcinile în utilizarea infinitezimalelor de către Leibniz şi Newton în elaborarea Analizei matematice. Infinitezimalele sunt "numere" care sunt mai mici în valoare absolută decât orice număr real. Leibniz le-a privit ca nişte entităţi într-o anumită structură "ideală" care conţinea în plus numerele reale şi pe cele infinit mari. El a făcut în mod implicit, importanta dar vaga ipoteză că această structură satisface aceleaşi reguli ca sistemul uzual al numerelor reale.

Printre predecesorii de succes ai lui A. Robinson care au încercat să pună la baza Calculului Infinitezimal o fundamentare logică, au fost:

- *Geissler, K.,* (1904), Grundgedanken einer übereuklidischen Geometrie durch die Weitenbehaftungen des Unendlichen, Iahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung;

- *Hahn, H.,* (1907), Über die nichtarchimedische Groszensysteme, S.B. Wiener Akad. Math. Natur Kl. 116 (Abt. II-a) 601-655,

care a dat o interpretare consistentă infinitezimalelor în câmpuri nonarhimediene - cadrul natural al Analizei nonstandard,

-*Natorp, P.,* (1923), Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Wissenschaft und Hypothese 12, ed. 3-2, Leipzig-Berlin;

-*Artin şi Schreier*, care au dezvoltat teoria câmpurilor formal reale, care intervin ulterior în teoria câmpurilor hiperreale a lui

- *Hewitt, E.,* (1948), Rings of real-valued continuous functions I, Transactions of the American Mathematical Society, 64, p. 54-99, câmpuri care pot servi ca modele nonstandard ale Analizei (deci pot îndeplini rolul lui $^*\mathbf{R}$);

- *Laugwitz, D. şi Schmieden, C.,* (1958), Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung; Math. Z. 69, 1-39.

- *Laugwitz, D.,* (1961), Anwendungen unendlichkleiner Zahlen I, J. Reine Angew. Math. 207, 53-60 şi 208, p. 22-34.

Ultimii autori menţionaţi au studiat analiza infinitezimală în inele cu divizori ai lui zero şi consideră infiniţii mici sau mari ca funcţii.

În acest cadru se obţine chiar un substitut al teoriei distribuţiilor.

Dar cea mai puternică şi directă influenţă asupra lui Robinson, a avut-o construcţia aşa numitelor modele nonstandard ale Aritmeticii, datorate lui T. Skolem. (*Skolem, T.,* (1934), Über die nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreiche mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fund. Math. 33, 150-161).

Atât teoria cardinalelor cât şi teoria ordinalelor transfinite au avut o mare influenţă asupra Analizei nonstandard, care s-a exercitat indirect, prin aceea că teoria lui Cantor a constituit o bază pentru manipularea comodă a mulţimilor infinite (care intervin în Analiza nonstandard).

Teoria lui A. Robinson face apel la teoria tipurilor, mai puţin familiară majorităţii matematicienilor; de aceea s-a încercat elaborarea unor procedee mai accesibile pentru fundamentarea Analizei Matematice prin structurile ei ansambliste şi topologice, în spiritul ralaţiei de apartenenţă din teoria mulţimilor, şi mai puţin prin structurile ei logice. În acest sens poate fi amintită lucrarea:

*Machover, M., Hirschfeld, J.,* (1969), Lectures Notes on Non-Standard Analysis. LNM, 94, Springer Verlag, Berlin, 1969,
în care autorii au reuşit parţial să dea Analizei nonstandard o prezentare care permite matematicienilor nefamiliarizaţi cu logica matematică să asimileze faptele care stau la baza teoriei lui A. Robinson, într-un limbaj apropiat de teoria mulţimilor.

Menţionăm de asemenea, studiul:

*Zakon, E.,* (1974), A new variant of nonstandard analysis, p.313-339, cuprins în volumul colectiv editat de

*Hurd, A. şi Loeb, P.,* Victoria Symposium on Non-Standard Analysis, L.N.M., Springer Verlag, Berlin, 1974,
ca şi articolul pe care acesta îl continuă al lui A. Robinson şi Zakon "A set-theoretical characterization of enlargements", Proceedings of Pasadena Symposium, "Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability", editor A. Luxemburg, Holt Reinhart and Winston, New-York, 1969, p. 109-122; aici se dă o prezentare mai simplă a Analizei nonstandard, pe o cale diferită de a lui Machover şi Hirschfeld, în cadrul căreia extensiile se obţin prin consideraţii de teoria mulţimilor în dauna celor privind logicile de ordin superior, realizând astfel un progres în simplificarea şi clarificarea Analizei nonstandard.

O altă prezentare sistematică şi accesibilă a Analizei nonstandard este realizată de:

*Luxemburg, W.A.J.,* (1973), What is Non-Standard Analysis, Amer. Math. Monthly, 80, 38-67, care obţine extensii nu cu teorema de compacitate ci cu ajutorul ultraproduselor.

## Domenii de aplicare a Analizei nonstandard

Dăm o listă de domenii unde analiza nonstandard a permis extinderi semnificative şi metode noi de demonstraţie şi descoperiri.

a) **Analiza nonstandard** a constituit un câmp de aplicare a teoriei modelelor, legat de alte arii adiacente. Astfel, metodele nonstandard au fost aplicate în *Teoria algebrică a numerelor*, aşa cum se arată în lucrările următoare:

*Robinson, A., şi Roquette, P.,* (1975), On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations, J. Number Theory 7, 121-176.

*Roquette, P.,* (1975), Nonstandard aspects of Hilbert's irreducibility theorem; in Model Theory and Algebra Lecture Notes in Mathematics 498, Springer Verlag, 231-275.

*Van den Dries, L. and Schmidt* (1984), Bounds in the Theory of polinomial rings over fields: A nonstandard approach, Invent. Math. 76, 77-91.

*Van den Dries, L. and Wilkie, A.J.,* (1984), Gromov's Theorem on groups of polynomial growth and elementary logic, J. Algebra 89, 349-374.

De asemenea, în lucrarea

*Benninghofen B. şi Richter, M.M.,* (1988), A Lattice Formulation of Real and Vector Valued Integrals in Nonstandard Analysis and Its Applications, edited by Nigel Cutland,
aproximarea nonstandard este folosită pentru a construi un obiect "ideal", în acest caz o extensie a unui grup liber nilpotent, ca o acoperire nonstandard a grupului dat.

*Basarab, S.,* (1983), Teorema lui Roth: Aspecte nonstandard. St. Cerc. Mat., 35, Nr.2, pp.105-113, Bucureşti, 1983.

În această lucrare autorul dă o interpretare în termeni nonstandard a teoremei şi demonstraţiei teoremei lui Roth, teoremă ce face parte din clasa aşa numitelor rezultate de finitudine, respectiv de nonfinitudine ale geometriei diofantiene, alături de celebrele teoreme ale lui Siegel-Mahler, Mordell-Weil şi de teorema de ireductibilitate a lui Hilbert.

A. Robinson şi P. Roquette în [RR] şi [R] au întărit convingerea că acest tip de probleme pot fi abordate în mod natural şi unitar în cadrul aritmeticii nonstandard iniţiate de A. Robinson.

Deschizătoare de drumuri este în acest sens lucrarea lui Robinson şi Roquette [RR] asupra teoremei de finitudine a lui Siegel-Mahler.

Interesul unei astfel de interpretări se află în eleganţa unor formulări în termeni nonstandard cât şi în punerea în evidenţă şi în cazul teoremei lui Roth a unui fenomen frecvent în aritmetica nonstandard: apelul la două "enlargements" adică se consideră mai întâi un model saturat $^*\mathcal{M}$ al structurii $\mathcal{M}$ şi apoi un model saturat $^{**}\mathcal{M}$ al structurii $^*\mathcal{M}$. Cu alte cuvinte se consideră două lărgiri succesive în sensul lui Robinson ale structurii $\mathcal{M}$ : $\mathcal{M} \subset {^*\mathcal{M}} \subset {^{**}\mathcal{M}}$.

b) Metodele nonstandard sunt aplicate cu succes în

**Topologie** - Studii de topologie nonstandard găsim în lucrările:

*Stroyan, K.D. and Luxemburg, W.A.J.,* (1976), Introduction to the Theory of Infinitesimals, Academic Press, New York,

*Luxemburg, W.A.J.,* (1969), Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, Holt, New York,

*Machover, M. and Hirschfeld, J.,* (1969), Lectures on Nonstandard Analysis, LNM, 94, Springer-Verlag.

*Richter, M.M.,* (1982), Ideale Punckte. Monaden und Nichtstandard Methoden, Vieweg, Wiesbaden,

*Benninghofen, B.,* (1982), Nichstandardmethoden und Monaden Diplomarbeit, RWTH, Aachen.,

*Benninghofen, B. and Richter, M.M.,* General Theory of superinfinitesimals. Fund. Math., *Benninghofen, B., Stroyan, K.D. and Richter, M.M.,* (1988), Superinfinitesimals in topology and functional analysis. Proc. London. Math. Soc.

Există o strânsă legătură între ultraputeri şi convergenţa filtrelor, de exemplu în studiul lui

*Fenstad, J.E.,* (1967), A note on "standard" versus "nonstandard" topology. Indag. Math., 29, 378-380, sau

*Fenstad, J.E. and Nyberg, A.* (1970), Standard versus nonstandard methods in uniform topology, in Logic Colloquium 1969, North-Holland, Amsterdam, 353-359.

Câteva consecinţe interesante ale caracterizării nonstandard ale compacităţii sunt teoremele "almost implies near" ale lui:

*Luxemburg, W.A.J. and Taylor, R.F.,* (1970), Almost commuting matrices are near commuting matrices. Proc. Ray. Acad. Amsterdam, Ser. A 73, 96-98 şi

*Anderson, R.M.,* (1986), "Almost" implies "near". Trans. Amer. Math. Soc. 296, 229-237.

Lucrări nonstandard semnificative relativ la completare şi compactificare găsim în:

*Luxemburg, W.A.J.* (1969), op. cit.

*Machover, M., and Hirschfeld, J.,* (1969), op. cit.

*Wattenberg, F.,* (1971), Nonstandard Topology and extensions of monad systems to infinite points. J. Symbolic Logic 36, 463-576.

*Wattenberg, F.,* (1973), Monads of infinite points and finite product spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 176, 351-368.

*Gonshor, H.,* (1979), Enlargements contain various kinds of completions: in Hurd and Loeb (1974), 60-70.

*Dyre, J.C.,* (1982), Non-standard characterizations of ideals in $C(X)$, Math. Scand. 50, 44-54.

c) **Teoria spaţiilor Banach** este unul din cele mai active domenii ale Analizei nonstandard.

În acest sens, se remarcă lucrările lui

*Henson, C.W. and Moore, L.C.*, (1983), Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces; In Hurd (1983), 27-211,
care conţine o bibliografie bogată şi probleme deschise.

Prima problemă deschisă, standard, care a fost rezolvată prin tehnici nonstandard, a fost problema subspaţiilor invariante pentru operatori polinomiali compacţi.

Aproximarea spaţiilor infinit dimensionale prin unele de dimeniune hiperfinită, ocupă un loc special în istoria Analizei nonstandard, ca principală metodă în soluţia problemei subspaţiilor invariante pentru operatori compacţi a lui

*Bernstein, A. and Robinson, A.*, (1966), Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos, Pacific J. Math. 16, 421-341.

Aproximări hiperfinite ale spaţiilor infinite se găsesc în

*Davis, M.*, (1977), Applied Nonstandard Analysis, Wiley, New York.

d) **Teoria formelor pătratice hiperfinite** cu aplicaţii în procese difuze a fost dezvoltată de

*Albeverio, S., Fenstad, J.E., Høegh-Hrohn, R., and Lindstrøm, T.*, (1986), Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, Academic Press, New York.

*Lindstrøm, T.*, (1986), Nonstandard energy forms and diffusions on manifolds and fractals; in Stochastic processes in classical and quantum systems (Albeverio, S. et al., eds.) Springer-Verlag 363-380.

Există probleme interesante deschise privind proprietăţile spectrale ale acestor forme şi de asemenea privind relaţia lor cu spaţiile Loeb-Sobolev în

*Arkeryd, L.*, (1984), Loeb-Sobolev spaces with applications to variational integrals and differential equations. Preprint, Chalmers Inst. Tech., Gothenburg.

*Arkeryd, L. and Bergh. J.,* (1986). Some properties of Loeb-Sobolev spaces, J. London Math. Soc. 34, 317-334.

e) Un impact deosebit în **Teoria modernă a probabilităţilor** îl are conceptul de *măsură a lui Loeb*, care este o invenţie nonstandard relativ nouă, introdusă de *Loeb, P.A.*, în 1975, în lucrarea "Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory", Trans. Amer. math. Soc. 211, 113-122, folosind Teorema Extensiei a lui Caratheodory.

Unicitatea măsurilor Loeb infinite a fost demonstrată mai tărziu de

*Henson, C.W.,* (1979), Unbounded Loeb measures, Proc. Amer. Math. Soc. 74, 143-150.

Măsura lui Loeb se aplică într-o mare varietate de domenii.

Măsuri limită şi extensii de măsuri găsim în

*Loeb, P.A.* (1979), An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory; in Probabilistic Analysis and Related Topics II, Academic Press, New York, 105-142.

*Loeb, P.A.,* (1979), Weak limits of measures and the standard part map, Proc. Amer. Math. Soc. 77, pp. 128-135

*Anderson, R.M. and Rashid, S.,* (1978), A Nonstandard characterization of weak convergence, Proc. Amer. Math. Soc. 69, 327-332.

*Lindstrøm, T.,* (1982), A Loeb measure approach to theorems by Prohorov, Sazonov and Gross, Trans. Amer. Math. Soc. 269, 521-534.

f) Un alt domeniu de aplicabilitate îl constituie **mecanica statistică, teoria măsurii** şi în ultimul timp **teoria câmpurilor cuantice**. În acest sens, menţionăm lucrările:

*Hurd, A.E.,* (1981), Nonstandard analysis and lattice statistical mechanics: A variational principle, Trans. Amer. Math. Soc. 263, 89-110.

*Helms, L.L. and Loeb, P.A.,* (1979), Applications of nonstandard analysis to spin models, J. Math. Anal. Appl. 69, 341-352.

*Kessler, C.,* (1984), Nonstandard methods in random fields, Dissertation, Bochum.

Remarcanile sunt lucrările lui *Arkeryd, L.* asupra ecuaţiei Boltzmann.

*Arkeryd, L.,* (1981 a)), A nonstandard approach to the Boltzmann equation. Arch. Rational Mech. Anal. 77, 1-10.

*Arkeryd, L.,* (1981 b)), Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation, Arch. Rational Mech. Anal. 77, 11-23.

*Arkeryd, L.,* (1981 c)) A time-wise approximated Boltzmann equation, IMA. J. Appl. Math. 27, 373-383.

*Arkeryd, L.,* (1982) A symptotic behaviour of the Boltzmann equation with infinite range forces, Comm. Math. Phys. 86, 475-484.

*Arkeryd, L.,* (1984) Loeb solutions of the Boltzmann equation, Arch. Rational Mech. Anal. 86, 85-97.

Rezultate recente ale lui Arkeryd asupra ecuaţiilor Boltzmann au dus la un interes deosebit asupra spaţiilor Loeb-Sobolev în

*Arkeryd, L.,* (1984 b)) Loeb-Sobolev spaces with applications to variational integrals and differential equations. Preprint, Chalmes Inst. Tech., Gothemburg.

*Arkeryd, L.,* (1986) On the Boltzmann equation in unbounded space far from equilibrium and the limit of zero mean free path, Commum. Math. Phys. 105, 205-219.

În aceste lucrări ale lui Arkeryd, Un model nonstandard al spaţiului şi timpului furnizează cadrul pentru existenţa a noi rezultate pentru această ecuaţie faimoasă.

Alte domenii care merită o deosebită atenţie sunt **teoria ergodică** şi **transformările măsurabile**. Se remarcă lucrări interesante ale lui:

*Henson, C.W.,* (1972), On the nonstandard representation of measures. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 437-446.

*Kamae, T.,* (1982), A simple proof of the ergodic theorem using nonstandard analysis, Israel J. Math. 42, 284-290.

*Ross, D.,* (1983), Measurable transformataions in saturated models of analysis. Ph. D. Thesis. Madison.

La baza acestor aplicaţii stă o metodă pentru reprezentarea măsurilor pe spaţii topologice ca inversele părţilor standard ale măsurilor Loeb:

*Landers, D. and Rogge, L.,* (1987), Universal Loeb measurability of sets and of the standard part map with applications. Trans. Amer. Math. Soc. 304, 229-243.

Măsura Loeb este folosită şi în **teoria modelelor**.

*Keisler, H.J.,* (1987), Measures and forking. Ann. Pure Appl. Logic 34, 119-170.

*Stroyan, K.D. and Bayod, J.M.* (1986), Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis, North-Holland Amsterdam,
au combinat teoria lui Keisler cu rezultatele lui Henson din teoria nonstandard descriptivă a mulţimilor şi au creat o "şcoală Strasbourg" care se ocupă cu **analiză stochastică nonstandard**.

Această lucrare conţine rezultate nonstandard cu aplicaţii în **Teoria măsurii**. În **teoria câmpurilor cuantice** se remarcă lucrările:

*Albeverio, S., Fenstad, J.E., Høegh-Kron, R. şi Lindstrøm, T.,* (1986), Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, Academic Press, New-York,
unde se dă o tratare extensivă a aplicaţiilor în teoria **probabilităţilor** şi **fizică matematică**.

În această lucrare se găseşte o aproximare nonstandard a proceselor Markov, o teorie hiperfinită a formelor Dirichlet şi proceselor Markov staţionare cu aplicaţii în mecanica cuantică şi

*Lindstrøm* (1986), op. cit. la difuzii pe varietăţi şi fractali.

g) **Aplicaţii geometrice**

Difuziile pe varietăţi constituie un subiect care a atras atenţia probabiliştilor nonstandard.

În lucrarea:

*Stroyan, K.D.,* (1977), Infinitesimals analysis of curves and surfaces: in Handbook of Mathematical Logic (K.J. Barwise ed. ...) North Holland, Amsterdam, 197-231,

găsim o prezentare elementară a modului cum conceptele geometriei diferenţiale pot fi formulate în termeni nonstandard.

Există de asemenea o serie de lucrări care se ocupă cu studiul **controlului optimal**.

*Cutland, N.J.* (1986), Infinitesimal methods in control theory: Deterministic and stochastic, Acta Appl. Math. 5, 105-136.

*Cutland, N.J.* (1983), Optimal control for partially observed stochastic system: an infinitesimal approach, Stochastic 8, 239-257.

Una dintre cele mai importante contribuţii la teoria nonstandard a probabilităţilor este lucrarea lui Perkins asupra timpului local Brownian, cu aplicaţii:

*Perkins, E.,* (1981), A global intrinsec characterization of local time, Ann. Prob. 9, 800-817.

Un câmp larg de aplicaţii geometrice îl constituie cel al deformărilor infinitezimale de structuri, care a condus la conceptul de *varietate diferenţială nonstandard.*

h) O altă categorie de aplicaţii, oarecum neaşteptate, ale metodelor analizei nonstandard o constituie cele din **domeniul economico-financiar**.

Astfel, în **teoria schimbului** se menţionează:

*Hoover, D.N.,* (1982), Row-columm exchangeability and a generalized model for probability; in G. Koch and F. Spizzichino, (eds).

Exchangeability in Probability and Statistic, North Holland, Amsterdam, 281-291.

Una dintre aplicaţiile mulţimilor hiperfinite este în **economia matematică** şi teoria **schimburilor economice**.

Folosind o mulţime hiperfinită de consumatori, este posibil a combina atât proprietăţile combinatoriale necesare, cât şi informarea relevantă asimptotică în aceeaşi structură. În acest domeniu se remarcă lucrările:

*Brown, D.J. and Robinson, A.,* (1974), Nonstandard exchange economics, Econometrica 43, 41-55.

*Brown, D.J. and Robinson, A.,* (1974), The cores of large standard exchange economies. J. Economic. Theory 9, 245-254.

*Brown, D.J.,* (1976), Existence of a competitive equilibrium in a nonstandard exchange economy, Econometrica 44, 537-546.

*Anderson, R.M.,* (1985), Strong Core Theorems with nonconvex preferences, Econometrica 53, 1283-1294.

În **matematica financiară** se remarcă:

*Aumann, R.,* (1964), Markets with a continuum of traders, Econometrica 32 (1964), 39-50 - care a introdus în economia matematică spaţiile măsurabile *nonatomice* ca *modele* pentru mulţimea agenţilor din "economiile mari", la fel cum spaţiile măsurabile se folosesc să modeleze sisteme mari discrete în fizica matematică.

Analiza nonstandard furnizează modele matematice noi pentru descrierea unor fenomene fizice; de exemplu, colecţii mari *finite* de particule sunt mai bine modelate printr-o mulţime hiperfinită (adică o mulţime infinită care este finită din punctul nonstandard de vedere) decât prin continuumul uzual.

Cităm în acest sens lucrarea lui - *Albeverio, S.,* (1988), Applications of Nonstandard Analysis in Mathematical Physics.

# Capitolul II
# SUPRASTRUCTURI, UNIVERS NONSTANDARD ŞI IST

În acest capitol, introducem pe scurt modelele de Analiză nonstandard cel mai des utilizate, anume: construcţia din Teoria Modelelor bazată pe suprastructuri (a lui Robinson) şi cea axiomatică IST (Internal Set Theory) a lui E. Nelson.

Menţionăm că cele două abordări modelează un acelaşi fenomen şi poate fi folosită în funcţie de interesul problemei studiate oricare dintre ele, de la caz la caz.

## §1. Elemente de calculul predicatelor şi Teoria modelelor

În acest paragraf vom prezenta câteva noţiuni fundamentale din Teoria Modelelor şi Calculul Predicatelor utilizate în continuare.

Detalii pot fi găsite în J. Keisler [CK], Bell şi Slomson [BS].

### 1.1 Structuri relaţionale

O *structură relaţională* $\mathcal{A}$ este o pereche ordonată $(A, (R_i)_{i\in I})$ unde $A$ este o mulţime şi $I$ este o mulţime arbitrară de indici, astfel încât pentru fiecare $i \in I$, $R_i$ este o relaţie $n_i$-ară pe $A$, adică $R_i \subseteq A^{n_i}$.

Tipul lui $\mathcal{A} = ((A, (R_i)_{i \in I})$ este şirul $(n_i)_{i \in I}$, $n_i \in \mathbf{N}$. De remarcat că această definiţie include structurile algebrice cum ar fi grupurile, inelele şi corpurile, deoarece o operaţie $n$-ară pe o mulţime $A$ poate fi identificată cu o relaţie $(n+1)$-ară pe $A$.

Fie $\mathcal{A} = ((A, (R_i)_{i \in I})$ şi $\mathcal{B} = ((A, (S_i)_{i \in I})$ două structuri relaţionale de acelaşi tip $(n_i)_{i \in I}$.

Spunem că $\mathcal{A}$ este o *substructură* a lui $\mathcal{B}$ şi notăm $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, dacă $A \subseteq B$ şi pentru orice $i \in I$ avem $R_i = S_i \cap A^{n_i}$.

Un *morfism* $h$ de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$ este o funcţie $h : A \to B$ care respectă relaţiile lui $A$ adică dacă pentru $a_1, \ldots a_{n_i} \in A$, dacă $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i$, atunci $(h(a_1), \ldots, h(a_{n_i}) \in S_i$. Un astfel de morfism este o *scufundare* dacă este injectiv şi pentru $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A$, $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i$ dacă şi numai dacă $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in S_i$.

Un *izomorfism* este o scufundare surjectivă. Dacă $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un izomorfism, atunci spunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt izomorfe şi scriem $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Considerăm un limbaj $L$ al calculului Predicatelor corespunzător tipului lui $\mathcal{A}$, adică mulţimea $\{P_i | i \in I\}$ a literelor predicate şi mulţimea $\{R_i | i \in I\}$ sunt în corespondenţă, în sensul că dacă $i \in I$, atunci $P_i$ este un predicat $n_i$-ar, adică $P_i$ este numele pentru relaţia $R_i$ de pe $A$.

Dacă $\sigma$ este o propoziţie a lui $L$ care este adevărată pe $A$, spunem că $A$ *modelează* $\sigma$ şi scriem $A \models \sigma$.

Dacă $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ este o formulă a lui $L$ astfel încât variabilele libere ale lui $\phi$ sunt printre $v_0, \ldots v_n$, atunci definim o relaţie $n$-ară $R_\phi \subseteq A^n$ prin: $R_\phi(a_0, \ldots, a_n)$ dacă şi numai dacă $v_0 \ldots v_n$ sunt interpretate ca $a_0, \ldots, a_n \in A$, respectiv, in $\phi$, şi dacă predicatele lui $\phi$ sunt interpretate ca relaţiile lor corespunzătoare, atunci rezultatul obţinut este adevărat în $A$.

Fie $a_0, \ldots, a_n \in A$. Atunci dacă $R_\phi(a_0, \ldots, a_n)$ are loc în $A$ scriem $A \models$

$\phi(a_0, \ldots, a_n)$.

Fie $\mathcal{H}$ o clasă de structuri relaţionale. Vom spune că mulţimea tuturor propoziţiilor $\sigma$ ale lui $L$ astfel încât $A \in \mathcal{H}$ implică $A \models \sigma$, este *teoria lui* $\mathcal{H}$ şi notăm $Th(\mathcal{H})$.

Dacă $A$ şi $B$ sunt structuri relaţionale, atunci ele sunt *elementar echivalente* dacă au aceeaşi teorie adică $Th(A) = Th(B)$.

O *scufundare* $h$ a lui $A$ în $B$, este *elementară* dacă pentru orice formula $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ a lui $L$ şi orice $a_0, \ldots, a_n \in A$, $A \models \phi(a_0, \ldots, a_n)$ dacă şi numai dacă $B \models \phi(h(a_0), \ldots, h(a_n))$.

$\mathcal{A}$ este o *substructură elementară* a lui $\mathcal{B}$, dacă $A \leq B$ şi incluziunea lui $A$ în $B$ este o extensie elementară a lui $A$. Dacă $A \leq B$ este o scufundare care este extensia elementară, scriem $A \leq_e B$.

Orice izomorfism este o scufundare elementară.

## 1.2. Consistenţă; Teorema de compacitate a Calculului Predicatelor

Fie $\Sigma$ o mulţime de propoziţii ale limbajului $L$. Spunem că $\Sigma$ *este consistentă* dacă are un model, adică dacă pentru o anumită structură relaţională $A$, $\Sigma \subseteq Th(A)$. Vom scrie $A \models \Sigma$, *dacă* $A$ *este un model al lui* $\Sigma$. (De notat că $A \models \{\sigma\}$ dacă $A \models \sigma$). Clasa tuturor modelelor lui $\Sigma$, $Mod\,(\Sigma)$ este clasa model a lui $\Sigma$.

Dacă $\sigma$ este o formulă astfel încât orice model al lui $\Sigma$ este un model al lui $\sigma$, atunci vom scrie $\Sigma \models \sigma$, şi se citeşte "$\sigma$ este o consecinţă a lui $\Sigma$". Deci $\Sigma \models \sigma$ dacă şi numai dacă $\sigma \in Th(Mod\,(\Sigma))$. Evident, aplicaţia $\Sigma \to \Sigma^- = Th(Mod\,(\Sigma))$ este un operator de închidere pe mulţimea propoziţiilor lui $L$. Adică $\Sigma \subset \Sigma^-$, $\Sigma^{--} = \Sigma^-$ şi în cazul $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ atunci $\Sigma_1^- \subset \Sigma_2^-$.

Dacă $\Sigma_0 = \emptyset$, atunci $\Sigma_0^-$ este mulţimea tuturor predicatelor tautologii şi $Mod\,(\Sigma_0)$ este clasa tuturor structurilor relaţionale de tip $(n_i)_{i \in I}$.

Dacă $\Sigma$ este inconsistentă, atunci $Mod(\Sigma) = \emptyset$ şi $\Sigma^- = L$.

Una din cele mai importante teoreme a Teoriei Modelelor este:

**1.2.1. Teorema de compacitate**. *O mulţime $\Sigma$ de propoziţii are un model dacă orice submulţime finită a lui $\Sigma$ are un model.*

Clasic, Teorema de compacitate a fost enunţată şi demonstrată în forma: "$\Sigma$ este *consistentă* dacă orice submulţime finită a lui $\Sigma$ este consistentă" unde este folosită o noţiune echivalentă de consistenţă adică: $\Sigma$ este consistentă dacă nu derivă nici o contradicţie din $\Sigma$.

O demonstraţie mai algebrică este obţinută prin construcţia unui ultrafiltru convenabil $\mathcal{U}$ pe mulţimea submulţimilor finite $F$ ale lui $\Sigma$, fiecare din ele având un model $A_F$.

Modelul dorit al lui $\Sigma$ este atunci ultraprodusul $\pi_{F \in I} A_{F/\mathcal{U}}$, unde $I = \{F \subset \Sigma | F \text{ este finită }\}$.

Consecinţe importante ale Teoremei de Compacitate sunt *Teorema de Finitudine* şi *Teorema Deducţiei* din Calculul Predicatelor.

**1.2.2. Teorema de Finitudine**. *Fie $\Sigma$ o mulţime de propoziţii şi fie $\sigma$ o propoziţie. Atunci $\Sigma \models \sigma$ dacă şi numai dacă $\Sigma_0 \models \sigma$ pentru o anumită submulţime finită $\Sigma_0 \subset \Sigma$.*

**Demonstraţie**. Dacă $\Sigma$ este inconsistentă, atunci teorema de compacitate furnizează o submulţime finită inconsistentă $\Sigma_0$ a lui $\Sigma$, astfel încât $\Sigma_0^- = L = \Sigma^-$, aşa că $\Sigma \models \sigma$ şi $\Sigma_0 \models \sigma$.

Presupunem că $\Sigma$ este consistentă. Atunci este evident că pentru o anumită submulţime finită $\Sigma_0$ a lui $\Sigma$ avem că dacă $\Sigma_0 \models \sigma$ atunci $\Sigma \models \sigma$ deoarece, în caz contrar un anumit model $A$ al lui $\Sigma$ nu modelează $\sigma$ dar modelează $\Sigma_0$, contradicţie.

Presupunem acum că din nici o submulţime finită a lui $\Sigma$ nu rezultă $\sigma$ ca o consecinţă, şi fie $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\neg\sigma\}$. Fie $\Sigma_0^*$ o submulţime finită a lui $\Sigma^*$ şi fie $\Sigma_0 = \Sigma_0^* \setminus \{\neg\sigma\}$.

Atunci $\Sigma_0$ este o submulţime finită a lui $\Sigma$ şi ea are un model $A$, care modelează de asemenea pe $\neg\sigma$, deoarece din ipoteză $\Sigma_0 \not\models \sigma$. Deci $A$ modelează pe $\Sigma_0^*$ şi astfel am arătat că orice submulţime finită a lui $\Sigma^*$ are un model.

Teorema de compacitate furnizează un model al lui $\Sigma^*$ care, deoarece $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\neg\sigma\}$, modelează atât $\Sigma$ cât şi $\neg\sigma$. Astfel $\Sigma \not\models \sigma$.

**1.2.3. Teorema Deducţiei**. *Fie $\Sigma$ o mulţime de propoziţii şi $\psi$ şi $\sigma$ formule astfel încât $\Sigma \cup \{\psi\} \models \sigma$. Atunci $\Sigma \models (\psi \to \sigma)$.*

**Demonstraţie**. Fie $A$ un model al lui $\Sigma \cup \{\psi\}$. Deoarece $\Sigma \cup \{\psi\} = \sigma$, atunci $A \models \sigma$. Astfel $A \models \{\psi \to \sigma\}$. Astfel am arătat că orice model al lui $\Sigma$ modelează pe $\psi \to \sigma$, deci $\Sigma \models (\psi \to \sigma)$.

## 1.3. Extinderea limbajului prin constante

Fie $(A, (R_i)_{i\in I})$ o structură relaţională de tip $(n_i)_{i\in I}$, şi $L$ un limbaj adecvat acestui tip. Fie $C$ o mulţime de simboluri care este disjunctă de simbolurile lui $L$ şi de mulţimea $A$.

Fie $L_C$ limbajul obţinut prin mărirea (lărgirea) lui $L$ cu $C$ ca o mulţime de simboluri constante. Dacă $b \to c_b$ este o aplicaţie injectivă de la o submulţime $B$ a lui $A$ în $C$, atunci membrii lui $\{c_b | b \in B\}$ reprezintă pe aceia din $B$, în următorul sens: *O propoziţie a lui $L_C$ se referă la $b \in B$ exact dacă $c_b$ apare în acea propoziţie.*

*Exemplu.* Dacă $\mathbf{Z}$ reprezintă întregii cu adunare $a$ şi $c_0$ este constanta pentru 0 în $L_C$, atunci propoziţia $(\forall x)(c_0 + x = x)$ este o afirmaţie că 0 este elementul unitate pentru adunarea din $\mathbf{Z}$. Astfel de afirmaţii despre membrii lui $A$ pot fi false, totuşi. De exemplu în $\mathbf{Z}$, dacă $c_1$ şi $c_2$ reprezintă 1 şi 2 respectiv, atunci atât $c_0 + c_1 = c_1$ cât şi $c_1 + c_2 = c_2$ sunt propoziţii ale lui $L_C$ deşi $\mathbf{Z} \models (c_0 + c_1 = c_1)$ şi $\mathbf{Z} \not\models (c_1 + c_2 = c_2)$. În cazul în care toţi membrii lui $A$ sunt reprezentaţi în $\mathbf{C}$ şi $a \to c_a$ este bijectivă, vom scrie $L_A$ pentru $L_C$.

Dacă $\Sigma$ este o mulţime de propoziţii, $\phi(v)$ este o formulă, şi $\psi$ este o propoziţie a lui $L_A$ astfel încât $v$ este singura varaibilă liberă a lui $\phi(v)$, şi dacă $c$ este o constantă simbol a lui $L_A$ care nu apare în $\Sigma$ sau $\psi$, atunci:

$$\Sigma \models \phi(c) \to \psi \quad \text{implică} \quad \Sigma \models (\exists v)\phi(v) \to \psi,$$

$$\Sigma \models \psi \to \phi(c) \quad \text{implică} \quad \Sigma \models \psi \to (\forall v)\phi(v).$$

Într-adevăr, presupunem că $\Sigma \models (\exists v)\phi(v) \to \psi$ este falsă, şi fie $A \in Mod(\Sigma)$ astfel încât $A \not\models (\exists v)\phi(v) \to \psi$, adică $A \models (\exists v)\phi(v)$ şi $A \models \neg\psi$.

Fie $a \in A$ cu constanta corespunzătoare $c'$ astfel încât $A \models \phi(c')$. Atunci $A \models \phi(c') \wedge \neg\psi$, adică $A \not\models \phi(c') \to \psi$ şi deci $(\phi(c') \to \psi) \in Th(Mod(\Sigma))$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \models \phi(c') \to \psi$ este falsă. Deoarece $c$ nu apare în $\Sigma$ sau $\psi$, atunci substituţia lui $c$ pentru $c'$ implică faptul că $\Sigma \models \phi(c) \to \psi$ este falsă. Astfel prima afirmaţie este adevărată.

Presupunem acum că $\Sigma \models \psi \to (\forall v)\phi(v)$ este falsă şi fie $A \in Mod(\Sigma)$ cu $A \models \psi$ şi $A \models \neg(\forall v)\phi(v)$.

Fie $a \in A$ şi constanta simbol $c'$ astfel încât $A \models \neg\phi(c')$. Atunci $A \not\models \psi \to \phi(c')$, şi ca mai sus $\Sigma \models \psi \to \phi(c)$ este falsă.

În continuare vom face legătura între Teoria Modelelor clasică şi Analiza Nonstandard a lui A. Robinson, prezentând mai întâi abordarea cu suprastructuri şi apoi abordarea IST.

Ideea intuitivă care stă la baza tuturor abordărilor este de a începe cu universul teoretic al multimilor $(V, \in)$ şi formarea unei extensii elementare $(W, \in)$ în care să fie lărgite toate mulţimile infinite.

Suprastructurile şi IST se ocupă de această problemă în moduri diferite.

Abordările cu Suprastructuri şi IST sunt echivalente (o *-Teoremă este echivalentă cu $S$-Teoremă), argumentele dintr-un sistem putând fi sistematic translatate în celălalt sistem.

# §2. Suprastructuri

O *suprastructură* este o colecţie de obiecte matematice $\hat{S}$ care conţine acele obiecte pe care vrem să le studiem. $\hat{S}$ constă dintr-o mulţime de bază $S$ ale cărei elemente se numesc *indivizi* sau *urelemente*, împreună cu toate mulţimile care pot fi obţinute din $S$ printr-un număr finit de iterări ale operatorului $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}(A)$ = mulţimea părţilor lui $A$).

$S$ poate fi mulţimea punctelor unui spaţiu topologic, mulţimea numerelor naturale reale. Membrii lui $S$ nu sunt mulţimi sau echivalent dacă $x \in S \Rightarrow x \neq \emptyset$ şi $x$ nu are membri (i.e. în limbajul $L = (\equiv, \in)$ nu se consideră definită apartenenţa $t \in x$ dacă $x \in S$).

În continuare vom arăta cum realizăm o structură în care să avem toate mulţimile (inclusiv relaţiile, funcţiile) necesare în construcţiile matematice uzuale ce implică elemente ale lui $S$.

Definim

$$S_0 = S$$
$$S_{i+1} = S_i \cup \mathcal{P}(S_i), \quad i \geq 0$$
$$\hat{S} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i$$

$\hat{S}$ se numeşte *suprastructură cu indivizii lui* $S$ (sau de bază $S$). Un element al lui $\hat{S}$ se numeşte *entitate*. Se observă că $\emptyset \subseteq S$ deci $\emptyset \in S_1$.

**Definiţia 2.1.** Fie $A \subseteq \hat{S}$. $A$ se numeşte *tranzitivă* în $\hat{S}$ dacă pentru orice $x \in A$ are loc sau $x \in S$ sau $x \subseteq A$ (echivalent $x \in A - S$ şi $y \in x \Rightarrow y \in A$).

Vom conveni să folosim definiţia unei perechi ordonate datorată lui Kuratowski, adică

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Astfel, pentru $a, b \in S_0$, avem $(a, b) \subseteq S_1$ deci

$$(a, b) \in \mathcal{P}(S_1) \subseteq S_2.$$

De asemenea $S_0 \times S_0 \subseteq S_2$ şi în cazul $S_0 = \mathbf{R}$, dacă $f$ este o funcţie de o variabila reală cu valori reale, atunci $f \in S_3$, deoarece $f \in \mathcal{P}(S_0 \times S_0) \subseteq \mathcal{P}(S_2) \subseteq S_3$.

Deoarece construcţia lui $S_k$ este cumulativă, pentru $k \geq 1$, atunci orice număr real $t$ este inclus în $S_3$.

Astfel, relaţia "funcţia $f$ este continuă în numărul real $t$" este o relaţie între membrii $f$ şi $t$ ai lui $S_3$ care este o submulţime a lui $S_3 \times S_3$, deci un membru al lui $S_6$.

**Definiţia 2.2.** Se numeşte *rangul* unei entităţi $s$ în $S$ numărul natural $k \geq 1$ pentru care $s \in S_k \setminus S_{k-1}$, sau zero dacă $s$ este individ.

## 2.3. Proprietăţi ale suprastructurilor

Următoarele proprietăţi ale suprastructurilor sunt demonstrate în [Dv].

**Lema 2.3.1.** Fiecare $S_i$ este tranzitivă în $\hat{S}$.

**Lema 2.3.2.** Dacă $x \in y$ şi $y \in S_i \setminus S$ atunci $x \in S_{i-1}$.

**Lema 2.3.3.** Dacă $x \in S_i \setminus S$, atunci $\mathcal{P}(x) \in S_{i+2}$.

**Lema 2.3.4.** $\hat{S}$ este tranzitivă în $\hat{S}$.

**Lema 2.3.5.** Dacă $x \in \hat{S} \setminus S$, atunci $\mathcal{P}(x) \in \hat{S}$.

**Lema 2.3.6.** Dacă $y \subseteq x$ şi $x \in \hat{S} \setminus S$, atunci $y \in \hat{S}$.

**Lema 2.3.7.** Fie $x \in S_i \setminus S$ şi $x \cap S = \emptyset$.

Fie $y \in \bigcup\limits_{z \in x} z$. Atunci $y \in S_i$.

**Lema 2.3.8.** Fie $x \in \hat{S} \setminus S$ şi $x \cap S = \emptyset$. Fie $y \in Ux$. Atunci $y \in \hat{S}$.

**Lema 2.3.9.** $S_i \in S_{i+1}$. Prin urmare $S_i \in \hat{S}$, $(\forall) i \in \mathbf{N}$.

**Lema 2.3.10.** Dacă $a_1, \ldots, a_k \in S_i$, atunci $\{a_1, \ldots, a_k\} \in S_{i+1}$.

**Lema 2.3.11.** Dacă $a_1, \ldots, a_k \in \hat{S}$, atunci $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \hat{S}$.

**Lema 2.3.12.** Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \hat{S} \setminus S$. Atunci $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_k \in \hat{S}$.

**Lema 2.3.13.** Dacă $x, y \in S$, atunci $(x, y) \in S_{i+2}$.

**Lema 2.3.14.** Dacă $x_1 \ldots x_n \in S_i$, $n \geq 2$, atunci $(x_1 \ldots x_n) \in S_{i+2n-2}$

**Teorema 2.4.** *Dacă* $X, Y \in \hat{S} \setminus S$ *atunci* $X \times Y \in \hat{S}$. *Mai mult dacă* $X, Y \in S_i \setminus S$ *atunci* $X \times Y \in S_{i+3}$. *De asemenea* $X^n \in \hat{S}$ *pentru orice* $n \in \boldsymbol{N}$.

**Teorema 2.5.** *Dacă* $X, Y \in \hat{S} \setminus S$ *şi* $f : X \to Y$ *atunci*

1) $f \in \hat{S}$;

2) *Dacă* $a \in X$, *atunci* $f(a) \in \hat{S}$;

3) *Dacă* $A \subseteq X$ *atunci* $f[A] \in \hat{S}$.

**Teorema 2.6.** *Fie* $J, V \in \hat{S} \setminus S$ *şi pentru orice* $j \in J$, *fie* $X_j \in V$. *Atunci:*

1) $\bigcup\limits_{j \in J} X_j \in \hat{S}$;

2) $\prod\limits_{j \in J} X_j \in \hat{S}$.

Fie $r, s \in \hat{S}$. Dacă există un unic $t \in \hat{S}$ astfel încât $(s, t) \in r$, scriem $r \top s = t$; În caz contrar $r \top s = \emptyset$. Operaţia posedă următoarele proprietăţi:

1) dacă $r$ este o funcţie şi $s \in dom\,(r)$, atunci $r \top s = r(s)$;

2) $r \top s \in \hat{S}$ pentru orice $r, s \in \hat{S}$.

# §3. Universuri

## 3.1. Universul standard

Fie $S$ o mulţime de indivizi şi $\hat{S} = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} S_i$ suprastructură.

**Definiţia 3.1.1.** O submulţime $U$ a lui $\hat{S}$ se numeşte *univers cu indivizii lui* $S$ dacă:

1) $\emptyset \in U$

2) $S \subseteq U$

3) dacă $x, y \in U$ atunci $\{x, y\} \in U$.

4) $U$ este tranzitivă în $\hat{S}$.

**Corolar 3.1.2.** $\hat{S}$ este univers cu indivizii lui $S$. $\hat{S}$ se numeşte *universul standard* (cu indivizii lui $S$).

*Observaţie.* Un univers satisface automat proprietatea de închidere.

**Teorema 3.1.3.** Dacă $r, s \in U$, atunci $(r, s) \in U$ şi $r \top s \in U$.

## 3.2. Universul nonstandard

Vom construi un alt univers, *universul nonstandard*, ai cărui indivizi includ elementele lui $S$ şi ale cărui proprietăţi sunt apropiate de cele ale lui $\hat{S}$.

Fie $I \neq \emptyset$ o mulţime de indici, $F$ un ultrafiltru pe $I$ şi $\mu$ măsura indusă de $F$, adică

$$\mu_F(A) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad A \in F \\ 0, & \text{dacă} \quad A \notin F. \end{cases}$$

Spunem că o proprietate a elementelor lui $I$ are loc aproape peste tot (apt) dacă mulţimea elementelor lui $I$ pentru care proprietatea are loc, are măsura 1 (sau că mulţimea elementelor pentru care nu are loc proprietatea are măsura zero).

Fie funcţia $f : I \to \hat{S}$. Scriem $f_\delta = f(\delta)$ pentru $\delta \in I$. Pentru $n \in \mathbf{N}$, fie

$$Z_n = \{f | f : I \to \hat{S},\ f_\delta \in S_n \text{apt}\} \quad \text{şi} \quad Z = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Z_n.$$

Există o scufundare naturală a universului standard $\hat{S}$ în $Z$. Elementele $r \in \hat{S}$ se identifică cu funcţia "constantă" astfel: $r_\delta = r$ pentru $\forall \delta \in I$. Pentru $f, g \in Z_0$ definim relaţia $\sim$ prin $f \sim g$ dacă $f_\delta = g_\delta$ apt, echivalent cu:

$$f \sim g \Leftrightarrow \{\delta | f(\delta) = g(\delta)\} \in F.$$

Relaţia "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $Z_0$. Pentru $f \in Z_0$, scriem $\bar{f} = \{g \in Z_0 | g \sim f\}$ deci $Z_0$ este împărţită de relaţia $\sim$ în clase de echivalenţă disjuncte $\bar{f}$.

Punem $W = \{\bar{f} | f \in Z_0\}$.

Este clar că pentru $x, y \in S$ (şi deci prin scufundare în $Z_0$) dacă $x \neq y$, atunci $\bar{x} \neq \bar{y}$. Deci putem identifica fiecare $x \in S$ cu elementul corespunzător $\bar{x} \in W$, adică putem scrie $S \subseteq W$ şi spunem pentru $x \in S$, $\bar{x} = x$.

Vom construi un univers $\tilde{W}$ cu indivizii $W$ pe care-l vom numi *universul nonstandard* (corespunzător lui $\hat{S}$).

Definim *suprastructura* $\hat{W}$ astfel:

$$\begin{aligned}
&W_0 = W \\
&W_{i+1} = W_i \cup \mathcal{P}(W_i) \\
&\hat{W} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} W_i.
\end{aligned}$$

$\tilde{W}$ constă din $W$ împreună cu anumite submulţimi ale lui $\hat{W}$ care vor fi specificate mai târziu.

*De fapt asociem fiecărui element $f \in Z_n$, un element corespunzător $\bar{f} \in W_n$, şi aceste $\bar{f}$ constituie $\tilde{W}$.*

$\bar{f}$ a fost deja definit pentru $f \in Z_0$, deci $\bar{f} \in W = W_0$.

Fie $i \geq 0$. Presupunem că $\bar{f}$ a fost deja definit pentru toţi $f \in Z_i$ astfel încât $\bar{f} \in W_i$. Atunci pentru $f \in Z_{i+1} \setminus Z_i$, definim

$$\bar{f} = \{\bar{g} | g \in Z_i \quad \text{şi} \quad g_\delta \in f_\delta apt.\}$$

Atunci, prin presupunerea făcută, pentru fiecare $\bar{g} \in \bar{f}$, avem

$$\bar{g} \in W_i = W_{i-1} \cup \mathcal{P}(W_{i-1});$$

Astfel, $\bar{f} \subseteq W_i$ şi $\bar{f} \in W_{i+1}$. Astfel, am dat o definiţie inductivă a lui $\bar{f}$ pentru orice $f \in Z = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Z_n$. Mai mult, $f \in Z_i$ implică $\bar{f} \in W_i$. În final definim

$$\tilde{W} = \{\bar{f} | f \in Z\},$$

şi numim $\tilde{W}$ *universul nonstandard corespunzător lui $\hat{S}$.*

*Observaţie.* $\tilde{W}$ depinde de mulţimea de indici $\dot{I}$ şi de filtrul $F$ şi este de fapt un *univers cu indivizii* $W$.

Deoarece $\hat{S} \subseteq Z$, din scufundare, pentru fiecare element $r \in \hat{S}$, există un element corespunzător $\bar{r} \in \tilde{W}$.

Elementele $\bar{r}$ pentru care $r \in \hat{S}$ se numesc elemente *standard* ale lui $\tilde{W}$.

Elementele rămse ale lui $\tilde{W}$ (dacă există) se numesc *elemente nonstandard.* În particular indivizii standard sunt chiar elementele lui $S$.

Indivizii nonstandard sunt cei ai lui $W \backslash S$. Submulţimile din $\tilde{W}$ se numesc mulţimi *interne* (standard, dacă sunt în $\hat{S} \subset \tilde{W}$, nonstandard dacă sunt în $\tilde{W} \setminus \hat{S}$). Submulţimile din $\hat{W} \setminus \hat{S}$ se numesc mulţimi *externe.*

## 3.3 Proprietăţi

Vom da în continuare câteva proprietăţi ale căror demonstraţii pot fi găsite în [Dv].

**Lema 3.3.1.** Pentru $f, g \in Z$ avem $\bar{g} \in \bar{f}$ dacă şi numai dacă $g_\delta \in f_\delta$ apt.

**Lema 3.3.2.** Dacă $f_\delta = g_\delta$ apt şi $f \in Z_n$, atunci $g \in Zn$.

**Lema 3.3.3.** Dacă $f, g \in Z$ şi $f_\delta = g_\delta$ apt, atunci $\bar{f} = \bar{g}$.

**Lema 3.3.4.** Dacă $f, g \in Z$ şi $\bar{f} \subseteq \bar{g}$ atunci $f_\delta \subseteq g_\delta$ apt.

**Lema 3.3.5.** Pentru $f, g \in Z$ avem

1) $\bar{f} \in \bar{g}$ dacă şi numai dacă $f_\delta \in g_\delta$ apt.

2) $\bar{f} = \bar{g}$ dacă şi numai dacă $f_\delta = g_\delta$ apt.

**Lema 3.3.6.** Fie $f, g \in Z$. Fie $K_\delta = \{f_\delta, g_\delta\}$ pentru fiecare $\delta \in \dot{I}$. Atunci $K \in Z$ şi $\bar{K} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$.

**Lema 3.3.7.** $\tilde{W}$ este tranzitivă în $\hat{W}$.

**Lema 3.3.8.** $\tilde{W}$ este univers cu indivizii $W$.

**Lema 3.3.9.** Fie $f, g, h \in Z$. Atunci $\bar{h} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ dacă şi numai dacă $h_\delta = \{f_\delta, g_\delta\}$ apt.

**Lema 3.3.10.** Fie $f, g, h \in Z$. Atunci $\bar{h} = (\bar{f}, \bar{g})$ dacă şi numai dacă $h_\delta = (f_\delta, g_\delta)$ apt.

**Lema 3.3.11.** Fie $f, g \in Z$. Fie $K_\delta = f_\delta \top g_d e$ pentru fiecare $\delta \in I$. Atunci $k \in Z$ şi $\bar{h} = \bar{f} \top \bar{g}$.

**Lema 3.3.12.** Fie $f, g, h \in Z$. Atunci $\bar{h} = \bar{f} \top \bar{g}$ dacă şi numai dacă $h_\delta = f_\delta \top g_\delta$ apt.

Lema 3.3.10 şi Lema 3.3.12 se pot concentra în:

**Lema 3.3.13.** Fie $f, g, h \in Z$. Atunci:

1) $\bar{h} = (\bar{f}, \bar{g})$ dacă şi numai dacă $h_\delta = (f_\delta, g_\delta)$ apt.

2) $\bar{h} = \bar{f} \top \bar{g}$ dacă şi numai dacă $h_\delta = f_\delta \top g_\delta$ apt.

## 3.4. Teorema lui Løs şi Principiul Transferului

Pentru fiecare univers $\mathcal{U}$ construim un limbaj $\mathcal{L}_U$, pentru a putea fi folosit în crearea propoziţiilor despre $\mathcal{U}$.

Fireşte, aceste limbaje sunt ele însele entităţi matematice bine definite, a se vedea [CK], [Dv], [Ro1].

De fapt există două universuri cu care ne confruntăm:

- *universul standard* $\mathcal{U} = \hat{S}$ căruia îi asociem limbajul $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, şi

- *universul nonstandard* $^*\mathcal{U} = \tilde{W}$ căruia îi asociem limbajul $^*\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tilde{W}}$.

Dacă $\alpha$ este o propoziţie a lui $\mathcal{L}$ scriem $\models \alpha$ dacă $\hat{S} \models \alpha$.

Dacă $\alpha$ este o propoziţie a lui $^*\mathcal{L}$ scriem $* \models \alpha$ dacă $\tilde{W} \models \alpha$.

Fie $\lambda$ un termen (sau formulă) a lui $\mathcal{L}$.

$^*\lambda$ va fi termenul (sau formula) lui $^*\mathcal{L}$ obţinută din $\lambda$ înlocuind fiecare constantă $b$ din $\lambda$ prin constanta corespunzătoare $\bar{b}$. (Pentru fiecare $b \in \hat{S}$, $\bar{b}$ este un element standard din $\tilde{W}$).

Dacă în particular $b \in S$ pentru fiecare $b$ din $\lambda$, atunci $^*\lambda = \lambda$. (În acest caz $\lambda$ este *simultan un termen (sau formulă) din* $\mathcal{L}$ *şi* $^*\mathcal{L}$).

Avem $^*(\hat{S}) = \tilde{W} : {}^*(\mathcal{U} \setminus S) = {}^*\mathcal{U} \setminus W$, $\bar{x} = {}^*x$ dacă $x \in \mathcal{U} \setminus S$, $^*x = x$ dacă $x \in S$.

**Teorema 3.4.1 (a lui LØS).** *Fie* $\alpha = \alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $n \geq 0$ *o formulă a lui* $\mathcal{L}$ *şi* $g^1, g^2, \ldots, g^n \in Z$. *Atunci:*

$*\models {}^*\alpha(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$ *dacă şi numai dacă* apt.

$\models \alpha(g^1_\delta, \ldots, g^n_\delta)$

Cazul $n = 0$ al Teoremei LØS este

**(3.4.2) Principiul Transferului.**

Fie $\alpha$ o propoziţie a lui $\mathcal{L}$. Atunci $*\models {}^*\alpha$ dacă şi numai dacă $\models \alpha$.

**Definiţia 3.4.3.** Fie $A = \{b \in \hat{S} | \models \alpha(b)\}$ unde $\alpha$ este o formulă a lui $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}$. Atunci notăm ${}^*A = \{b \in \tilde{W} | \; * \models {}^*\alpha(b)\}$. Se observă că ${}^*A$ depinde numai de mulţimea $A$ şi nu de formula particulară $\alpha$ folosită pentru definirea ei.

**Definiţia 3.4.4.** Fie $A \subseteq \mathcal{U}$. Atunci $A$ se numeşte *definibilă* dacă există o formulă $\alpha = \alpha(x_i)$ a lui $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ astfel încât

$$A = \{b \in \mathcal{U} | \mathcal{U} \models \alpha(b)\}$$

În acest caz, formula $\alpha$ se numeşte o *definiţie* a lui $A$ în $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$.

**Corolar 3.4.5.** Fie $r$ o mulţime din $\hat{S}$. Atunci $r$ este o submulţime definibilă în $\hat{S}$ şi ${}^*r = \bar{r}$. De asemenea $\hat{S}$ este submulţime definibilă în $\hat{S}$ şi avem ${}^*(\hat{S}) = \{b \in \tilde{W} | \; * \models (b = b)\} = \tilde{W}$. În continuare scriem $\mathcal{U} = \hat{S}$, *universul standard* şi ${}^*\mathcal{U} = \tilde{W}$ universul nonstandard.

Ceea ce este important în construcţia universului nonstandard $\tilde{W} = {}^*\mathcal{U}$ este strânsa legătură dintre semantica lui $\mathcal{L}$ şi a lui ${}^*\mathcal{L}$, prin intermediul aplicaţiei $* : b \to {}^*b$.

Pentru orice $i \geq 0$ avem:

$$\mathcal{U} \setminus S_i = \hat{S} \setminus S_i \notin \hat{S}$$
$$^*(\mathcal{U} \setminus S_i) = {}^*\mathcal{U} \setminus \bar{S}_i = {}^*\mathcal{U} \setminus {}^*S_i$$

$\bar{f} \in W$ dacă şi numai dcă $f \in Z_0$, deci

$$\bar{S} = {}^*S = W$$
$$^*(\mathcal{U} \setminus S) = {}^*\mathcal{U} \setminus W.$$

**Definiţia 3.4.6.** 1) O mulţime din $\hat{W}$ care aparţine lui $^*\mathcal{U}$ se numeşte *internă.*

2) O mulţime din $\hat{W}$ care nu este internă se numeşte *externă.*

Următoarele proprietăţi ale operaţiei "$*$" se găsesc demonstrate în [DV].

**Teorema 3.4.7.** *Dacă $A \subseteq S$ atunci $A \subseteq {}^*A$ şi ${}^*A \cap S = A$.*

**Teorema 3.4.8.** *Fie $x, y \in \mathcal{U}$. Atunci:*

*1) $x = y$ dacă şi numai dacă ${}^*x = {}^*y$,*

*2) $x \in y$ dacă şi numai dacă ${}^*x \in {}^*y$,*

*3) ${}^*(x, y) = ({}^*x, {}^*y)$,*

*4) ${}^*(x \top y) = ({}^*x \top {}^*y)$.*

**Teorema 3.4.9.** *Fie $A, B$ submulţimile definibile în $\mathcal{U}$. Atunci:*

$$\begin{array}{l} {}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B,\ {}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B \\ {}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B, \\ {}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B, \\ {}^*\emptyset = \emptyset \\ {}^*\{a_1, \dots, a_n\} = \{{}^*a_1, \dots, {}^*a_n\}. \end{array}$$

**Teorema 3.4.10.** $^*\mathcal{U} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} {}^*(S_i)$.

**Teorema 3.4.11.** *Dacă $A, B \in \mathcal{U}$ şi $A \subseteq B$, atunci ${}^*A \subseteq {}^*B$.*

**Teorema 3.4.12.** *Fie $B \in U$, $A \in {}^*\mathcal{U}$ şi fie $A \subseteq {}^*B$. Atunci $A \in {}^*\mathcal{P}(B)$.*

**Teorema 3.4.13.** *$f \in \mathcal{U}$ o funcţie şi $C \subseteq dom\,(f)$. Atunci ${}^*(f[C]) = {}^*f[{}^*C]$. Deci dacă $f : A \to B$ atunci ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$.*

**Definiţia 3.4.14.** O relaţie $r$ este concurentă (în $\mathcal{U}$) dacă $r \in \mathcal{U}$ şi dacă $(\forall)(a_1, \dots, a_n) \in (dom(r))^n$ există un element $b$ astfel încât $(a_i, b) \in r$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$.

**Teorema 3.4.15.** (Teorema de concurenţă [Ro 1]). *Fie $r$ o relaţie concurentă în $\mathcal{U}$. Atunci există un element $b \in {}^*\mathcal{U}$ astfel încât $({}^*a, b) \in {}^*r$ pentru orice $a \in dom\,(r)$.*

# §4. Abordarea IST

**IST (Internal Set Theory)** este o nouă teorie axiomatică a mulţimilor, propusă de E. Nelson [Ne] în 1977, este probabil cea mai fidelă formalizare a Analizei Nonstandard a lui A. Robinson şi care poate fi descrisă în felul următor.

Considerăm teoria clasică Z.F.C (teoria mulţimilor Zermelo-Fraenkel plus axioma Alegerii). Adăugăm limbajului un predicat unar nedefinit "st" citit "standard" ($\in$ este de asemenea un predicat nedefinit (binar)).

Axiomele lui IST sunt axiomele lui ZFC la care adăugăm trei axiome suplimentare numite:

(P.T) - Principiul Transferului

(P.I) - Principiul Idealizării

(P.S) - Principiul Standardizării.

E. Nelson a arătat că IST este o extensie conservativă a lui ZFC, adică ea nu este contradictorie (de îndată ce ZFC nu este contradictorie) şi că orice formulă din ZFC este adevărată în IST dacă şi numai dacă este adevărată în ZFC, ceea ce se rezumă în următoarele două reguli.

*Regula 1.* Orice teoremă clasică rămâne adevărată în IST.

*Regula 2.* Orice rezultat nou demonstrat cu ajutorul principiilor lui IST sau a consecinţelor lor, care se poate exprima în termeni clasici (deci este un enunţ *intern*) este automat adevărat în sensul că există în mod necesar o demonstraţie care nu face uz de noile principii.

Ideea de a recurge la un predicat "standard" care este intenţionat lăsat nedefinit face posibilă separarea completă a fundamentării logice a metodei nonstandard de folosirea sa practică.

Intuitiv, *elementele standard* sunt cele pe care le putem defini clasic în mod unic, cele pe care le putem "numi" de exemplu $0, 1, 2, \sqrt{2}, \sin x, \pi, e, \ldots$ şi toate celelalte sunt *elemente nonstandard.* Orice obiect al matematicii clasice este standard.

Orice mulţime infinită are în mod necesar elemente nonstandard.

Faptul că această axiomă nu este contradictorie poate fi înţeles astfel: la orice stadiu al discursului matematic, niciodată nu va exista decât un număr finit de obiecte care au fost în mod unic definite.

Deci există mult prea multe elemente într-o mulţime infinită pentru ca toate să fie standard.

Deci există numere nonstandard şi pentru a distinge pe cele standard de cele nonstandard vom introduce *ordinele de magnitudine.*

## 4.1 Ordine de magnitudine

Mulţimea numerelor naturale $\mathbf{N}$ este infinită; deci există numere naturale nonstandard, numite *numere hipernaturale.*

Zero este *standard* deoarece este elementul unitate al mulţimii (clasice) a întregilor. La fel $1 = 1 + 0, 2, \ldots, n, \ldots$

Orice întreg pozitiv mai mic decât un întreg standard este el însuşi standard şi orice întreg pozitiv mai mare decât un întreg nonstandard este nonstandard.

Întregii nonstandard se numesc *infiniţi mari* sau *nelimitaţi* deoarece sunt mai mari decât orice întreg standard.

Pentru numere reale situaţia este într-un fel mai bogată. Un număr real $\omega$ se numeşte *infinit mare* sau *nelimitat* dacă $|\omega| > n$, $(\forall)n$ standard.

**Exemplu.** $\omega + \frac{1}{2}$ este un real nelimitat care nu este întreg.

Un număr real $\varepsilon$ se numeşte *infinit mic* sau *infinitezimal* dacă $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$,

$(\forall)n$ standard.

*Observaţii*: 1) 0 este singurul număr standard infinitezimal.

2) Dacă $\omega$ este nelimitat atunci $\varepsilon = \dfrac{1}{\omega}$ este infinitezimal.

3) *Principiul Carnot*: [31, p.19, D.D]. Două numere standard a căror diferenţă este infinitezimală sunt egale.

Un număr real $r$ se numeşte *limitat* (sau *finit*) dacă nu este infinit mare, adică dacă există $m$ standard real astfel încât $|r| < m$.

Un număr real $r$ se numeşte *apreciabil* dacă nu este nici nelimitat nici infinitezimal.

Două numere reale $x$ şi $y$ se numesc *infinit apropiate* şi notăm $x \simeq y$ dacă diferenţa lor $x - y$ este infinitezimală.

**Exemplu**. Dacă $\omega$ este întreg nonstandard. Numerele $\dfrac{1}{\omega}$ şi $2\omega$ sunt ne-apreciabile. $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\omega}$ este apreciabil dar nu este standard.

Orice număr real $r$ este infinit apropiat de un unic număr standard numit *partea standard a lui $r$* sau *umbra* lui $r$ "st$r$" sau $°r$.

Existenţa umbrei $°r$ a lui $r \in \mathbf{R}$, este legată de faptul că $\mathbf{R}$ este complet.

O mulţime de forma $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ unde $\omega$ este infinit mare, are cardinalul $\omega + 1$ şi se numeşte *hiperfinită*.

Cardinalul unei mulţimi infinite este standard dacă mulţimea este standard.

## 4.2. Regulile lui Leibniz

Detalii privind regulile de calcul cu ordinele de magnitudine se găsesc în [DV].

Notaţiile $\emptyset$, £, @ şi $\not\propto$ introduse de I van den Berg sunt folosite respectiv pentru un numere infinitezimale, limitate, apreciabile, nelimitate.

Două apariţii ale unui astfel de simbol nu sunt egale, dar ele au acelaşi ordin de magnitudine.

Regulile lui Leibniz pentru ordine de magnitudine sunt rezumate în tabelele de mai jos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∅ | ∅ | | | |
| £ | £ | £ | | |
| @ | @ | £ | £ | |
| ȸ | ȸ | ȸ | ȸ | ? |
| $+$ | ∅ | £ | @ | ȸ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∅ | ∅ | | | |
| £ | £ | £ | | |
| @ | @ | £ | £ | |
| ȸ | ȸ | ȸ | ȸ | ? |
| $-$ | ∅ | £ | @ | ȸ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∅ | ∅ | | | |
| £ | ∅ | £ | | |
| @ | ∅ | £ | @ | |
| ȸ | ? | ? | ȸ | ȸ |
| $\times$ | ∅ | £ | @ | ȸ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∅ | ? | ? | ∅ | ∅ |
| £ | ? | ? | £ | ∅ |
| @ | ȸ | ? | @ | ∅ |
| ȸ | ȸ | ȸ | ȸ | ? |
| $\uparrow\!\diagup_{\!\to}$ | ∅ | £ | @ | ȸ |

Următoarele reguli dau comportarea operatorului parte standard "$^\circ$" în raport cu operaţiile elementare şi ordinea de pe $\mathbf{R}$:

$$^\circ(x+y) = {}^\circ x + {}^\circ y, \quad {}^\circ(xy) = {}^\circ x\,{}^\circ y, \quad {}^\circ(1/x) = 1/{}^\circ x \quad \text{dacă} \quad {}^\circ x \neq 0.$$

Vom folosi următoarele notaţii:

$x \simeq y$ dacă $x - y$ este infinit mic
$x \underset{\simeq}{\leq} y$ dacă $x < y$ sau $x \simeq y$, adică dacă ${}^\circ x \leq {}^\circ y$
$x \not\simeq y$ dacă $x$ nu este infinit apropiat de $y$
$x \underset{\not\simeq}{<} y$ dacă $x < y$ şi $x \not\simeq y$, adică dacă ${}^\circ x < {}^\circ y$.

## 4.3. Enunţuri interne (standard sau nonstandard) şi enunţuri externe

Orice enunţ matematic (sau "formulă" în logică) este construit din constante, variabile, cuantificatori şi conective aranjate într-un anumit mod coerent.

Limbajul nonstandard (IST) adaugă limbajului clasic predicatul nou ”st” aceasta permiţând definirea altora cum ar fi infinit mic, infinit mare limitat apreciabil, toate acestea fiind *predicate nonstandard.*

**Definiţia 4.3.1.** Un enunţ este *intern* dacă nu conţine nici un predicat nonstandard.

În caz contrar enunţul este *extern.*

Un enunţ intern este *standard* dacă toate constantele şi toţi parametrii săi sunt standard.

**Exemple**. Pentru $\varepsilon > 0$, infinitezimal, enunţurile:

a) $|x| < \dfrac{1}{10} \Rightarrow x^2 < \dfrac{1}{100}$

b) $0 < x < \varepsilon \to 0 < x^2 < \varepsilon^2$

c) $0 < x < \varepsilon \Rightarrow x^2$ este infinitezimal

sunt

a) intern, standard

b) intern, nonstandard

c) extern

şi sunt toate adevărate.

Un enunţ intern fără constante sau parametri este *standard.*

## 4.4 Mulţimi interne şi externe

În Analiza nonstandard, dispunem la fel ca în cazul formulelor, de mulţimi *interne* şi mulţimi *externe.*

Pentru a distinge o mulţime externă de una internă, în practică utilizăm regulile următoare:

*Regula 1.* Numim mulţime *internă* orice mulţime definită cu ajutorul unui enunţ intern. În particular, toate mulţimile deja definite în matematica clasică sunt interne. Acestor mulţimi li se aplică fără restricţii orice teoremă clasică.

*Regula 2.* Numim *mulţime externă* orice submulţime a unei mulţimi interne, definită printr-un enunţ extern, pentru care cel puţin o teoremă clasică nu se aplică.

*Regula 3.* Numai mulţimile interne sunt standard sau nonstandard.

Orice element al unei mulţimi interne este intern.

Deci vom numi *mulţime externă* orice colecţie de forma $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{E} | F(x)\}$ unde $\mathcal{E}$ este o mulţime internă, $F(x)$ un enunţ extern, şi elementele căreia nu formează o mulţime (care se poate arăta de obicei, observând că cel puţin un rezultat standard nu se aplică lui $\mathcal{F}$).

**Exemple.** 1) Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon$ infinitezimal sau nu. Următoarele mulţimi sunt *interne*:

$$[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]; \quad \{x \in \mathbf{R} | \varepsilon x \geq 1\}; \quad \left\{\frac{n}{\varepsilon} | n \in N\right\}.$$

2) Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$. Mulţimea $\{x \in \mathbf{R} | x + \varepsilon \simeq x\}$ este *internă* şi este egală cu $\mathbf{R}$, deşi este definită prin intermediul unei formule externe.

3) Mulţimea $hal\,(0) = \{x \in \mathbf{R} | x \simeq 0\}$ este *externă*. Într-adevăr, dacă ar fi internă ar trebui să verifice teorema clasică: "orice parte majorată a lui $\mathbf{R}$ posedă o margine superioară", dar $hal\,(0)$ nu verifică această teoremă.

În practică, se arată deseori că o colecţie este o mulţime externă, arătând că este posibil să construim din ea, folosind operaţii interne (luând complementara sau preimaginea unei funcţii) haloul lui zero, sau altă mulţime externă cunoscută.

Astfel mulţimile $hal\,(\infty) = \{\omega \in \mathbf{R} | \omega \text{ infinit mare}\}$ este *externă* deoarece dacă ar fi internă, $hal\,(0)$ ar fi la fel, deoarece $hal\,(0) = \{0\} \cup inv\,(hal\,(\infty))$, unde $inv\,(\omega) = \dfrac{1}{\omega}$.

La fel galaxia principală $G = \{x \in \mathbf{R} | x \text{ limitat}\}$ este externă, deoarece $hal\,(\infty) = \mathbf{R} \setminus G$.

La fel mulţimea $A = \{x \in \mathbf{R} | x \text{ apreciabil}\}$ este externă.

Alte exemple de mulţimi externe:

${}^{\sigma}N = \{n \in \mathbf{N} | st(n)\}$;
$hal\ (x) = \{y \in \mathbf{R} | y \simeq x\}$;
${}^{\sigma}\mathbf{Z} = \{n \in \mathbf{Z} | st(n)\}$;
${}^{\sigma}\mathbf{R} = \{x \in \mathbf{R} | st(x)\}$ şi $\{n \in \mathbf{N} | n$ nu este standard$\}$.

În continuare sunt date câteva exemple de mulţimi externe foarte utile în asimptotica nonstandard care sunt definite cu ajutorul unui infinitezimal $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon > 0$.

$\varepsilon - gal\ (0) = \left\{x \in \mathbf{R} | \dfrac{x}{\varepsilon} \text{ limitat}\right\}$;
$\varepsilon - hal\ (0) = \left\{x \in \mathbf{R} | \dfrac{x}{\varepsilon} \simeq 0\right\}$;
$\varepsilon - microhal\ (0) = \{x \in \mathbf{R} | x \leq \varepsilon^n \text{ pentru orice n standard}\}$;
$\varepsilon - microgal\ (0) = \left\{x \in \mathbf{R} | (\exists) r > 0 \text{ limitat astfel încât} |x| < \varepsilon^{-\frac{1}{rx}}\right\}$
$\varepsilon - megagal\ (0) = \{x \in \mathbf{R} | \exists n \text{ limitat astfel încât } |x| < \varepsilon^{-n}\}$.

Aceste mulţimi externe se numesc: $\varepsilon$-galaxie, $\varepsilon$-halo, $\varepsilon$-microhalo, $\varepsilon$-microgalaxie, $\varepsilon$-megagalaxie a lui 0.

**Remarca 4.3.2.** Deoarece o funcţie $f : E \to F$, din punct de vedere al teoriei mulţimilor, este graful său $G(f) \subset E \times F$, există *funcţii interne* (al căror graf este o mulţime internă) şi *funcţii externe* (al căror graf este o mulţime externă).

De exemplu, funcţia caracteristică a numerelor standard din $\mathbf{R}$ adică funcţia $\chi : \mathbf{R} \to \{0, 1\}$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \text{ este standard} \\ 0 & \text{dacă} \quad x \text{ nu este standard} \end{cases}$$

este o funcţie externă.

## 4.5 Axiomele Teoriei IST

Pentru a lua în considerare extensia limbajului şi folosirea corectă a predicatelor "st" şi a derivatelor sale avem nevoia de câteva axiome noi care se adaugă celor uzuale. Aceste axiome sunt *noncontradictorii.*

Atâta timp cât considerăm mulţimi interne, rezultatele clasice rămân adevărate.

Noua teorie se numeşte o *extensie* a celei clasice, conservativă (nu vor fi logic noi teoreme) dar aceasta nu înseamnă că Analiza nonstandard nu va ajuta la dezvăluirea unor noi teoreme care să fie adevărate.

În continuare sunt prezentate regulile de manipulare a predicatului "standard". Ele sunt:

*Principiul Transferului (P.T), Principiul de Idealizare (P.I) şi Principiul de Standardizare (P.S)*

Vom folosi următoarele motaţii:

$\forall^{st}x$ pentru $[\forall x, stx \Rightarrow]$

$\exists^{st}x$ pentru $[\exists x, stx \wedge]$.

**4.5.1. Principiul de Transfer (P.T)**. Pentru orice formula standard $F(x)$ are loc:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall^{st} x F(x)$$

sau echivalent, folosind negaţia $G(x) := \neg F(x)$ a lui $F(x)$ $\exists^{st} x G(x) \Leftrightarrow \exists x G(x)$ pentru orice formulă standard $G(x)$.

În cazul când $G(x)$ este satisfăcută de un unic $x_0$, (P.T) asigură faptul că acest $x_0$ este necesar *standard*. Astfel, orice obiect care poate fi caracterizat unic, cum sunt $\phi$, $0, 1, 2, \pi, e, \sin, e_n, \ldots, +, \ldots, \leq, [0,1]^{\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}^{\infty}[0,1], \ldots$ sunt standard.

Consecinţe importante ale acestei axiome sunt:

- Orice funcţie standard are valori standard în puncte standard.

- Pentru orice $n, E_1, E_2, \ldots, E_n$ standard mulţimea $E := E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ este standard şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ este standard dacă şi numai dacă $x_p$ este standard $(\forall) p \leq n$.

(P.T) se aplică numai enunţurilor standard.

**4.5.2. Principiul Idealizării (P.I)**. Pentru orice enunţ intern $B(x, y)$, are loc:

$$[\forall^{st}Y, Y\ finit \Rightarrow \exists x\ \forall y \in Y\ B(x,y)] \Leftrightarrow [\exists x \forall^{st} y B(x,y)]$$

(P.I) afirmă că relaţia $B(x,y)$ este simultan satisfiabilă pentru orice $y$ standard dacă şi numai dacă este simultan satisfiabilă pe orice mulţime standard şi finită.

**Consecinţă**. Există o mulţime finită $F$ care conţine toate obiectele standard [Ne] pg. 1167.

Considerăm o relaţie (binară) internă $B(x,y)$ pe care o vom citi "$x$ domină pe $y$". O astfel de relaţie se numeşte *concurentă* dacă pentru orice mulţime standard finită $Y$ există un $x$ care domină orice element $y \in Y$.

De exemplu relaţia $B(x,y) \equiv x \geq y$ este concurentă pe $\mathbf{N}$.

(P.I) asigură că pentru orice relaţie internă concurentă există un $x$ care domină orice $y$ standard.

Vom prezenta în continuare câteva exemple de relaţii interne concurente şi consecinţele idealizărilor corespunzătoare.

- Relaţia $B(x,y) \equiv (x \in N) \wedge (y \in N) \Rightarrow (x \geq y)$ conduce la existenţa întregilor *infiniţi mari.*

- Relaţia $B(x,y) \equiv x \in E \wedge x \neq y$ conduce la faptul că orice mulţime $E$ este *standard* şi *finită* dacă şi numai dacă ea are *numai elemente standard.*

Ca consecinţă, toate mulţimile infinite au elemente nonstandard şi orice întreg limitat este el însuşi standard.

- Relaţia $B(\mathcal{F}, y) \equiv (\mathcal{F}$ finită$) \wedge (y \in \mathcal{F})$ conduce la existenţa unei mulţimi finite care conţine orice mulţime standard ca element (rezultat deja menţionat).

(P.I) se aplică numai enunţurilor interne.

**4.5.3. Principiul Standardizării (P.S)**. Pentru orice formula $F(x)$, internă sau externă, are loc:

$$\forall^{st} E \exists^{st} S_F \forall^{st} x [x \in S_F \Leftrightarrow x \in E \wedge F(x)]$$

Se observă că (P.S) se aplică tuturor enunţurilor, interne sau nu.

Dacă $F(x)$ nu este enunţ intern, colecţia tuturor $x$ care satisfac $F(x)$ poate să nu fie o mulţime a matematicii clasice.

(P.S) ne asigură că pentru orice mulţime standard $E$, există o submulţime standard $S_F$ ale cărei elemente standard sunt exact elementele $x$ standard ale lui $E$ care verifică $F(x)$.

Mulţimea $S_F$ este unică şi se numeşte *standardizata* mulţimii interne sau externe a tuturor elementelor $x$ din $E$ astfel încât are loc $F(x)$ şi notăm

$$S_F := {}^S\{x \in E | F(x)\}.$$

**Observaţie**. Dacă $x$ nu este standard, este chiar posibil ca $x \in S_F$ şi să nu satisfacă $F(x)$ sau $x \notin S_F$ şi să satisfacă $F(x)$.

De exemplu: dacă $F(x) \equiv \left[ 0 \underset{\not\simeq}{<} x \underset{\simeq}{\leq} 1 \right]$ pentru care $S_F = (0,1]$, orice infinitezimal $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$ aparţine lui $(0,1] = S_F$ chiar dacă $F(\varepsilon)$ este falsă şi orice element $1+\varepsilon$, cu $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$, $1+\varepsilon \notin (0,1] = S_F$ deşi $F(1+\varepsilon)$ este adevărată.

(P.S) poate fi folosit la a arăta existenţa funcţiilor standard [Th. 1.3 Nelson pg. 1168] sau la a arăta existenţa umbrei ${}^\circ x$ a unui număr limitat real [Th. 1.4 Nelson, pg. 1169].

În [Ro 1] A.Robinson a construit un model al axiomelor considerate în IST (el de fapt a sugerat la afărşitul cărţii sale să se caute o abordare axiomatică a modelului său nonstandard).

Construcţia lui A.Robinson (sau orice analog) este chiar un mod de demonstrare a consistenţei relative a sistemului de axiome din IST.

William C Powell (Appendix [Ne] pg. 1194) a arătat că IST este o extensie *conservativă* a lui ZFC (Orice teoremă internă din IST este o th. în ZFC).

Dacă presupunem că ZFC este consistent tragem concluzia că şi IST este consistent şi astfel din teorema de completitudine a lui Gödel [CK], IST are un model.

# Capitolul III
# ELEMENTE DE ANALIZĂ NONSTANDARD ÎN CONTEXT IST

În acest capitol prezentăm acele noţiuni ale Analizei nonstandard în limbaj IST care ne vor fi utile în capitolele următoare, anume: noţiunea de halou în context metric, şiruri şi serii de funcţii, elemente de topologie, umbra unei funcţii, noţiunea de $S$-diferenţiabilitate şi importantele Principii de Permanenţă ale lui Cauchy şi Fehrele.

## §1 Aplicaţii la obiecte standard

Cele trei axiome $(P.T)$, $(P.I)$ şi $(P.S)$ guvernează folosirea predicatului "st" şi a tuturor derivatelor sale.

În principiu, este suficient să cunoaştem aceste axiome pentru a putea manipula fără eroare noile concepte introduse de Analiza Nonstandard.

Limbajul nonstandard face posibil să reformulăm într-o formă mai simplă definiţiile de bază ale Analizei. Vom observa că aceste noi caracterizări au loc numai pentru obiecte standard. Pentru obiecte nonstandard ele nu se mai aplică şi trebuie să ne întoarcem la definiţiile clasice. Dar proprietăţile noi introduse sunt de asemenea interesante pentru obiecte nonstandard (sunt acele *$S$-proprietăţi* care vor fi studiate mai târziu).

**Definiţia 1.1.** Fie $(E,d)$ un spaţiu metric standard. Notaţia $x \simeq y$ înseamnă că $d(x,y) \simeq 0$. Spunem că *x este aproape standard în E* dacă există $x_0 \in E$, $x_0$ standard astfel încât $x \simeq x_0$. La fel ca în $\mathbf{R}$, punctul standard $x_0$ se numeşte *partea standard a lui x* sau *umbra lui x* şi se notează ${}^\circ x$.

Haloul (metric) al lui $x$, notat *hal* $(x)$ este mulţimea de obicei externă

$$hal\ (x) = \{y \in E | x \simeq y\}.$$

**Definiţia 1.2.** Un element $x \in E$ se numeşte *aproape standard în subspaţiul* $A \subset E$, dacă există un element standard $x_0 \in A$ astfel încât $x \in hal\ (x_0)$.

Mai general, pentru $A \subset E$, haloul lui $A$, *hal* $(A)$ este submulţimea (de obicei externă) a tuturor $x \in E$ care sunt la o distanţă infinitezimală de cel puţin un element din $A$

$$hal\ (A) = \{x \in E | (\exists) x_0 \in A \quad \text{astfel încât} \quad x \in hal\ (x_0)\}.$$

Într-un spaţiu topologic $E$, *haloul topologic al lui* $x \in E$ notat $hal_T(x)$, este intersecţia tuturor vecinătăţilor standard ale lui $x$

$$hal_T(x) = \bigcap_{V \in {}^\sigma \mathcal{V}} V,$$

${}^\sigma \mathcal{V}$ fiind mulţimea vecinătăţilor standard ale lui $x$. În orice spaţiu metric, dacă $hal\ (x) \cap hal\ (y) \neq \emptyset$ atunci $hal\ (x) = hal\ (y)$.

Acest lucru nu este adevărat în general într-un spaţiu topologic dacă se înlocuieşte *hal* prin $hal_T$ (chiar dacă topologia considerată este definită de o metrică). Numai dacă $x_0$ este standard, avem sigur

$$hal\ (x_0) = hal_T(x_0).$$

În continuare sunt date câteva caracterizări nonstandard ale conceptelor de bază ale Analizei, ale căror demonstraţii pot fi găsite în [Ro 1], [L.G], [D.R].

### 1.3. Şiruri

Un şir standard $(u_n)_n \subset E$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă $u_p \simeq u_q$ pentru orice $p$ şi $q$ infiniţi mari.

Şirul $(u_n)_n$ *converge* la o limită $l$ (standard) dacă şi numai dacă $u_n \simeq l$ pentru orice $n$ infinit mare.

Şirul $(u_n)_n$ admite un subşir convergent dacă şi numai dacă există un $n$ infinit mare şi un $l$ standard astfel încât $u_n \simeq l$.

### 1.4. Funcţii

Fie $(E, d)$, $(F, d')$ spaţii metrice standard.

O funcţie standard $f : E \to F$ este *continuă în punctul standard* $x_0 \in E$ dacă şi numai dacă $f(x) \simeq f(x_0)$ pentru orice $x \simeq x_0$.

Funcţia $f$ este *continuă pe* $E$ dacă şi numai dacă este continuă în orice punct standard.

Funcţia $f$ este *uniform continuă* dacă şi numai dacă $f(x) \simeq f(y)$ pentru orice $x \simeq y$ ( $x$ şi $y$ standard sau nonstandard), adică dacă şi numai dacă $f$ *este* $S$*-continuă* în orice punct.

Fie $f$ definită pe un interval standard care conţine numărul standard $x_0$. Numărul standard $l$ *este derivata lui* $f$ *în* $x_0$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \simeq 0$, are loc

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \simeq l.$$

Funcţia $f$ este diferenţiabilă dacă este diferenţiabilă în orice punct. În acest caz, derivata sa $f'$ este standardizata relaţiei (externe) care asociază oricărui $x_0$ standard, derivata $l$ a lui $f$ în $x_0$.

Fie $f : A \subset E \to F$, $E, F$ spaţii normate standard, $A$ standard, $x_0 \in A$, $x_0$ standard.

Funcţia standard, continuă, liniară $L$ este diferenţiala lui $f$ în $x_0$ dacă şi numai dacă

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)}{\varepsilon} \simeq L(X)$$

pentru orice $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \simeq 0$ şi orice $X$ cu $||X||$ finită.

Funcţia
$$X \to Y = \frac{1}{\varepsilon}(f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)$$
se numeşte *imaginea lui $f$ sub lupa*
$$x = x_0 + \varepsilon X, \quad y = f(x) + \varepsilon Y$$
de magnitudine $\frac{1}{\varepsilon}$, centrată în punctul $(x_0, f(x_0))$. Putem da astfel o caracterizare mai geometrică a diferenţiabilităţii.

Funcţia $f$ *este diferenţiabilă în* $x_0$ standard dacă şi numai dacă imaginea lui $f$ prin orice lupă de magnitudine infinit de mare, centrată în $(x_0, f(x_0))$ este infinit apropiată de aceeaşi funcţie liniară standard $L$.

Funcţia $f$ este *strict diferenţiabilă* într-un punct standard $x_0$, dacă
$$\frac{f(x + \varepsilon X) - f(x)}{\varepsilon} \simeq L[X]$$
pentru orice $x \simeq x_0$ şi $X$ limitat.

**1.5. Şiruri de funcţii**

Fie $f$ şi $(f_n)_{n \geq 0}$ o funcţie standard şi un şir standard de funcţii cu acelaşi domeniu. Atunci:

Şirul $(f_n)_n$ *converge punctul la $f$* dacă şi numai dacă $f_n(x_0) \simeq f(x_0)$ pentru orice $n$ infinit mare şi orice standard $x_0$.

Şirul $(f_n)_n$ *converge uniform la $f$* dacă şi numai dacă $f_n(x) \simeq f(x)$ pentru orice $n$ infinit mare şi pentru orice $x$ standard sau nu.

**1.6. Integrarea**

Considerăm $D$ o diviziune a intervalului $I = [a, b]$, adică un şir $(x_i)_{i \in \{0,1,2,\ldots,n\}}$ astfel încât
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Diviziunea $D$ se numeşte infinitezimală dacă $x_{i+1} \simeq x_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

O funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$ este o *funcţie scară* pentru $D$, dacă $\varphi$ este constantă pe orice subinterval $[x_i, x_{i+1})$. Integrala funcţiei $\varphi$ este prin definiţie

$$\int \varphi : \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

O funcţie standard $f : I \to \mathbf{R}$ este *integrabilă Lebesgue* dacă şi numai dacă pentru orice $e$ standard $e > 0$, există două funcţii scară $\varphi_e$ şi $\psi_e$ astfel încât $\int(\psi_e - \varphi_e) < e$ şi $\varphi_e(x) < f(^\circ x) < \psi_e(x)$ pentru orice $x \in I$.

În acest caz, $\int f$ este unicul număr real standard astfel încât $\int \varphi_e \leq \int f \leq \int \psi_e$ pentru orice standard $e > 0$ şi orice funcţie $\varphi_e$ şi $\psi_e$ ca mai sus.

**1.7. Topologie.**

Fie $\mathcal{T}$ un spaţiu topologic standard, $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ o submulţime standard şi $x_0 \in \mathcal{T}$, $x_0$ standard. Atunci:

- $x_0$ este *punct interior* al lui $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $hal_T(x_0) \subset \mathcal{A}$;

- $x_0$ este *punct limită* al lui $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $hal_T(x_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Submulţimea (standard) $\mathcal{A}$ este *deschisă* dacă şi numai dacă orice element standard al său este punct interior.

Submulţimea (standard) $\mathcal{A}$ este închisă dacă şi numai dacă toate punctele limită îi aparţin.

Interiorul lui $\mathcal{A}$, (notat $\mathring{\mathcal{A}}$), este standardizata punctelor sale interioare.

Închiderea lui $\mathcal{A}$, (notat $\bar{\mathcal{A}}$), este standardizata punctelor sale limită

$$\bar{\mathcal{A}} = {}^S\{x \in \mathcal{T} | hal_T\,(x) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

Spaţiul topologic $\mathcal{T}$ este *Hausdorff* dacă şi numai dacă orice element al său are cel mult o parte standard ($^\circ x$ este unic).

Spaţiul topologic $\mathcal{T}$ este *compact* dacă şi numai dacă orice element al lui $\mathcal{T}$ este aproape standard în $\mathcal{T}$, adică dacă şi numai dacă orice element $x$ al lui $\mathcal{T}$ are o parte standard $^\circ x$ în $\mathcal{T}$.

**Remarca 1.8.**. Caracterizările nonstandard ale acestui paragraf se aplică numai obiectelor standard. De exemplu în cazul compacităţii.

Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$. Submulţimile standard (0,1) şi $[0,\infty)$ ale lui $\mathbf{R}$ nu sunt compacte: prima are elemente ca $\varepsilon$ şi $1-\varepsilon$ care nu sunt aproape standard în (0,1) iar a doua are elemente infinit mari care nu sunt infinit apropiate de nici un punct standard.

Pe de altă parte, dacă aplicăm acest criteriu la submulţimi care nu sunt standard, vom obţine concluzii greşite. De exemplu $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ este compact (închis şi mărginit) deşi are elemente ca $\varepsilon$ care nu sunt aproape standard în această mulţime.

La fel, pentru o mulţime ca $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ care nu este compactă (nu este închisă), orice element al său $x$ are o umbră $^\circ x$ care îi aparţine.

## §2. Umbra unei mulţimi

**Umbra unei mulţimi** este un prim exemplu de tehnică foarte fructuoasă în NSA. Fie $\mathcal{T}$ un spaţiu topologic standard, $\mathcal{A}$ o submulţime standard a lui $\mathcal{T}$.

Închiderea $(\bar{\mathcal{A}})$ a lui $\mathcal{A}$ în $\mathcal{T}$ este unica mulţime standard ale cărei elemente standard sunt exact toţi $x_0 \in \mathcal{T}$ astfel încât $hal\,(x_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Pentru $\mathcal{A}$ generală (posibil externă) aceeaşi definiţie duce la noţiunea de umbră.

**Definiţia 2.1.** Umbra lui $\mathcal{A}$, notată cu $^\circ\!\mathcal{A}$ este unica mulţime standard ale cărei elemente standard sunt exact acelea ale căror halo intersectează pe $\mathcal{A}$:

$$^\circ\!\mathcal{A} := {}^S\{x_0 \in \mathcal{T} | hal\,(x_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

Dacă $\mathcal{A}$ este standard atunci $^\circ\!\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$.

Dacă $\mathcal{A}$ este internă atunci $^\circ\!\mathcal{A}$ este închisă (pentru o mulţime externă acest lucru nu este necesar adevărat).

**Exemplu 2.1.** Pentru orice $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$ şi $\mathcal{A} = \{x | \varepsilon < x \leq 1+\varepsilon\}$

(internă), ${}^{\circ}\mathcal{A} = [0,1]$. Pentru mulţimea externă $\mathcal{A} = \{x | \underset{\neq}{<} x \underset{\simeq}{\leq} 1\}$, $\mathring{\mathcal{A}} = (0,1]$.

Noţiunea de umbră a unei submulţimi a lui $\mathcal{T}$, este astfel obţinută prin extinderea la alte mulţimi decât cele standard, a unei proprietăţi ce corespunde închiderii în cazul unei mulţimi standard: astfel, umbra este numită şi *S-închidere*.

**Definiţia 2.3.** Fie $\mathcal{A}$ o submulţime oarecare a unui spaţiu topologic standard $\mathcal{T}$. *Umbra interioară* a lui $\mathcal{A}$, notată ${}^{i}\mathcal{A}$, este unica submulţime standard a lui $\mathcal{T}$ ale cărei elemente standard sunt exact acelea ale căror halo este conţinut în $\mathcal{A}$

$$ {}^{i}\mathcal{A} := {}^{S}\{x_0 \in \mathcal{T} | hal\,(x_0) \subset \mathcal{A}\}. $$

Dacă $\mathcal{A}$ este standard ${}^{i}\mathcal{A} = {}^{\circ}\mathcal{A}$. De aceea se poate interpreta umbra interioară ca o noţiune de $S$-interior. Dacă $\mathcal{A}$ este internă atunci ${}^{i}\mathcal{A}$ este o submulţime deschisă a lui $\mathcal{T}$.

**Exemple 2.4.** Dacă $\mathcal{A} = \{0 < x \leq 1 + \varepsilon\}$ atunci ${}^{i}\mathcal{A} = (0,1)$.

Dacă $A = \{x | 0 \underset{\not\simeq}{<} x \underset{\simeq}{\leq} 1\}$, ${}^{i}A = (0,1]$.

**Definiţia 2.5.** Fie $(E, d_E)$ şi $(F, d_F)$ două spaţii metrice standard.

O aplicaţie (internă) $f : E \to F$ se numeşte *S-continuă* în $x_0 \in E$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \simeq x_0$, $f(x) \simeq f(x_0)$.

**Exemple 2.6.** 1) Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$. Funcţia reală $f(x) = arctg\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ este continuă în 0 dar nu este $S$-continuă în 0.

2) Funcţia $f(x) = \varepsilon\left[\dfrac{x}{\varepsilon}\right]$ este $S$-continuă în orice punct, dar este discontinuă în orice punct din $\varepsilon\mathbf{Z}$.

Se poate arăta că o funcţie $f$ este $S$-continuă în $x_0$ dacă şi numai dacă

$$ \forall \varepsilon \in D(f),\ d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon $$

unde $\varepsilon$ şi $\eta$ sunt standard.

## §3. Umbra unei funcţii

Există cel puţin două obiecte care pot fi considerate umbra unei funcţii $f$.

Pe de o parte, există umbra grafului său $\mathcal{G}(f)$; totuşi exemplul funcţiei $arctg\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ arată că această umbră nu este totdeauna graful unei funcţii; în $x = 0$, această umbră conţine toate punctele cu ordonată $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pe de altă parte, se poate considera unica mulţime standard ale cărei elemente standard sunt $(x_0, {}^\circ f(x_0))$ pentru orice $x_0$ standard astfel încât $f(x_0)$ este aproape standard.

Această mulţime este totdeauna graful unei funcţii standard numită standardizata lui $f$ şi notată ${}^S f$.

**Exemplu 3.1.** Dacă $f(x) = arctg\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$,

$$
{}^S f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}
$$

Totuşi ${}^S f$ poate fi foarte neregulată.

Dacă $f(x) = \cos(\omega x)$, $\omega$-infinit mare, pentru un anumit $\omega$, ${}^S f$ poate fi nemăsurabilă [D.R]. Este interesant cazul când ambele noţiuni coincid, adică atunci când umbra grafului lui $f$ este graful unei funcţii continue standard ${}^\circ f$, numită *umbra lui f*.

Fie $f : D \subset E \to F$. Umbra $f$ se defineşte pe o anumită submulţime a lui ${}^\circ D$, astfel: pentru un $p \in {}^\circ D$, presupunem că există un punct standard $q \in F$ astfel încât $f(p') \simeq q$ pentru orice $p' \in hal(p) \cap D$. Definim atunci ${}^\circ f(p) = q$.

**Exemplu 3.2.** Dacă $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$, atunci ${}^\circ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Umbra unei funcţii poate avea un domeniu mai mic decât funcţia însăşi (exemplul de mai sus). Poate avea loc şi reciproca.

**Exemplu 3.3.**

$$f(x) = Arcsin\,((1+\varepsilon)x)\ ; \quad D(f) := \left(-\frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}\right)$$

$$^\circ f(x) = Arcsin(x)\ ; D(^\circ f) := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R.$$

Pentru orice funcţie $f$, notăm cu $D(f)$ domeniul de definiţie, $B(f)$-codomeniul său şi $\mathcal{G}(f)$-graful său.

Presupunem că $D(f)$ şi $B(f)$ sunt subspaţii ale unor spaţii metrice standard.

**Definiţia 3.4.** Fie $E$ şi $F$ spaţii metrice standard şi $f : E \to F$ o funcţie internă. $D(f) \subset E$ şi $B(f) \subset F$. Funcţia $f$ se numeşte *$S$-continuă în $E \times F$* dacă şi numai dacă $f$ este $S$-continuă în orice $x(f)$ astfel încât $(x, f(x))$ este aproape standard în $E \times F$.

(Ex. Restricţia funcţiei $f(x) = Arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ la orice submulţime a lui $\mathbf{R}$ ce nu conţine 0, este $S$-continuă în $\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}$.)

Umbra în $E \times F$ a grafului funcţiei $f$, $S$-continuă, este graful unei funcţii standard continue $^\circ f$ numită umbra lui $F$.

**Teorema 3.5 (a umbrei continue).** *Fie $E$ şi $F$ spaţii metrice standard şi $f : D(f) \subset E \to F$. Funcţia $f$ este $S$-continuă în $E \times F$ dacă şi numai dacă există o funcţie standard continuă $^\circ f$ cu domeniul $D(^\circ f)$ care are următoarele două proprietăţi:*

1) *pentru orice $(x, f(x))$ aproape standard în $E \times F$, $^\circ x \in D(^\circ f)$.*

2) *pentru orice standard $x_0 \in D(^\circ f)$ şi orice $x \in D(f)$, dacă $x \simeq x_0$ atunci $f(x) \simeq {}^\circ f(x_0)$.*

# §4. $S$-diferenţiabilitate

Fie $E$ şi $F$ spaţii normate standard şi $f : D(f) \subset E \to F$, $D(f)$ deschis în $E$. Dacă $f$ este standard, $f$ este *strict diferenţiabilă* în punctul standard

$x_0$, dacă există o funcţie standard, liniară şi continuă $L : E \to F$ astfel încât pentru orice $x \in E$ limitat şi orice $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \simeq 0$ şi orice $x \simeq x_0$, are loc:

$$\frac{f(x+\varepsilon X) - f(x)}{\varepsilon} \simeq L(X), \ (\forall) X \text{ limitat.}$$

Vom examina $S$-proprietatea corespunzătoare:

**Definiţia 4.1.** Fie $E$ şi $F$ două spaţii normate standard. O funcţie $f : E \to F$ se numeşte *$S$-diferenţiabilă în punctul standard* $x_0$, cu diferenţiabila $L$, dacă $f$ este definită în orice punct $x \simeq x_0$, dacă $L : E \to F$ este o funcţie standard, liniară, continuă şi pentru orice $X$ limitat, orice $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \simeq 0$ şi orice $x \simeq x_0$ are loc:

$$\frac{f(x+\varepsilon X) - f(x)}{\varepsilon} \simeq L[X].$$

**Definiţia 4.2.** Fie $f$ o funcţie, $f : D(f) \subset E \to F$, $D(f)$ deschis standard în $E$. Funcţia $f$ se numeşte *$S$-diferenţiabilă* dacă ea este $S$-diferenţiabilă în orice $x_0$ standard pentru care $f(x_0)$ este aproape sta în $F$.

Următoarea teoremă arată că în mod analog cu funcţiile $S$-continue care sunt acelea care au o umbră continuă, funcţiile $S$-diferenţiabile sunt acelea care au o umbră diferenţiabilă.

Jean Louis Callot a sugerat că funcţiile $S$-continue sunt acelea care "par" continue iar funcţiile $S$-diferenţiabile sunt acelea care "par" diferenţiabile.

**Teorema 4.3 (a umbrei diferenţiabile).** *Fie $E$ şi $F$ spaţii standard normate şi fie $f$ o funcţie internă definită şi $S$-diferenţiabilă pe o submulţime deschisă standard $D(f) \subset E$, cu valori în $F$.*

*Umbra $°f$ a lui $f$ există, este definită pe o submulţime standard deschisă $D(°f)$ şi este de clasă $C^1$. Mai mult, pentru orice $x_0$ standard, $x_0 \in D(°f)$, diferenţiala $D(°f)(x_0)$ este $S$-diferenţiala lui $f$ în $x_0$.*

**Definiţia 4.4.** Fie $f : D(f) \subset E \to F$ o funcţie standard, $D(f) \subset E$ deschis standard. Fie $x_0 \in D(f)$ şi $A \subset D(f)$. Spunem că:

1) $f$ este de *clasă* $S^1$ *în* $x_0$ dacă şi numai dacă $f$ este $S$-continuă în $x_0$ şi $(\exists) l \in E$, standard, astfel încât $\dfrac{f(x)-f(x')}{||x-x'||} \simeq l$ pentru orice $x \simeq x_0$, $x' \simeq x_0$, $x \neq x'$ (pentru o anumită normă pe $E$);

2) $f$ este de clasă $S^1$ pe $A$ dacă şi numai dacă este de clasă $S^1$ în orice $x_0 \in A$;

3) $f$ este de clasă $C^1$ pe $A$ dacă şi numai dacă $f$ este continuă pe $A$ şi $(\forall) x_0 \in A$, $(\exists) l_{x_0} \in E$ standard astfel încât $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{||x-x_0||} \simeq l_{x_0}$, pentru orice $x \simeq x_0$, $x \neq x_0$; mai mult, dacă $l_{x_0} := f'(x_0)$, atunci funcţia standard $f' : A \to F$, $x_0 \to f'(x_0)$ este continuă;

4) $f$ este de clasă $S^\infty$ pe $A$ dacă şi numai dacă $f$ este de clasă $S^k$, pentru orice $k$ standard, $k \in \mathbf{N}$;

5) $f$ este de clasă $C^\infty$ pe $A$ dacă şi numai dacă $f$ este de clasă $C^k$ pe $A$, pentru orice $k$, standard $k \in N$.

**Teorema 4.5.** *Fie $k \in \boldsymbol{N}$ standard şi $f : D \subset E \to F$ o funcţie standard de clasă $S^k$ pe $A \subset D(f)$. Atunci umbra ${}^\circ f$ a lui $f$, este de clasă $C^k$ pe ${}^\circ A$ şi $({}^\circ f)^l(e) = {}^\circ(f^{(l)})$ pe ${}^\circ A$, pentru orice $l \leq k$.*

($f^{(l)}$ înseamnă derivata de ordin $l$).

*Demonstraţie.* Similar cu demonstraţiile Corolarelor 7.3.1 şi 7.3.2 din (D.R) pag. 121-122.

### 4.6. Noţiunea de $S$-teoremă

Este uşor de dedus din teorema umbrei continue faimoasa *Teoremă Ascoli* care asigură că orice familie uniform echicontinuă de funcţii de la un spaţiu compact la unul complet, are o închidere compactă, pentru norma uniformă.

Practic a arătat că în probleme privind convergenţa subşirurilor şirurilor uniform echicontinue, o aproximare nonstandard a unei probleme, înseamnă că introducând un astfel de sîr, conduce la (în locul unui subşir) studiul unei unice funcţii interne şi la umbra sa continuă.

În acest sens, teorema umbrei continue este *S-teorema lui Ascoli.*

Utilizatorii NSA, deseori lucrează cu aceste $S$-teoreme. De exemplu, teorema: Orice număr limitat, real, are o parte standard, poate fi considerată ca $S$-teorema Bolzano-Weiertrass (orice şir real mărginit are un subşir convergent).

# §5. Principiile de permanenţă

Principiile de permanenţă sunt rezultate specifice mulţimilor externe, folosite pentru manipularea acestora.

**5.1. Principiul lui Cauchy**:

*Nici o mulţime externă nu este internă.*

Acest principiu permite extinderea domeniului unui raţionament la un domeniu mai vast decât cel pe care el a putut fi verificat. Dacă o anumită proprietate internă $F(x)$ este adevărată pentru toate punctele infinit apropiate unui punct dat $x_0$, atunci ea este adevărată pentru toate punctele unei vecinătăţi finite a lui $x_0$.

De exemplu: presupunem că am stabilit că proprietatea internă $F(x)$ este adevărată pentru orice $x \simeq 0$. Atunci conform acestui principiu, ea este în mod necesar adevărată şi pentru anumiţi $x$ care nu sunt infinitezimali.

Într-adevăr, mulţimea numerelor reale care verifică $F(x)$ este o mulţime internă care conţine *hal* $(0)$, dar ea nu poate fi egală cu *hal* $(0)$ deoarece *hal* $(0)$ este o mulţime externă.

În general pentru a arăta că o mulţime este externă se poate proceda prin contradicţie, exprimând o mulţime externă cunoscută ca rezultatul unei construcţii interne, bazată pe mulţimea considerată. Dacă ar fi internă, atunci şi mulţimea cunoscută externă ar fi internă.

**Definiţia 5.2.** 1) Fie $H \subset E$; $E$ spaţiu metric, $H$ se numeşte *prehalo* dacă există o familie internă $(H_n)_{n\in J}$, $J$ standard, de submulţimi (interne) ale lui $E$ astfel încât

$$H = \bigcap_{n \in {}^\sigma J} H_n,$$

${}^\sigma J$ fiind mulţimea (externă) a elementelor standard din $J$.

2) Fie $G \subset E$; $G$ se numeşte *pregalaxie* dacă există o familie internă $(G_n)_{n \in J}$, $J$ standard, de submulţimi (interne) ale lui $E$, astfel încât

$$G = \bigcup_{n \in {}^\sigma J} G_n.$$

3) Un prehalo care este mulţime externă se numeşte *halo*. O pregalaxie care este mulţime externă se numeşte *galaxie*.

**Exemple**. 1) *hal* $(a)$, *hal* $(\infty)$ sunt halouri, $J = \mathbf{N}$ unde

$$H_n^a = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] \quad \text{pentru} \quad hal\ (a)$$

$$H_n^\infty = (-\infty, -n) \cup (n, \infty) \quad \text{pentru} \quad hal\ (\infty)$$

2) $\mathbf{G}$ şi $\mathbf{A}$ sunt galaxii unde $\mathbf{G} = \{x \in \mathbf{R} | x \text{ limitat }\}$, $\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{R} | x \text{ apreciabil}\}$. Luăm:

$$\left.\begin{array}{ll} G_n^{\mathbf{G}} = [-n, n] & \text{pentru} \quad \mathbf{G} \\ G_n^{\mathbf{A}} = \left(-n, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, n\right) & \text{pentru} \quad \mathbf{A} \end{array}\right., J = \mathbf{N}$$

**Propoziţia 5.3.** *Fie $f, g : E \to \boldsymbol{R}$ funcţii interne.*

*Dacă $H = \{x | f(x) \simeq 0\}$ este externă, atunci $H$ este halo.*

*Dacă $G = \{x | g(x) \text{ limitat }\}$ este externă, atunci $G$ este galaxie.*

*Presupunem că $E$ este spaţiu metric conex. Dacă $f$ (respectiv $g$) este continuă (respectiv $S$-continuă) şi ia atât valori apreciabile cât şi infinitezimale (respectiv nelimitate) atunci $H$ (respectiv $G$) este externă.*

**5.4. Principiul lui Fehrele**: *Nici un halo nu este o galaxie*

**Teorema 5.5. (Lema lui Robinson)**. *Dacă $(u_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ este un şir astfel încât $u_n \simeq 0$ pentru orice $n$ standard, atunci există $\omega$-infinit mare astfel încât $u_n \simeq 0$ pentru orice $n \leq \omega$.*

*Demonstraţie.* Se ştie din [Li] Corolarul I.2.6 că, dat un şir $(A_n)_{n\in^\sigma N}$ de mulţimi interne, atunci reuniunea $\bigcup\limits_{n\in^\sigma N}$ este internă dacă ea este egală cu $\bigcup\limits_{n\leq N} A_n$ pentru un anumit $N \in {}^\sigma\mathbf{N}$ = mulţimea externă a numerelor naturale standard.

Punem $G_n := \{1, 2, \ldots, n\} \subset {}^\sigma\mathbf{N}$. Atunci ${}^\sigma\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n\in^\sigma N} G_n$. Din rezultatul anterior, ${}^\sigma\mathbf{N}$ este galaxie, fiind o mulţime externă.

Fie $H := \{n \in \mathbf{N} | u_n \simeq 0\}$. Atunci $H = \bigcap\limits_{n\in^\sigma \mathbf{N}} H_n$ unde

$$H_n := \left\{m \in \mathbf{N} |\ |u_m| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Atunci $H$ este prehalo şi ${}^\sigma\mathbf{N} \subset H$.

Lema lui Robinson rezultă acum din Principiul lui Cauchy dacă $H$ este internă şi din Principiul lui Fehrele dacă $H$ este externă.

**Remarca 5.6.** 1) Complementara unui halo în orice mulţime internă este o galaxie şi reciproc.

2) Intersecţia sau reuniunea unui halo cu un prehalo este un prehalo.

3) Intersecţia sau reuniunea unei galaxii cu o pregalaxie este o pregalaxie.

4) Există mulţimi externe care nu sunt nici halouri nici galaxii, de exemplu: $\{x \in \mathbf{R} | 0 \underset{\simeq}{\leq} x \underset{\not\simeq}{<} 1\}$.

**Remarca 5.7.** Dacă $(R_-, R_+)$ este o tăietură a lui $\mathbf{R}$, adică $\mathbf{R} = R_- \cup R_+$ cu $r_- < r_+$ pentru orice $r_- \in R_-$ şi orice $r_+ \in R_+$, atunci una din cele două este un prehalo, cealaltă o galaxie ([Bg]).

Dacă tăietura este internă, ea caracterizează un număr real;

Dacă tăietura este externă, ea caracterizează un număr "extern".

**5.8. Principiul de separare.** *Dacă $G \subseteq H$, unde $G$ este o pregalaxie şi $H$ un prehalo, atunci există o mulţime internă $I$ astfel încât $G \subset I \subset H$.*

**Demonstraţie.** [D.R] pag. 74.

# Capitolul IV
# STUDIUL CU METODE NONSTANDARD AL SERIILOR FORMALE CONVERGENTE

Acest capitol este dedicat studiului prin metode nonstandard al corpurilor normate, nediscrete, complete, de caracteristică arbitrară, $K$.

In §1, prezentăm rezultate privind studiul topologic metric al lui $K^n$. Rezultatele sunt obţinute în contextul Analizei Robinsoniene, adaptând şi simplificând rezultate valabile unele şi în context mai general.

In §2, studiem serii formale convergente peste un corp $K$ precum cel de mai sus, generalizând substanţial punctul a) al unei teoreme a lui Robinson - Callot ([Fr]), de la **C** la $K^n$.

Dacă Robinson şi Callot folosesc pentru demonstraţie olomorfia, prin teorema lui Cauchy, noi folosim în schimb analiticitatea, corespunzător adaptată problemei în cauză.

Demonstraţia funcţionează în egală măsură în context Robinsonian şi IST.

## §1. Elemente de topologie nonstandard pe $K^n$. Topologie metrică

Fie $K$ un corp comutativ, normat, complet. Notăm cu $|\cdot|$ norma (valoarea absolută) de pe $K$.

Considerăm o suprastructură $M = \hat{S}$, cu mulţimea de bază $S$ infinită, destul de largă, astfel încât să conţină toate entităţile standard cu care lucrăm, adică $S = N \cup \mathbf{C} \cup K \cup \cdots$.

Fie $^*M$ o extindere, model nonstandard al lui $M$, cel puţin $\chi_1$ saturat. Asemenea modele saturate pot fi construite utilizând tehnica ultraproduselor.

Pentru modele $\chi_1$ saturate putem lua $^*M$ de forma $M^N/D$, ultraputerea lui $M$ relativ la un ultrafiltru neprincipal $D$ pe mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale.

Vom adopta terminologia folosită în [Ro 1] şi [Dv].

Sistemul de bază al Analizei nonstandard folosit aici este cel descris de Stroyan şi Luxemburg [SL], Martin Davis [Dv], original prezentat de Robinson şi Zakon [$RZ$], care poate fi înlocuit uşor de $IST$ introdus de Nelson [Ne] sau prin tehnici de ultraproduse. Aceste trei abordări ale Analizei nonstandard sunt echivalente în sensul că argumentele dintr-un sistem pot fi sistematic translatate în celălalt.

$^*M$ este astfel încât este satisfăcut Principiul Transferului "$*$- transformata oricărei afirmaţii matematice formalizate adevărată în $M$, trebuie să fie adevărată în $^*M$.

Fie corpul $K = (K, +, \cdot, 0, 1)$ intern în $^*M$ şi extiderea sa nonstandard $^*K$, $K \subset {}^*K$.

Axiomele care conferă lui $K$ o structură de corp au loc şi în $^*K$ deci şi $^*K$ este corp.

De exemplu, axioma:

$$\phi := \{(\forall x \in K, x \neq 0)(\exists y \in K), (xy = 1)\}$$

este adevărată în $K$, prin urmare, conform Principiului Transferului (P.T) este adevărată în ${}^*K$, $^*$ - transformata lui $\phi$, adică:

$$^*\phi := \{(\forall x \in {}^*K, x \neq 0)(\exists y \in {}^*K), (xy = 1)\}$$

Obiectul $K$, cu funcţia normă $|\cdot|$ se supune $*$ - transformatelor din ${}^*M$ ale definiţiilor uzuale. Astfel, ${}^*|\cdot|$ este o valoare absolută (normă) pe ${}^*K$, care este omogenă, satisface inegalitatea triunghiului şi face pe ${}^*K$ necomplet în sensul intern transformat în ${}^*M$.

$K$ - spaţiul vectorial $K^n, n$ standard, de dimensiune $n$, este normat , complet cu norma

$$\|x\| = \sup_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

Avem şi incluziunea strictă $K^n \subset {}^*(K^n)$, unde ${}^*(K^n)$ este ${}^*K$ - spaţiu vectorial, normat, necomplet de dimensiune $n$, conform Principiului Transferului. $({}^*(K^n), {}^*d)$ este spaţiu metric unde distanţa ${}^*d$ este extensia distanţei din spaţiul metric $K^n$. Topologia metrică a lui $K^n$ este definită specificând ca bază mulţimea bilelor deschise $B(p,r)$ de centru $p \in K^n$, rază $r \in R_+$

$$B(p,r) = \{q \in K^n \mid d(p,q) < r\}$$

Fie $D$ o mulţime deschisă şi internă din ${}^*(K^n)$. Pentru orice punct $p \in D$, există o bilă deschisă $B(p,r)$ astfel încât $D \supset B(p,r)$, deoarece aceasta este o proprietate a mulţimilor deschise din $K^n$, care poate fi formulată în limbajul $\mathcal{L}$ asociat lui $\mathcal{M}$ şi deci este adevărată şi în ${}^*(K^n)$.

Fie $\Omega$ mulţimea mulţimilor deschise din $K^n$. ${}^*\Omega$ va fi mulţimea mulţimilor deschise din ${}^*(K^n)$ şi este o mulţime standard. Elementele lui ${}^*\Omega$ sunt mulţimi interne în ${}^*(K^n)$. Mai mult, unele din ele sunt standard, având nume în $\mathcal{L}$ care sunt numele mulţimilor corespunzătoare din $K^n$. Astfel, dacă $U$ este o mulţime deschisă din $K^n$ şi ${}^*U$ este extensia nonstandard corespunzătoare din ${}^*(K^n)$, atunci ${}^*U$ este prin definiţie o mulţime standard. Mai mult, $U \subset^* U$.

In măsura în care ele pot fi formulate în $\mathcal{L}$, proprietăţile lui $\Omega$ sunt posedate de asemenea de $^*\Omega$ (unde este nevoie de o reinterpretare corespunzătoare).

Fie $\Gamma$ mulţimea bilelor deschise interne care sunt submulţimi ale lui $D$. Atunci $\Gamma$ este o mulţime internă.

Mulţimile interne deschise din $^*(K^n)$ constituie o bază pentru o topologie numită $Q$ - topologie $[Ro1]$ (pag.99)

Noţiunile topologie corespunzătoare se numesc $Q$ - noţiuni. Exemplu: $Q$ - interior, $Q$ - frontieră, mulţime $Q$ - deschisă etc. Au loc următoarele rezultate:

1. Fie $B$ internă, $B \subset {}^*(K^n)$. Atunci $B$ este $Q$ - deschisă dacă şi numai dacă este deschisă.

2. Inchiderea şi $Q$ - îchiderea unei mulţimi interne din $^*(K^n)$ coincid;

3. Interiorul şi frontiera unei mulţimi interne din $^*(K^n)$ coincid cu $Q$ - interiorul respectiv cu $Q$ - frontiera sa.

**Definiţia 1.1.** Un punct $p \in {}^*(K^n)$ se numeşte *finit* dacă există un punct standard $q \in K^n$, astfel încât $d(p,q)$ este finită (în $^*R$).

**Definiţia 1.2.** Un punct $p \in {}^*(K^n)$ se numeşte *infinitezimal*, dacă $\|p\|$ este infinitezimal în $^*R^+$.

Scriem $p \simeq q$ dacă $d_(p,q) \simeq 0$.

**Definiţia 1.3.** Fie $p \in^* (K^n)$. Numim *haloul metric* al lui $p$, notat $hal_(p)$ (sau monada lui $p$ notat $\mu(p)$), mulţimea externă:

$$hal(p) = \{q \in^* (K^n) \mid d(p,q) \simeq 0\}$$

**Definiţia 1.4.** Un punct $p \in^* (K^n)$ se numeşte *aproape standard în* $^*(K^n)$, dacă $p$ este în haloul unui punct standard $q$.

Astfel, un punct aproape standard din $^*(K^n)$ este finit. El posedă o unică parte standard(sau umbră) notată $^0p$.

Un spaţiu metric este mărginit dacă există un număr real $m$ astfel încât $d(p,q) \leq m$ pentru orice $p$ şi $q$ din acel spaţiu.

**Teorema 1.5.** *Spaţiul metric $K^n$ este mărginit dacă şi numai dacă toate punctele din $^*(K^n)$ sunt finite.*

**Demontraţie**. Presupunem $K^n$ mărginit. Fie $p \in {}^*(K^n)$ arbitrar şi $q$ standard. Atunci $d(p,q) \leq m$ pentru un anumit $m$ finit, deci $d(p,q)$ este finită.

Reciproc, presupunem $K^n$ nemărginit. Fie $q \in K^n$ fixat. Atunci în $K^n$ este adevărată afirmaţia: $\phi =$ "pentru orice număr real m există un punct $p$ astfel încât $d(p,q) > m$" (Astfel $K^n$ ar fi mărginit cu marginea 2m).

Afirmaţia $\phi$ poate fi formulată în $\mathcal{L}$, deci are loc şi în $^*M$. Alegând $m$ pozitiv, infinit din $^*R$, obţinem că $d(p,q)$ este infinită. Atunci $d(p,q')$ nu poate fi finită pentru orice $q'$ standard pentru care $d(q',q)$ este standard, deci finită deoarece

$$d(p,q) \leq d(p,q') + d(q',q);$$

teorema este demonstrată

* * *

**Teorema 1.6.** *Dacă spaţiul metric $K^n$ este compact atunci el este mărginit.*

**Demonstraţie**. Fie $p \in {}^*(K^n)$. Deoarece $K^n$ este compact, conform Th.4.1.13. [Ro 1], pag.93, rezultă că $p$ este aproape standard, deci $p$ este finit, deci $K^n$ este mărginit.

Condiţia ca $d(p,q)$ finită, defineşte o relaţie de echivalenţa în $^*(K^n)$. Această relaţie de echivalenţă împarte pe $^*(K^n)$ într-un număr de submulţimi disjuncte care se numesc *galaxiile* lui $^*(K^n)$. Punctele finite din $^*(K^n)$ constituie *galaxia* principală a lui $^*(K^n)$.

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset {}^*(K_n)$ un şir infinit şi $x_0 \in^* (K^n)$ standard.

Atunci $x_0$ este *limita sirului* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dacă şi numai dacă $x_n \simeq x_0$ pentru orice $n \in^* N$ infinit mare (nelimitat).

$x_0$ este *punct limită* pentru $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dacă $x_n \simeq x_0$ pentru un anumit $n \in^* N$, $n$ infinit mare.

**Definiţia 1.7.** Fie $B \subset {}^*(K^n)$ o mulţime internă sau externă. Se numeşte *umbra mulţimii* $B$, notat ${}^\circ B$, mulţimea:

$${}^\circ B = \{p \in K^n \mid \exists q \in^* (K^n)[q \in B] \wedge d(p,q) \simeq 0\} = \{p \in K^n \mid B \cap hal(p) \neq \emptyset\}.$$

**Teorema 1.8.** *Dacă $B \subset {}^*(K^n)$ este internă, atunci ${}^\circ B$ este închisă.*

**Demonstraţie**. Fie $p \in K^n, p \in \overline{{}^\circ B}$. Atunci bila $B(p, \frac{1}{2n})$, $n$ finit, conţine un punct $p' \in {}^\circ B$. Bila $B(p', \frac{1}{2n})$ conţine un punct $q \in B$. Atunci $d(p,q) < \frac{1}{n}$.

Fie $D = \{n \in \mathbf{N}/B \cap B(p, \frac{1}{n}) \neq \emptyset\}$. $D$ conţine toţi întregii pozitivi finiţi deci va conţine şi un număr întreg pozitiv infinit. Astfel, pentru un $n$ infinit mare, există $q_0 \in B$ astfel încât $d(p,q_0) < \frac{1}{n}$. Dar atunci $q_0 \in hal(p)$, $p \in {}^\circ B$.

**Teorema 1.9.** *Dacă $hal(p)$ este o mulţime internă, atunci $p$ este izolat.*

**Demonstraţie**. Presupunem că $hal(p)$ este internă. Fie

$$D = \{n \in \mathbf{N} \mid \forall q[[d(p,q) < \frac{1}{n}] \Longrightarrow [q \in hal(p)]]\}, \text{ internă}$$

Dacă $p$ nu este izolat, atunci $D$ nu poate conţine nici un număr natural finit $n$, deoarece în acest caz există un punct standard $q \neq p$ astfel încât $d(p,q) < \frac{1}{n}$.

Dar atunci $d(p,q)$ este număr pozitiv standard şi astfel $q \in hal(p)$. Deci $n \notin D$ . Pe de altă parte $D$ include toate numerele naturale infinite care formează o mulţime externă, contradicţie.

Observăm că dacă $p$ este izolat, atunci $hal(p) = \{p\}$.

Un şir Cauchy în $K^n$ este un şir $\{x_n\}_{n\geq 1}$, astfel încât

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0$$

**Teorema 1.10.** *Şirul $\{x_n\}_{n\geq 1}$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă toţi termenii $x_n$ aparţin aceluiaşi halou pentru orice $n$ infinit mare, $n \in {}^*\boldsymbol{N}$.*

**Teorema 1.11.** *Fie $p \in {}^*(K^n)$ care nu este aproape standard. Atunci există un standard $\varepsilon > 0$, a.î $d(p,q) \geq \varepsilon$ pentru orice punct standard $q$.*

**Demonstraţie**. Presupunem că nu există un astfel de $\varepsilon$. Pentru orice întreg finit pozitiv $n$, putem determina atunci un punct standard $q_n$ astfel încât $d(p, q_n) < \frac{1}{n}$. Atunci $\{q_n\}$ este şir Cauchy, deoarece

$$d(q_n, q_m) \leq d(q_n, p) + d(p, q_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Dar $K^n$ este complet, deci există un punct standard $q$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} q_n = q$, adică astfel încât $q_n \in hal(q)$, pentru orice $n$ nelimitat.

Deoarece $d(p, q_n) < \frac{1}{n}$ pentru orice $n$ finit, această inegalitate este adevărată deasemenea pentru un $m \in {}^*\mathbf{N}$, $m$ infinit. Pentru astfel de $m$, $d(p, q_m) \simeq 0$ şi în acelaşi timp $d(q_m, q) \simeq 0$ deoarece $q$ este punct standard $q = \lim_{n \to \infty} q_n$. Dar $d(p,q) \leq d(p, q_m) + d(q_m, q) \approx 0$, deci $d(p,q) \simeq 0$. Astfel $p \in hal(q), p$ este aproape standard, contradicţie.

**Definiţia 1.12.** Fie $p \in {}^*(K^n), r > 0$, standard. Numim $S$ - *bilă de centru $p$ şi rază $r$* şi o notăm $S(p,r)$ mulţimea

$$S(p,r) = \left\{ q \in^* (K^n) \mid^0 (d(p,q)) < r \right\}$$

Se arată uşor că orice punct din intersecţia a două $S$ - bile este centrul unei $S$ - bile care este inclusă în acea intersecţie.

Prin urmare $S$ - bilele pot constitui o bază pentru o topologie în ${}^*(K^n)$, numită $S$ - *topologie.*

Orice mulţime care este deschisă în $S$ - topologie este de asemenea deschisă în $Q$ - topologie, astfel că $Q$ - topologia este mai fină decât $S$ - topologia.

Vom indica noţiunile $S$ - topologiei punând prefixul $S$ termenului corespunzător; exemplu: $S$ - deschis, $S$ - interior, $S$ - frontieră.

**Teorema 1.13.** *1) Un halou este reuniunea bilelor deschise conţinute în el şi este deci o mulţime $Q$ - deschisă.*

*2) Un halou este de asemenea intersecţia tuturor $S$ - bilelor care îl conţin, deci este intersecţia tuturor mulţimilor $S$ - deschise care îl conţin.*

**Demonstraţie**. 1)Evident;

2) Fie $\mu_0$ un halou $\mu_0 = hal(p)$ cu $p \in {}^*(K^n)$. Pentru orice $q \in hal(p)$ şi orice $S$ - bilă $S(p,r)$ avem $q \in S(p,r)$ (deoarece ${}^0(d(p,q)) = 0 < r$). Dacă $q \notin hal(p)$ atunci ${}^0(d(p,q)) = r_0 > 0$, caz în care $q \notin S(p, r_0)$.

**Teorema 1.14.** *Fie $B$ o mulţime internă, $B \subset^* (K^n)$. Atunci $p \in S$ - interiorului lui $B$ dacă şi numai dacă $hal(p) \subset B$.*

**Demonstraţie**. Fie $p$ un punct din $S$ - interioul lui $B$. Atunci $S(p,r) \subset B$ pentru un anumit $r > 0$.

Dar $hal(p) \subset S(p,r)$.

Reciproc: Presupunem că $hal(p) \subset B$. Considerăm mulţimea internă

$$D = \left\{ n \in {}^*N \mid \forall q \left[ d(p,q) < \frac{1}{n} \right] \quad \Rightarrow (q \in B) \right\}$$

$D$ conţine toate numerele naturale infinite, rezultă că $D$ conţine de asemenea un număr natural pozitiv finit, $\gamma$.

Dacă $q \in S(p, \frac{1}{\gamma}) \Rightarrow d(p,q) < \frac{1}{\gamma}$.

Rezultă: $S(p, \frac{1}{\gamma}) \subset B$ deci p este în $S$ - interiorul lui $B$.

**Teorema 1.15.** *1)Fie $B \subset^* (K^n)$ internă. Atunci punctul $p$ aparţine $S$ - inchiderii lui $B$, dacă şi numai dacă $hal(p) \cap B \neq \emptyset$; 2)p aparţine $S$ - frontierei lui $B$ dacă şi numai dacă $hal(p) \cap B \neq \emptyset$ şi $hal(p) \cap C_{^*K_n} B \neq \emptyset$.*

Fie $p, q \in^* (K^n)$. Definim o relaţie $'' \simeq ''$ pe ${}^*(K^n)$ astfel. $p \simeq q$ dacă şi numai dacă $d(p,q) \simeq 0$ Relaţia $'' \simeq ''$ este o relaţie de echivalenţă pe ${}^*(K^n)$. Notăm $(K^n)_\mu$ structura cât ${}^*(K^n)/\simeq$. Punctele lui $(K^n)_\mu$ sunt halourile lui ${}^*(K^n)$.

Fie funcţa $\psi :^* (K^n) \longrightarrow (K^n)_\mu$, definită prin:

$$\psi(p) = hal(p) = \xi$$

Atunci mulţimile deschise din $(K^n)_\mu$ vor fi imaginile prin $\psi$ ale mulţimilor $S$ - deschise din ${}^*(K^n)$.

Spaţiul $K^n$, privit ca subspaţiu al lui ${}^*(K^n)$, este homeomorf prin $\psi$) cu subspaţiul $(K^n)_S$ al lui $(K^n)_\mu$ care constă din halourile care conţin puncte standard.

*Observaţie.* Toate punctele lui $(K^n)_S$ aparţin aceleiaşi galaxii şi $\psi$ este o izometrie pe $T$. Dacă $p \simeq p', q \simeq q'$, atunci $d(p,q) \simeq d(p',q')$. Deci: ${}^\circ(d(p,q)) = {}^\circ(d(p',q'))$, dacă $d(p,q)$ este finită.

Fie $\xi$ şi $\eta \in (K^n)_\mu$ astfel încât $d(p,q)$ este finită pentru orice $p \in \xi, q \in \eta$ (adică $p$ şi $q$ aparţin aceleiaşi galaxii).

Definim
$$d(\xi,\eta) = {}^0(d(p,q)).$$
De asemenea vom spune în acest caz că $\xi$ şi $\eta$ aparţin *aceleiaşi galaxii.* Astfel, galaxiile lui $(K^n)_\mu$ sunt imaginile prin $\psi$ ale galaxiilor din ${}^*(K^n)$. Se verifică uşor că funcţia $d(\xi,\eta) = {}^0(d(p,q))$ este o metrică pentru fiecare galaxie şi că topologia dată de această metrică coincide pentru fiecare galaxie $G$ cu topologia indusă de topologia lui $(K^n)_\mu$.

**Teorema 1.17.** *1) Orice galaxie din ${}^*(K^n)$ este atât $S$ - deschisă, cât şi $S$ - închisă.*

*2) Orice galaxie din $(K^n)_\mu$ este atât deschisă cât şi închisă.*

**Demonstraţie**. Fie $G$ o galaxie în ${}^*(K^n)$. Atunci $G = \bigcup_{p\in G} S(p,1)$, deci $G$ este $S$-deschisă. Complementara lui $G$ este reuniunea tuturor celorlalte galaxii care sunt deschise, deci $G$ este $S$-închisă.

2) Rezultă din faptul că $\psi$ duce mulţimi $S$ - deschise pe mulţimi deschise din definiţia topologiei lui $(K^n)_\mu$.

**Teorema 1.18.** $(K^n)_S$ *este închis în* $(K^n)_\mu$.

**Demonstraţie**. Fie $\xi$ un punct din complementara lui$(K^n)_S$ şi fie $p \in \xi$. Atunci $p$ nu este aproape standard .

Fie $\varepsilon > 0$, standard astfel încât $d(p,q) \geq \varepsilon$, pentru orice standard $q$, deoarece $K^n$ este complet.

Fie $B = S(\xi, \frac{1}{2}\varepsilon)$. Atunci $B$ nu conţine nici un punct din $(K^n)_S$. Astfel, reuniunea tuturor bilelor deschise care sunt disjuncte cu $(K^n)_S$, coincide cu complementara lui $(K^n)_S$, adică $(K^n)_S$ este închis.

Următoarea teoremă constituie un rezultat analog pentru cazul când $K^n$ nu este în mod necesar complet.

**Teorema 1.19.** *Inchiderile lui* $(K^n)_S$ *şi* $(K^n)_\mu$ *sunt izometrice cu completatul lui* $K^n$.

**Demonstraţie**. Fie $C$ completatul lui $K^n$ care constă din clasele de echivalenţă de şiruri Cauchy din $K^n$ în raport cu relaţia de echivalenţă:

$$\alpha \sim \beta, \text{dacă} \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0, \text{unde } \alpha = (p_n), \beta = (q_n).$$

Pentru a determina izometria cerută de la $C$ pe $(\overline{K^n})_S$ procedăm astfel:

Fie $c \in C$ şi $\alpha = \{p_n\}_{n\geq 1}$ un şir Cauchy, $\alpha \in C$. Atunci $p_n$ aparţine aceluiaşi halou $\mu_c$ pentru orice $n$ nelimitat. Mai mult, condiţia

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0$$

arată că dacă $\beta = \{q_n\}$ aparţine deasemenea lui $c$, atunci $d(p_n, q_n) \simeq 0$, pentru $n$ nelimitat şi astfel $q_n \in \mu_c$ pentru $n$ nelimitat.

Astfel relaţia $\mu_c = \psi(c)$ defineşte o aplicaţie: $C \longrightarrow (K^n)_\mu$.

Pentru orice $c$ dat, $\mu_c \in (\overline{K^n})_S$, deoarece, prin definiţia distanţei din $(K^n)_\mu$,

$$d(\mu_c, \mu_(p_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{şi } \mu(p_n) \in K^n_S.$$

In acelaşi timp se observă că puncte diferite ale lui $C$ sunt duse în puncte diferite din $\overline{(K^n)}_S$.

In continuare, fie $\mu_0 \in \overline{(K^n)_S}$ şi fie $p \in \mu_0$. Pentru orice $n$ intreg standard, pozitiv, există un punct $q_n$ al lui $K^n$ astfel încât $d(p, q_n) < \frac{1}{n}$. Se arată că şirul $\beta = \{q_n\}$ este un şir Cauchy.

Mai mult, $d(p, q_n) \simeq 0$ pentru $n$ nelimitat, astfel că dacă $\beta$ este un element al punctului $c$ din $C$, atunci $\mu_0 = \psi(c)$.

Aceasta arată că aplicaţia este de la $C$ pe $\overline{(K^n)_S}$ şi se verifică că este o izometrie.

Următoarea noţiune este legată de $S$-topologie.

**Definiţia 1.20** Fie $\{p_n\}_{n\geq 1}$ un şir (intern sau extern) din $^*(K^n)$ şi $p \in {}^*(K^n)$. Spunem că $p$ este o $F$ - *limită* a şirului $\{p_n\}_{n\geq 1}$ , dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, standard, există un număr natural finit $\gamma$ astfel încât $d(p, q_n) < \varepsilon$ pentru orice $n > \gamma, n$ finit.

Dacă $p$ este o $F$ - limită pentru $\{p_n\}$, atunci orice alt punct $p' \in hal(p)$ este tot $F$ - *limită* pentru $p_n$ şi reciproc, oricare două $F$ - limite ale lui $\{p_n\}$ aparţin aceluiaşi halou.

Dacă $p_n$ este un şir intern, faptul că $p$ este $F$ - limită pentru $p_n$ afectează comportarea şirului până la un indice infinit după cum se arată în teorema:

**Teorema 1.21.** *Fie $\{p_n\}_{n\geq 1}$ un şir intern şi $p$ o $F$ - limită pentru $\{p_n\}_{n\geq 1}$. Atunci există un număr natural nelimitat $\lambda$ astfel încât $p_n \simeq p$ pentru orice $n < \lambda$, $n$ nelimitat.*

**Demonstraţie**. Definim un şir intern de numere reale pozitive $\{S_n\}_n \geq 1$, prin $S_n = d(p_n, p)$.

Din ipoteză rezultă că pentru orice număr întreg pozitiv $k$, finit, există un întreg pozitiv finit $\gamma_k$ astfel încât $S_n < \frac{1}{k}$ pentru orice $n > \gamma_k$, $n$ finit.

Putem presupune că $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots\ldots < \ldots\ldots$

Vom defini apoi un şir standard $\{t_n\}$

$$t_n = \begin{cases} 0, & n \leq \gamma_1 \\ \dfrac{1}{k} & \gamma_k < n < \gamma_{k+1} \end{cases}$$

Astfel $t_n$ este definit pentru orice $n$ finit şi apoi trecând de la $M$ la extinderea nonstandard $^*M$, pentru orice $n$ infinit.

Atunci, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ şi deci $t_n \simeq 0$ pentru $\forall n \simeq \infty$.

De asemenea, mulţimea:

$$D = \{n \in {}^*N | t_n \geq S_n\}$$

include toate numerele naturale mai mari decît $\gamma_1$.

Deoarece $D$ este mulţime internă, $D$ trebuie să includă deasemenea, toate numerele infinite, mai mici decât un anumit $\lambda$ infinit (mare).

Astfel, $S_n \simeq 0$ pentru $n < \lambda$ şi deci $p_n \simeq p$ pentru $n < \lambda$.

**Teorema 1.22.** *Fie $f : D \subset {}^*(K^n) \longrightarrow {}^*(K^m)$ o funcţie standard, $n, m$ standard $\in^* N, D =^* B$, cu $D$ standard. Fie $p \in \overline{D}$ punct standard.*

*Atunci:*

1. $\lim_{x\to p} f(x) = s$, dacă şi numai dacă

   $$f(hal(p) \cap (D - \{p\})) \subset hal(s)$$

   *unde $s \in^* (K^m)$ standard.*

2. *Funcţia $f$ este continuă în $p$ dacă şi numai dacă*

   $$f(hal_(p) \cap D) \subset hal(f(p))$$

3. *$f$ este uniform continuă pe $D$ dacă şi numai dacă*

   $$f(p) \simeq f(q), \quad (\forall) p \simeq q \quad p, q \in D.$$

Pentru $B$ compactă, continuitatea implică uniform continuitatea.

Intr-adevăr, în acest caz, orice puncte $p, q \in {}^*B$ sunt aproape standard deci finite, adică au o umbră. Dacă $p \simeq q \quad p, q \in D$, atunci $p \simeq q \simeq p_0, p_0 \in B$ standard.

Atunci $f(p) \simeq f(p_0) \approx f(q)$, deci $f$ este uniform continuă.

In continuare vom considera funcţii $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$ nonstandard definite pe submulţimi $D$ ale lui ${}^*(K^n)$ cu valori în ${}^*(K^m)$.

Arătăm că, $S$-topologia furnizează rezultate ce au aplicaţii clasice.

**Definiţia 1.23.** Funcţia internă $f$ se numeşte $S$ - *mărginită* pe $D \subset^* B$ dacă $f$ este definită pe $B$ şi dacă există $q \in^* (K^m)$ şi un număr standard $M$, astfel încât

$$d(f(p), q) \leq M, \quad \forall p \in D.$$

**Teorema 1.24.** *Funcţia internă $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$ este $S$ - mărginită pe $D$ (internă) dacă şi numai dacă toate punctele lui $f(D)$ aparţin aceleiaşi galaxii în ${}^*(K^m)$*

**Demonstraţie**. Condiţia este necesară. Se verifică uşor. Ea este şi suficientă. Presupunem că $f$ nu este $S$ - mărginită pe $D$. Considerăm mulţimea internă:

$$F = \{n \in^* \mathbf{N} \mid \forall q \in {}^*(K^n), \exists p \in D \quad \text{şi} \quad d(f(p), q) > n\}$$

$F$ conţine toate numerele naturale finite, prin urmare trebuie să conţină şi un număr natural, nelimitat, $\gamma$. Alegem $p_0 \in D$, arbitrar şi fie $q = f(p_0)$. Atunci $d(f(p), f(p_0)) > \gamma$ pentru $p \in D$, ceea ce înseamnă că $f(p)$ şi $f(p_0)$ aparţin unor galaxii diferite ceea ce contrazice ipoteza.

Fie $f$ o funcţie internă al cărei domeniu de definiţie conţine un halou $\mu_0$.

Fie $p \in \mu_0, \mu_0 = hal(p)$. Atunci există un standard $\varepsilon > 0$ astfel încât $f$ este definită pentru orice $q$ astfel încât $d(p, q) \leq \varepsilon$, (deoarece $f$ este definită pentru orice $q$ cu $d(p, q) \leq \frac{1}{n}$) $n$ infinit şi astfel mulţimea $\{n/f$ este definită pentru orice $q$ cu $d(p, q) \leq \frac{1}{n}\}$, conţine deasemenea numere finite.

**Teorema 1.25.** *Presupunem că funcţia internă $f$ este definită pe un halou, $\mu_0 = hal(p)$ astfel încât $f(\mu_0)$ este o submulţime a unei galaxii $G$. Atunci există un $\varepsilon$ standard $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(B) \subset G$ unde $B$ este bila închisă $B = \{q \mid d(p, q) \leq \varepsilon\}$.*

**Demonstraţie**. Fie $h(q) = d(f(p), f(q)) \cdot d(p,q)$. Pentru $\forall q \in \mu_0, h(q) \simeq 0$ deoarece $d(f(p), f(q))$ este finită şi $d(p,q) \approx 0$.

Astfel, "$h(q) < 1$ pentru orice $q$ astfel încât $d(p,q) \leq \frac{1}{n}$" este adevărată pentru orice $n$ infinit, deci va fi adevărată şi pentru un număr pozitiv finit $n = \gamma$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$. Atunci pentru $q \notin \mu_0, d(p,q) \not\simeq 0$ şi $\frac{1}{d(p,q)}$ este finită. Deci, pentru $q \notin \mu_0, d(p,q) \leq \varepsilon$, are loc:

$$d(f(p), f(q)) = \frac{1}{d(p,q)} \cdot h(q) < \frac{1}{d(p,q)},$$

deci este finită adică $f(p)$ şi f(q) aparţin aceleiaşi galaxii.

**Definiţia 1.26.** Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$ $D \subset {}^*(K^n)$ internă, $p$ un punct din $S$ - închiderea lui $D$. Spunem că punctul $s \in {}^*(K^m)$ este o $S$ - *limită* pentru $f$ când $x$ tinde către $p$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ standard, $(\exists)\delta > 0$, standard astfel încât $d(f(q), s) < \varepsilon$ pentru orice $q \in D \backslash \{p\}$ pentru care $d(p,q) < \delta$

**Teorema 1.27.** *In condiţiile de mai sus, punctul $s$ este o $S$ - limită a lui $f$ când $x$ tinde către $p$ dacă şi numai dacă:*

$$f(hal(p) \cap (D - \{p\})) \subset hal(s)$$

**Demonstraţie**. Presupunem că $s$ este $S$ - limită a lui $f$. Dacă $q \in hal(p)$, atunci $d(p,q) < \delta$ pentru orice $\delta$ standard pozitiv. Dacă $q \in D \backslash \{p\}$ , atunci $d(f(q), s) < \varepsilon$ pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deci $f(q) \in hal(s)$.

Condiţia este şi suficientă.

Fie $\varepsilon > 0$, standard. Atunci afirmaţia "$d(f(q), s) < \varepsilon$ pentru orice $q \in D \backslash \{p\}$ pentru care $d(p,q) < \frac{1}{n}$" unde $n$ este infinit, deoarece pentru acest $n$, $q \in hal(p)$. In acest caz afirmaţia este adevărată şi pentru un $n$ finit $\gamma$.

Luăm $\delta = \frac{1}{\gamma}$. Rezultă că $s$este $S$ limită pentru $f$.

**Observaţie 1.28.** Dacă $s$ este $S$ limită pentru $f$când $x$ tinde către $f$, atunci orice punct din $hal(s)$ este o $S$ - limită pentru $f$ când $x$ tinde la orice punct din $hal(p)$.

**Definiţia 1.29.** Fie $f : D \subset {}^*(K^n) \longrightarrow {}^*(K^m)$. Spunem că $f$ *este continuă* în punctul $p \in D$ dacă $f(p)$ este o $S$ - limită a lui $f$ când $x$ tinde la $p$ în $D$.

Echivalent, $f$ *este* $S$ - *continuă în* $p$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ standard există $\delta > 0$ standard astfel încât $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$ pentru orice $q \in D$ astfel încât $d(p,q) < \delta$.

**Teorema 1.30.** *Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$, $D$ internă, $D \subset {}^*(K^n)$, $f$ este $S$ - continuă în $p \in D$ dacă şi numai dacă $f(hal(p) \cap D) \subset hal(f(p))$.*

**Remarca 1.31.** $S$ - continuitatea şi Continuitatea coincid pentru funcţii standard definite pe mulţimi standard, în puncte standard. In general aceste noţiuni sunt distincte.

**Exemplu**:

1. $f : {}^*R \longrightarrow {}^*R$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0,\ \alpha \simeq 0,\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

   $f$ este internă, $f$ este $S$ - continuă în 0 dar $f$ nu este continuă în 0.

   $f$ este $S$ - continuă în 0

2. 

$$f : {}^*R \longrightarrow {}^*R, \quad f(x) = x^2$$

   $f$ este continuă în $x = \omega \simeq \infty$

   $f$ nu este $S$-continuă în $x = \omega \simeq \infty$

**Definiţia 1.32.** Fie $f : D \subset {}^*(K^n) \longrightarrow {}^*(K^m)$. Spunem că $f$ este *uniform* $S$ - *continuă* în $D$ dacă pentru orice $\varepsilon > o$ standard, există un $\delta$ standard $\delta > 0$ astfel încât $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$ pentru orice puncte $p, q \in D$, pentru care $d(p,q) < \delta$.

**Teorema 1.33.** *Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$, $\quad D \subset {}^*(K^n)$ internă, $f$ internă. $f$ este $S$ - continuă în $D$. Atunci $f$ este uniform $S$ - continuă pe $D$.*

**Demonstraţie**. Fie $p, q \in D$, $p \simeq q$. Atunci $f(p) \simeq f(q)$. Fie $\varepsilon > 0$ standard şi mulţimea internă

$$F = \{n \in {}^*N \mid \forall p \in D \text{ şi } \forall q \in D \text{ cu } d(p,q) < \frac{1}{n} \Longrightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon\}$$

$F$ include toate numerele naturale infinite, deci conţine un întreg pozitiv finit $\gamma$. Luând $\delta = \frac{1}{\gamma}$ se verifică că $f$ satisface condiţia de uniform $S$ - continuitate pe $D$.

**Teorema 1.34.** *Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$, $D \subset {}^*(K^n)$, $S$ conexă (adică conexă în $S$ - topologie) şi $fS$ - continuă. Atunci $f(D)$ este inclusă în aceeaşi galaxie din ${}^*(K^m)$.*

**Demonstraţie**. Fie $p \in D$. Arătăm că pentru orice $q \in D$, $d(f(p), f(q))$ este finită. Fie:

$$F = \{q \in D \mid d(f(p), f(q)) \text{ finită}\}$$

Atunci $p \in F$. Pentru orice $q \in F$, $f$ este $S$-continuă în $q \in D$, deci $\exists \varepsilon_q > 0$ standard astfel încât ${}^0d(f(q), f(r)) < 1, \forall r \in D$, pentru care ${}^0d(q,r) < \varepsilon_q$.

Pentru astfel de $r$, are loc:

$$d(f(p), f(r)) \leq d(f(p), f(q)) + d(f(q), f(r)) \leq d(f(p), f(q)) + 1.$$

Astfel încât $r \in F$ şi deci $F$ este reuniune de mulţimi $S$ - deschise în $D$ deci ea însăşi este $S$ - deschisă în $D$.

Dacă $F = D$ este evident.

Dacă $F \underset{\neq}{\subset} D$, fie $H = \{r \in D \mid \exists q \in D \mid F$ astfel încât $d(f(q), f(r))$ este finită$\}$

Atunci $H \supset D \setminus F$. La fel ca mai sus rezultă că $H$ este $S$ - deschisă în $D$, $F$ şi $H$ sunt disjuncte deoarece dacă ar exista $r \in H \cap F$ atunci $d(f(p), f(r))$ ar fi finită şi cum $d(f(q), f(r))$ este finită pentru un anumit $q \in D \setminus F$ ar rezulta că $d(f(p), f(q))$ este finită. Rezultă $q \in F$, contradicţie.

Deci $H = D \setminus F$.

Obţinem că $D$ este reuniunea a două mulţimi disjuncte $F$ şi $H$ care sunt $S$ - deschise în $D$ ceea ce contrazice că $D$ este $S$ - conexă.

Prin urmare $F = D$ şi deci $d(f(p), f(q))$ este finită pentru orice $p$ şi $q$ din $D$.

**Definiţia 1.35.** (Umbra unei funcţii pe$^*(K^n)$).

Fie $f : D \subset {}^*(K^n) \longrightarrow {}^*(K^m)$

Vom defini o funcţie standard ${}^0f$, numită *umbră* sau *partea standard a lui* $f$ pe o anumită submulţime a lui ${}^0D$ după cum urmează:

Dat $p \in {}^0D$, presupunem că există un punct $q \in K^m$ deci şi în ${}^*(K^m)$ astfel încât $f(p') \simeq q$ pentru orice $p' \in hal(p) \cap D$.

Definim atunci ${}^0f(p) = q$.

Fie $D' \subset {}^0D$ mulţimea punctelor în care ${}^0f$ este definită în acest fel.

Trecând în ${}^*M$, obţinem o definiţie a lui ${}^0f$ pe ${}^*D'$.

**Teorema 1.36.** *Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$, $f$ internă, $D$ internă, astfel încât $f$ ia numai valori aproape standard pe $D$ şi este $S$ - continuă pe $D$. Atunci funcţia ${}^0f$ există şi este uniform continuă pe ${}^0D$.*

**Demonstraţie**. Fie $p \in {}^0D$ deoarece $f$ este $S$ - continuă pe $D$, atunci pentru orice două puncte $p_1, p_2 \in D \cap hal(p)$, $f(p_1) \simeq f(p_2) \simeq f(p)$. Mai mult $f(p_1)$ este aproape standard, deci ${}^0f(p) = {}^0(f(p_1)) = {}^0(f(p_2))$.

Acest lucru arată că ${}^0f$ *este definită pe* ${}^0D$.

Fie $\varepsilon$ numă pozitiv standard. Deoarece $f$ este $S$ - continuă pe $D$, ea este $S$ - uniform continuă pe D.

Rezultă că există un standard $\delta > 0$ astfel încât $d(f(p_1), f(q_1)) < \varepsilon$ pentru orice $p_1$ şi $q_1 \in D$, astfel încât $d(p_1, q_1) < \delta$.

Afirmăm că în acelaşi timp $d({}^0f(p), {}^0f(q)) < 2\varepsilon$ pentru orice $p$ şi $q \in {}^0D$ astfel încât $d(p, q) < \delta$.

Într-adevăr, fie $p, q$ puncte ale lui ${}^0D$ care satisfac această condiţie.

Din definiţia lui $^0D$ există puncte $p_1 \in hal(p), q_1 \in hal(p)$ care aparţin lui $D$. Atunci $p \simeq p_1, q \simeq q_1$ şi deci din inegalitatea triunghiului $d(p,q) \simeq d(p_1,q_1)$. Aceasta arată că $d(p_1,q_1) < \delta$. Deci din definiţia lui $\delta$, $d(f(p_1), f(q_1)) < < \varepsilon$. Dar $^0f(p) \simeq f(p_1)$ şi $^0f(q) \simeq f(q_1)$ şi astfel, tot din inegalitatea triunghiului $d(^0f(p),^0 f(q)) \simeq d(f(p_1), f(q_1))$

Rezultă că $d(^0f(p),^0 f(q)) < 2\varepsilon$, deci $^0f$ este uniform continuă pe $^0D$.

*Observaţia 1.37.* Fie $f : D \longrightarrow {}^*(K^m)$, $f$ funcţie $S$ - continuă, $D$ - $S$ - conexă internă;

Fie $p \in^0 D$ şi fie $q \in hal(p), q \in D \cap {}^*(^0D)$. Atunci $^0f(p) \simeq f(q)$ din definiţia lui $^0f$. $^0f(q) \simeq^0 f(p)$ din continuitatea lui $^0f$. Deci $^0f(q) \simeq f(q)$ adică $^0f(q) =^0 (f(q))$.

## §2. O exprimare echivalentă pentru seriile convergente peste corpuri comutative normate complete

Vom nota cu $K$ un corp comutativ normat, complet (arhimedian sau nearhimedian). Notăm cu $|\cdot|$ norma (valoarea absolută) de pe $K$.

**Exemple**. 1) $K = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$, $K$ corp valuat (complet).

2) $K$ corp comutativ.

Norma $|x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ se numeşte *norma discretă*, deoarece dă pe $K$ topologia discretă.

In continuare vom presupune $K$ corp comutativ, normat, nediscret, complet.

Fie $\Gamma_n := K[[X_1, \ldots, X_n]]$ inelul seriilor formale 'in $n$ variabile; dac'a $f \in \Gamma$, atunci

$$f = \sum_{m \in \mathbf{N}^n} a_m X^m$$

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},\ m = (m_1, \ldots, m_n),\ X^m = X_1^{m_1} X_2^{m_2} \ldots X_n^{m_n}.$$

Fie $I = (0, \infty) \subset \mathbf{R}$. Dacă $\alpha \in I^n$, punem

$$||f||_\alpha := \sum_{m \in \mathbf{N}^n} |a_m| \alpha^m \in I \cup \{\infty\}$$

cu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha^m := \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{m_n}$.

Fie $\Lambda_n := \{f \in \Gamma_n | (\exists)\alpha \in I^n \text{ cu } ||f||_\alpha < \infty\}$ inelul seriilor (formale) convergente.

**Exemple**. 1) $f = \dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots \in \Lambda_1$.

2) $f = e^X = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!} + \ldots \in \Lambda_1$.

**Remarca 2.1.** Incluziunea $\Lambda_n \subset \Gamma_n$ este un morfism de $K$-algebre. Mai mult $\Lambda_n \underset{\neq}{\subset} \Gamma_n$ deoarece $K$ este nediscret. Pentru $m \in \mathbf{N}^n$, notăm cu

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m} = \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n}}{\partial X_1^{m_1} \ldots \partial X_n^{m_n}}$$

operatorul de derivare parţială formală.

Conform [ACJ], p. I, th. 4.4., $f \in \Lambda_n \Rightarrow \dfrac{\partial^{|m|} f}{\partial X^m} \in \Lambda_n$. Mai precis, dacă pentru $\alpha \in I^n$ notăm cu

$$(\alpha) := \{a \in K^n | \ |a_i| < \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}\},$$

numim *domeniul de convergenţă* al lui $f \in \wedge_n$ mulţimea

$$D(f) := \bigcup_{\alpha \in I^n, ||f||_\alpha < \infty} (\alpha).$$

Avem $\{0\} \underset{\neq}{\subset} D(f)$ (căci $K$ este nediscret), $||f||_\alpha < \infty$. În plus

$$D(f) \subset D\left(\frac{\partial^{|m|} f}{\partial X^m}\right), \quad (\forall) m \in \mathbf{N}^n.$$

**Definiţia 2.2.** Dacă $f \in \Lambda_n$, $f = \sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a_m X^m$, notăm cu $\tilde{f}$ funcţia asociată $\tilde{f} : D(f) \to K$, dată de

$$\tilde{f}(x) = \sum_{m \in \mathbf{N}^n} a_m x^m,\ x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},\ (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in D(f).$$

O astfel de funcţie se numeşte *funcţie analitică peste $K$ în origine.*

**Remarca 2.3.** Seria $\sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} a_m x^m$ este convergentă în $K$. Într-adevăr, cum $x \in D(f)$, $(\exists)\alpha \in I^n$ cu $x \in (\alpha)$ şi $||f||_\alpha < \infty$; dar

$$\sum_{m \in \mathbf{N}^n} |a_m|\ |x|^m < \sum_{m \in \mathbf{N}^n} |a_m| \alpha^m = ||f||_\alpha < \infty.$$

$(|x|^m := |x_1|^{m_1} \dots |x_m|^{m_n})$; deci seria $\sum\limits_{n \in N^n} a_m x^m$ este convergentă, fiind absolut convergentă iar $K$ complet.

* * *

Fie $\mathcal{S} = (P_l)_{l \in \mathbf{N}}$ un şir de polinoame. $P_l \in R_n := K[X_1, \dots, X_n] \subset \Lambda_n$.

$R_n$ este inel graduat.

$R_n = \bigoplus\limits_{s=0}^{\infty} R_{(s)}$ cu $R_{(s)} = \{P \in R_n | P \text{ omogen de grad } s\} \cup \{0\}$.

Considerăm următoarele condiţii relativ la $S$:

$(C_1)$: $P_0 \in K$.

$(C_2)$: $P_{l+1} - P_l \in R_{l+1}$, $(\forall) l \in \mathbf{N}$.

$(C_3)$: $(\exists)\alpha \in I^n$, $(\exists) A_\alpha \in R$, $A_\alpha > 0$ astfel încât $||P_l||_\alpha \leq A_\alpha$, $(\forall) l \in N$.

Fie $\Lambda_n' := \{\mathcal{S} = (P_l)_{l \in \mathbf{N}} | P_l \in R_n,\ (\forall) l \in \mathbf{N} \text{ şi } \mathcal{S} \text{ satisface } (C_1), (C_2), (C_3)\}$.

Înmulţirea canonică cu scalari din $K$ şi adunarea pe componente conferă lui $\Lambda_n'$ o structură naturală de $K$-spaţiu vectorial.

Dotăm $\Lambda_n'$ şi cu o înmulţire, astfel:

Dacă $\mathcal{S}_p = (P_l)_{l \in \mathbf{N}}$ şi $S_Q = (Q_l)_{l \in \mathbf{N}}$, $S_p \in \Lambda_n'$, $S_Q \in \Lambda_n'$, atunci definim

$$S_p \cdot S_Q := (T_l)_{l \in \mathbf{N}},$$

cu

$$T_l := \sum_{k=0}^{l}\left[\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}(P_i - P_{i-1})(Q_j - Q_{j-1})\right], \quad P_{-1} = Q_{-1} := 0.$$

Atunci $S_p \cdot S_Q \in \Lambda'_n$ pentru $(C_3)$ se foloseşte faptul că

$$\alpha \leq \beta (\Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i,\ i = \overline{1,n}) \Rightarrow ||f||_\alpha \leq ||f||_\beta$$

şi că
$$||fg||_\alpha \leq ||f||_\alpha \cdot ||g||_\alpha$$
conform [ACJ] p. I. th. 4.1, 1) şi 3). În acest mod (
$Lambda'_n, +, \cdot)$ devine $K$-algebră.

**Propoziţia 2.4.** $\Lambda_n \simeq \Lambda'_n$ morfism de $K$-algebre.

**Demonstraţie**. a) Fie $f \in \Lambda_n$, $f = \sum\limits_{m\in\mathbf{N}^n} a_m X^m$. Atunci $(\exists)\alpha \in I^n$ astfel încât $||f||_\alpha < \infty$. Pentru $l \in N$, punem $P_l := \sum\limits_{|m|\leq l} a_m X^m$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$.

Fie $\mathcal{S}_f := (P_l)_{l\in\mathbf{N}}$. Evident, $\mathcal{S}_f$ satisface $(C_1)$ şi $(C_2)$, iar pentru $(C_3)$ este suficient să observăm că $||P_l||_\alpha \leq ||f||_\alpha$, $(\forall)l \in \mathbf{N}$, deci luăm $A_\alpha = ||f||_\alpha$.

Se vede uşor că $\mathcal{S}_{\lambda f} = \lambda \mathcal{S}_f$, $\lambda \in K$, $\mathcal{S}_{f+g} = \mathcal{S}_f + \mathcal{S}_g$ şi $\mathcal{S}_{f\cdot g} = \mathcal{S}_f \cdot \mathcal{S}_g$, $(\forall) f, g \in \Lambda_n$. Prin urmare $\Lambda_n \xrightarrow{\varphi} \Lambda'_n$, $\varphi(f) = \mathcal{S}_f$ este *morfism de $K$-algebre*.

b) Fie $\mathcal{S} = (P_l)_{l\in\mathbf{N}} \in \wedge'_n$. Considerăm atunci, conform cu $(C_1)$ şi $(C_2)$ seria formală

$$f = f_\mathcal{S} = P_0 + \sum_{l=0}^{\infty}(P_{l+1} - P_l).$$

Demonstrăm că, de fapt, $f$ este convergentă, adică $f \in \Lambda_n$. Într-adevăr, conform $(C_3)$, $(\exists)\alpha \in \mathbf{N}^n$, $(\exists)A_\alpha > 0$, astfel încât $||P_l||_\alpha \leq A_\alpha$, $(\forall)l \in \mathbf{N}$. Dar $P_l = P_0 + \sum\limits_{s=0}^{l-1} P_{s+1} - P_s = \sum\limits_{|m|\leq l} a_m X^m$, conform cu $(C_1)$ şi $(C_2)$. Deci $\sum\limits_{|m|\leq l} |a_m|\alpha^m \leq A_\alpha$, $(\forall)l \in \mathbf{N}$. Făcând $l \to \infty$, obţinem $||f||_\alpha \leq A_\alpha < \infty$, deci
$f \in \wedge_n$. În plus,

$$f_{\lambda\mathcal{S}} = \lambda f_\mathcal{S},\ \lambda \in K,\ f_{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2} = f_{\mathcal{S}_1} + f_{\mathcal{S}_2},\ f_{\mathcal{S}_1\cdot\mathcal{S}_2} = f_{\mathcal{S}_1}\cdot f_{\mathcal{S}_2},\ \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \wedge'_n,$$

după cum se verifică uşor. Deci asocierea $\Lambda'_n \xrightarrow{\psi} \Lambda_n$, $\psi(\mathcal{S}) = f_{\mathcal{S}}$ este morfism de $K$-algebre.

c), d) Totul rezultă acum din egalităţile uşor de verificat: $f_{\mathcal{S}_f} = f$, $\mathcal{S}_{f_\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

* * *

**Remarca 2.5.** Izomorfismul din Propoziţia 1.4 este functorial, adică $(\forall)K \xrightarrow{u} L$ morfism de corpuri comutative, normate, complete, ($u$ mărginit: $(\exists)a > 0$, astfel încât $|u(x)| \leq a|x|_K$, $(\forall)x \in K$), următoarea diagramă canonică este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n,k} & \xrightarrow{\sim} & \Lambda'_{n,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_{n,L} & \xrightarrow{\sim} & \Lambda'_{n,L} \end{array}$$

izomorfismele fiind acelea din Propoziţia 2.4. Deci putem scrie $\Lambda_n = \Lambda'_n$.

**Definiţia 2.6.** Un şir $(P_l)_{l\in N} \in \Lambda'_n$ îl vom numi în continuare *f-şir*, unde $f$ este seria convergentă asociată.

Fie $\alpha, \beta \in I^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$; scriem $\beta << \alpha$ dacă $\beta_i < \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$.

Considerăm $K$-spaţiul vectorial normat

$$\Lambda_{n,\alpha} := \{f \in \Lambda_n | ||f||_\alpha < \infty\}.$$

**Teorema A1** ([ACJ], Corolar 2, pag. 41), *Dacă $\beta << \alpha$, injecţia $\Lambda_{n,\alpha} \longleftrightarrow \Lambda_{n,\beta}$ este completă (K complet) (adică orice şir $(f_l)_{l\in \mathbf{N}}$ Cauchy în $||\cdot||_\alpha$ este convergent în $||\cdot||_\beta$).*

**Teorema A2**. ([ACJ]), Teorema 4.4, pag. 43): *Dacă $f \in \Lambda_n$ şi $\alpha \in I^n$ cu $||f||_\alpha < \infty$, atunci $(\forall)\beta \in I^n$ cu $\beta << \alpha$, $(\exists)\mu > 0$ astfel încât $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_\beta \leq \mu||f||_\alpha$ ($\mu$ nu depinde de $f \in \Lambda_{n,\alpha}$).*

**Corolar 2.7.** Via izomorfismul din Prop. 2.4, dacă $f$ este dată de $f$-şirul $(P_l)_{l\in\mathbf{N}}$, atunci $\dfrac{\partial^{|m|} f}{\partial X^m}$ este dată de $\dfrac{\partial^{|m|} f}{\partial X^m}$ - şirul $\left(\dfrac{\partial^{|m|} f}{\partial X^m}\right)_{l\in\mathbf{N}}$, $(\forall)m \in \mathbf{N}^n$.

**Demonstraţie**. $f \in \Lambda_{n,\alpha} \Rightarrow P_l \in \Lambda_{n,\alpha}$, $(\forall) l \in \mathbf{N}$. $(||P_l||_\alpha \leq ||f||_\alpha < \infty)$. Cum $f$ este convegrentă în $||\cdot||_\alpha$, deducem că $(P_l)_{l\in\mathbf{N}}$ este şir convergent (la $f$), deci Cauchy în $\Lambda_{n,\alpha}$. Din Teorema A2, deducem că $\left(\frac{\partial^{|m|}P_l}{\partial X^m}\right)_{l\in\mathbf{N}}$ este Cauchy în $\Lambda_{n,\gamma}$, $(\forall)\beta << \nu << \alpha$, $(\forall)m \in \mathbf{N}^n$ (iterăm enunţul Th. A2).

Din Th. A1 urmează că şirul $\left(\frac{\partial^{|m|}P_l}{\partial X^m}\right)_{l\in\mathbf{N}}$ este convergent în $\Lambda_{n,\beta}$, obligatoriu la $\frac{\partial^{|m|}f}{\partial X^m}$ (conform definiţiei $\frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}$ şi condiţiei $(C_2)$), adică $\left(\frac{\partial^{|m|}P_l}{\partial X^m}\right)_{l\in\mathbf{N}}$ satisface de asemenea $(C_3)$, ($(C_1)$ şi $(C_2)$ fiind evidente).

* * *

**Teorema A3**. ([ACJ]) *Lema 7.1 şi Corolarul 3, demonstraţie pag. 60-61):*

*Fie $f \in \Lambda_{n,\lambda} \subset \Lambda_n$ şi $(P_l)_{l\in\mathbf{N}}$ un $f$-şir. Atunci $(\forall)\beta \in I^n$, $\beta << \alpha$, $\tilde{P}_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}$, uniform pe $[\beta]$ ($[\beta] := \{x \in K^n \mid |x_i| \leq \beta_i,\ i = \overline{1,n}\}$).*

*Demonstraţie.* Imediat, din [ACJ].

**Definiţia 2.8.** Dacă $\tilde{f} : D(f) \to K$ este funcţia analitică în origine asociată seriei $f \in \Lambda_n$ şi $\frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}$ este operatorul de derivare parţială, atunci $\frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m} : D(f) \to K$ este funcţia analitică în origine asociată seriei $\frac{\partial^{|m|}f}{\partial X^m} \in \Lambda_n$ (conform Teoemei A.2) p entru orice $m \in N^n$.

**Definiţia 2.9.** Fie $h : D \subset K^n \to K$ o funcţie continuă, unde $D$ este deschis şi fie $a \in D$. Spunem că $h$ este *strict parţial diferenţiabilă în* $a$ în raport cu variabila $x_i$ dacă şi numai dacă limită:

$$\lim_{\substack{s,t\to 0 \\ s,t\in K\setminus\{0\}}} \frac{h(a_1, a_2, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - h(a_1, a_2, \ldots, a_i + s, \ldots, a_n)}{t - s}$$

există. Notăm această limită cu $\frac{Dh}{Dx^i}(a)$.

Extindem ca de obicei, noţiunea precedentă la noţiunea de *strict parţial derivabilitate globală de orice ordin* $m = (m_1, \ldots, m_n) \in N^n \setminus \{0\}$.

Notăm cu $\frac{D^{|m|}}{Dx^m} : D \to K$ diferenţiala parţială globală corespunzătoare a lui $h$.

**Remarca 2.10.** Dacă $h$ este strict parţial diferenţiabilă de ordin $m \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$ în $a$, atunci $h$ este parţial diferenţiabilă de ordin $m$ în $a$, şi

$$\frac{D^{|m|}h}{Dx^m}(a) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}(a).$$

**Teorema A4.** *Fie $f \in \Lambda_n$ şi $\tilde{f} : D(f) \subset K^n \to K$ funcţia asociată. Atunci, pentru orice $m \in N^n \setminus \{0\}$, există $\frac{D^{|m|}\tilde{f}}{Dx^m} : D(f) \to K$ şi*

$$\frac{D^{|m|}\tilde{f}}{Dx^m}(a) = \frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial x^m}(a), \quad (\forall) a \in D(f)$$

(cf. Def. 2.8).

**Demonstraţie**. O adaptare a demonstraţiei Teoremei 7.15 din [ACJ] (pag. 62-63).

# §3. Serii convergente peste corpuri complete normate nediscrete, în context nonstandard

Fie $\mathcal{U}$ o superstructură, $\mathcal{L}$ un limbaj de ordin superior pe $\mathcal{U}$ în care sunt definite toate noţiunile matematice uzuale, în particular cele de serii formale şi serii formale convergente peste un corp normat, mulţimile $N, \mathbf{Z}, Q, \mathbf{R}, \mathbf{C}$, şirurile, funcţiile, etc şi în care au loc toate teoremele matematicii clasice (în particular cele din §2).

Fie $\mathcal{A}$ familia propoziţiilor adevărate în $\mathcal{U}$, formulate cu ajutorul limbajului $\mathcal{L}$.

Notăm ${}^*\mathcal{U}$ un univers nonstandard, model al lui $\mathcal{A}$, adică o extindere nonstandard a lui $\mathcal{U}$.

Atunci ${}^*\mathcal{U}$ are toate proprietăţile lui $\mathcal{U}$ care pot fi exprimate cu ajutorul lui $\mathcal{L}$ şi au loc toate teoremele din $\mathcal{U}$ (deci şi cele din §2).

Condiţiile $(C_1), (C_2), (C_3)$ din §2, vor fi transferate pentru un şir standard de polinoame $(P_l)_{l\in N}$ la:

${}^*(C_1) : P_0 \in {}^*K$;

${}^*(C_2) : P_{l+1} - P_l \in {}^*R_{(l+1)}$;

${}^*(C_3) : (\exists)\alpha \in {}^*I^n$, $\alpha$ standard, $(\exists)A_\alpha \in {}^*R$, $A_\alpha > 0$, $A_\alpha$ standard astfel încât ${}^*||P_l||_\alpha \leq A_\alpha$ $(\forall)l \in {}^*N$, unde ${}^*||\cdot||_\alpha$ este extensia lui $||\cdot||_\alpha$.

Fie ${}^*\Lambda_n$ ${}^*K$-algebra care are ca elemente standard elementele lui $\Lambda_n$ şi fie ${}^*\Lambda'_n$ ${}^*K$-algebra care are ca elemente standard elementele lui $\Lambda'_n$.

Izomorfismul din Propoziţia 2.4 se extinde la ${}^*\Lambda_n = {}^*\Lambda'_n$.

**Remarca-Definiţia 3.1.** Dată o serie convergentă standard $f \in {}^*\Lambda_n$, prin transfer ea se identifică cu un *-şir de polinoame $(P_l)_{l\in^*\mathbf{N}}$, $P_l \in {}^*R_n$, $(\forall)l \in {}^*N$ satisfăcând ${}^*(C_1), {}^*(C_2)$ şi ${}^*(C_3)$ (conform Prop. 2.4.). Un astfel de *-şir îl vom numi ${}^*f$-şir.

**Remarca 3.2.** Inelul polinoamelor în $n$ variabile, ${}^*R_n = {}^*K[X_1, \ldots, X_n]$ este graduat de tip ${}^*N$;

$$ {}^*R_n = \bigoplus_{s\in^*N} {}^*R_{(s)}. $$

În continuare ne plasăm în ${}^*\mathcal{U}$ şi vom omite steluţa, aceasta fiind subînţeleasă (excepţie pentru noţiunea de ${}^*f$-şir şi pentru condiţiile ${}^*(C_1), {}^*(C_2)$, ${}^*(C_3)$).

Vom demonstra acum principala teoremă din capitol, care generalizează de la $\mathbf{C}$ la $K^n$ o teoremă a lui Robinson-Callot ([Fr]).

**Teorema 3.3.** *Fie $K$ un corp comutativ normat, local compact, nediscret şi complet, iar $f \in \Lambda_n$. Presupunem că funcţia asociată, analitică peste $K$ în origine, $\tilde{f} : D(f) \subset K^n \to K$ este definită şi ia doar valori aproape standard în $hal(0)$. Atunci există o vecinătate standard $V$ a lui $0$ pe care*

1) *$\tilde{f}$ este $S$-continuă şi de clasă $S^\infty$;*

2) *umbra lui $\tilde{f}$ este analitică peste $K$ în origine şi de clasă $C^\infty$;*

3) *derivatele parţiale de ordin standard ale umbrei lui $\tilde{f}$ coincid cu umbrele aceloraşi derivate parţiale ale lui $\tilde{f}$.*

*Demonstrație.* Deoarece $\tilde{f}$ este analitică în zero şi ia doar valori aproape standard în *hal* (0), conform Principiului de Separare 5.8 din Cap.3, $f$ este analitică şi ia doar valori aproape standard într-o vecinătate standard $V$, a lui 0.

Putem presupune că $V$ este mărginită, deci $(\exists)\beta \in I^n$, $\beta$ standard cu $V \subset (\beta)$. Arătăm că aceasta este vecinătatea pe care au loc 1), 2) şi 3).

1) Conform Propoziției 2.4 şi Remarcii-Definiției 3.1, $f = (P_l)_{l\in {}^*\mathbf{N}}$ cu $(P_l)_{l\in {}^*N}$ un ${}^*f$-şir. Deoarece $f \in \wedge_n'$, atunci $f = (P_l)_{l\in {}^*N}$ în superstructura $\mathcal{U}$ avem $f = (P_l)_{l\in {}^*N}$.

Fie $\beta << \alpha$; dacă $x \in V \subset (\alpha)$, $x$ standard, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avem $|x_i| < \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$ şi $||f||_\alpha < \infty$; deci seria de puteri ce dă pe $f$ este absolut convergentă pe un polidisc ce conține $[\beta]$.

Deducem că $\tilde{P}_l \to \tilde{f}$, $l \to \infty$ uniform pe $[\beta]$, (conform Th. A4, §2). Atunci,

$$f(x) \simeq P_\omega(x), \quad (\forall)\omega \in {}^*N \setminus N, \quad (\forall)x \in [\beta].$$

Micşorând, eventual $V$, astfel încât $V \subset [\beta]$, obținem că $\tilde{P}_l \to \tilde{f}$, $l \to \infty$, uniform pe $V$. Deci:

$$\tilde{P}_\omega(x) \simeq \tilde{f}(x), \quad (\forall)\omega \in {}^*N \setminus N,\ (\forall)x \in V. \tag{3.1}$$

(în universul ${}^*\mathcal{U}$).

Fie acum $x_1, x_2 \in V$, $x_1 \simeq x_2$. Avem:$\tilde{P}_l(x_1) \simeq \tilde{P}_l(x_2)$, $(\forall)l \in \mathbf{N}$, $l$ standard, deoarece $V$ este mărginit de un $n$-uplu standard. Conform Lemei lui Robinson (Th. 5.5, Cap.3) obținem că $(\exists)\omega_0 \in {}^*N \setminus N$ astfel încât:

$$\tilde{P}_l(x_1) \simeq \tilde{P}_l(x_2) \quad (\forall)l \leq \omega_0.$$

În particular

$$\tilde{P}_{\omega_0}(x_1) \simeq \tilde{P}_{\omega_0}(x_2), \quad \omega_0 \in {}^*N \setminus N. \tag{3.2}$$

Luând acum în (3.1) $x \simeq x_1$, $x \simeq x_2$ şi $\omega = \omega_0$ obţinem că

$$\tilde{f}(x_1) \overset{(3.1)}{\simeq} \tilde{P}_{\omega_0}(x_1) \overset{(3.2)}{\simeq} \tilde{P}_{\omega}(x_2) \overset{(3.1)}{\simeq} \tilde{f}(x_2).$$

Deci, din $x_1 \simeq x_2$ a rezultat că $\tilde{f}(x_1) \simeq \tilde{f}(x_2)$, adică exact faptul că $\tilde{f}$ este $S$-continuă pe $V$.

Faptul că $\tilde{f}$ este de clasă $S^1$ pe $V$ rezultă din $S$-continuitatea lui $\tilde{f}$ pe care am demonstrat-o ipotezele că $\tilde{f}$ este aproape standard pe $W \supset V$ şi *Teorema A4, §2 (conform Def. 2.9 §2 şi §3).

Iterând, obţinem că $\tilde{f}$ este de clasă $C^\infty$ (definiţiile din §2 sunt extinse pe componente de la $K$ la $K^n$).

2) Deoarece $\tilde{f}$ ia numai valori aproape standard în $V$ şi $\tilde{f}$ este $S$-continuă pe $V$ (cf.1), deducem că umbra $^\circ\tilde{f}$ există şi este uniform continuă pe $V$.

Dar, trebuie să demonstrăm că $f$ este chiar analitică în zero.

**Lema 3.4.** $\tilde{f}$ este analitică în origine pe $V \Leftrightarrow (\exists)\,(P_l)_{l\in{}^*N}$ un $^*f$-şir astfel încât $\tilde{f}(x) \simeq \tilde{P}_\omega(x)$, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$, $(\forall)x \in V$.

*Demonstraţie.* $\tilde{f}$ este analitică în $V \Leftrightarrow (\exists)\ (P_l)_{l\in N}$ un $f$-şir astfel încât

$$\tilde{f}(x) = \lim_{l\to\infty} P_l(x), \quad (\forall)x \in V.$$

Folosim apoi Principiul Transferului (P.T) şi interpretarea în $^*\mathcal{U}$ a limitei

* * *

Continuăm cu demonstraţia punctului 2), $f$ fiind analitică în origine, folosind Lema 3.4, deducem existenţa unui $^*f$-şir $(P_l)_{l\in{}^*N}$. Din (3.1) deducem că:

(3.3) $\tilde{P}_\omega$ ia numai valori aproape-standard în $V$, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$

(deoarece $\tilde{f}$ ia numai valori aproape-standard, aceasta asigură existenţa umbrelor elementelor corespunzătoare din $K$ şi

(3.4) $$^\circ(\tilde{f}(x)) = {}^\circ(P_\omega(x)), \quad (\forall)\omega \in {}^*N \setminus N, \quad \forall x \in V$$

Mai mult, dacă $x_1, x_2 \in V$, $x_1 \simeq x_2$, atunci

$$\tilde{P}_\omega(x_1) \overset{(3.1)}{\simeq} \tilde{f}(x_1) \overset{1)}{\simeq} \tilde{f}(x_2) \overset{(3.1)}{\simeq} \tilde{P}_\omega(x_2).$$

Astfel, $\tilde{P}_\omega(x_1) \simeq \tilde{P}_\omega(x_2)$ şi prin urmare:

(3.5) $\qquad \tilde{P}_\omega$ este continuă pe $V$, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$

Din (3.3) şi (3.5) deducem că:

(3.6) $\quad$ Există umbra ${}^\circ\tilde{P}_\omega$ pe ${}^\circ V$, uniform continuă pe ${}^\circ V$, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$.

Pentru un $\omega \in {}^*N \setminus N$, considerăm ${}^*P_\omega$-şirul $(S_l)_{l\in{}^*N}$ dat de:

$$\begin{array}{l} S_l = P_l \quad (\forall)\ l \leq \omega. \\ S_l = P_\omega \quad (\forall)\ l > \omega. \end{array}$$

Folosind Lema 3.4 vom avea că"

(3.7) $\qquad \tilde{P}_u$ este analitic, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$.

Din (3.4) şi (3.6) (deoarece ${}^\circ\tilde{f}$ există) deducem că:

(3.8) $$ {}^\circ\tilde{f} = {}^\circ\tilde{P}_\omega \quad \text{pe} \quad {}^\circ V.$$

Fie acum şirul $(Q_l)_{l\in{}^*N}$, care extinde la ${}^*N$ şirul dat de $Q_l = {}^\circ P_l$, $l \in {}^*N$, $l$ standard. Conform (3.6), fie $\mathcal{S} := ({}^\circ P_l)_{l\in{}^*N}$ şi $\mathcal{T} = (Q_l)_{l\in{}^*N}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{S} - \mathcal{T} = ({}^\circ P_l - Q_l)_{l\in{}^*N} = (U_l)_{l\in{}^*N} \\ U_l := {}^\circ P_l - Q_l\ (\forall)\ l \in {}^*N. \end{array}$$

Atunci, $U_l = 0$ $(\forall)l$ standard $\Rightarrow U_l = 0$ $(\forall)l \in {}^*N$ deci $Q_l = {}^\circ P_l$, $(\forall)l \in {}^*N$. Deoarece $(P_l)_{l\in{}^*N}$ este ${}^*f$-şir, obţinem imediat că ${}^\circ(P_l)_{l\in{}^*N}$ este ${}^{*\circ}P_\omega$-şir, care este staţionar pe ${}^*N \setminus N$.

Folosind Lema 3.4, deducem că

(3.9) $\qquad {}^\circ\tilde{P}_\omega \quad$ este analitică pe ${}^\circ V$, $(\forall)\omega \in {}^*N \setminus N$.

Folosind (3.8) şi (3.9) rezultă că $^\circ\tilde{f}$ este analitică peste $K$ în origine.

Faptul că $^\circ\tilde{f}$ este de clasă $C^\infty$ pe $V$ rezultă din 1) şi

3) $\tilde{f}$ analitică, implică faptul că $(\exists)(P_l)_{l\in {}^*N}$ un $^*f$-şir, astfel încât

$$\tilde{f}(x) \simeq \tilde{P}_\omega(x),\ (\forall)\omega \in {}^*N \setminus N,\ (\forall)x \in V$$

Fie $\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}$ operatorul standard de derivare parţială. Deoarece $V$ este mărginit de un $\alpha \in {}^*I^n$, $\alpha$ standard, rezultă că elementele lui $V$ sunt toate aproape standard (deoarece $K$ este local compact).

Din (3.6) şi (3.7) rezultă că:

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}(^\circ\tilde{P}_\omega) = {}^\circ\left(\frac{\partial^{|m|}\tilde{P}_\omega}{\partial X^m}\right) \text{ pe } V,\ (\forall)\omega \in {}^*N \setminus N \tag{3.10}$$

(egalitatea de mai sus este valabilă pentru $l \in {}^*N$, $l$ standard, prin urmare şi pentru $l = \omega \in {}^*N \setminus N$).

În particular

$$\frac{\partial^m\tilde{P}_\omega}{\partial X^m}(x) \text{ este aproape standard } (\forall)x \in V,\ (\forall)\ \omega \in {}^*N \setminus N. \tag{3.11}$$

Conform cu Corolarul 2.7 şi Teorema A3 (§2)

$$\frac{\partial^{|m|}\tilde{P}_l}{\partial X^m} \xrightarrow{u} \frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m} \text{ pe } V, \tag{3.12}$$

adică

$$\frac{\partial^{|m|}\tilde{P}_\omega}{\partial X^m}(x) \simeq \frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m}(x)\ (\forall)\ x \in V,\ (\forall)\ \omega \in {}^*N \setminus N. \tag{3.13}$$

Din (3.11) şi (3.13) deducem că

$$\frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m}(x) \text{ este aproape standard } (\forall)\ x \in V. \tag{3.14}$$

Din (3.11) şi (3.14) obţinem că

$$^\circ\left(\frac{\partial^{|m|}\tilde{P}_\omega}{\partial X^m}\right) = {}^\circ\left(\frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m}\right) \text{ pe } {}^\circ V,\ (\forall)\ \omega \in {}^*N \setminus N. \tag{3.15}$$

În final, folosind (3.10), (3.12) şi (3.15) rezultă că

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial X^m}({}^\circ\tilde{f}) = {}^\circ\left(\frac{\partial^{|m|}\tilde{f}}{\partial X^m}\right) \text{ pe } V$$

* * *

**Remarca 3.5**. Teorema Robinson-Callot din [Fr] este demonstrată pentru funcţii olomorfe într-o variabilă complexă, folosind esenţialmente formula integrală Cauchy pentru 1) şi 3) şi Teorema Cauchy-Morera ([ACJ]) pentru 2), deci bazându-se pe noţiunea de olomorfie.

Demonstraţia dată aici teoremei precedente (care generalizează esenţial Teorema Robinson-Callot de la **C** la $K^n$, $K$=corp normat, nediscret, complet) se bazează pe noţiunea de analiticitate (echivalentă cu olomorfia pentru $K = \mathbf{C}$), fiind deci total diferită.

**Remarca 2.6.** În [LG], Lecţia 11.1 se face remarca că proprietatea 2) nu este adevărată pentru funcţii real analitice, în baza teoremei de aproximare a lui Weierstrass pentru funcţii continue pe compacţi din R (deoarece ar rezulta că orice funcţie continuă este analitică).

Noţiunea de *-analiticitate folosită aici este mai restrictivă decât cea considerată în Remarca din [L.G].

În particular, cu definiţia noastră, nu este adevărat că orice *-polinom din ${}^*R_n$ este funcţie analitică; de exemplu, polinoamele folosite în demonstraţia teoremei lui Weierstrass ([AM] cap.I) nu sunt funcţii analitice. Dacă

$$B_\omega(x) = \sum_{l=0}^{\omega} f\left(\frac{l}{\omega}\right) C_\omega^l x^\omega (1-x)^{\omega-l},$$

atunci ${}^\circ B_\omega = f$ şi $(\forall)$ $f : [0,1] \to R$ continuă, dar $B_\omega$ şi $Q_\omega$ nu sunt funcţii analitice în origine în sensul nostru, deoarece ele nu sunt date de *-şiruri; ele nu satisfac, în primul rând condiţia $(C_2)$ care este esenţială în demonstraţia Corolarului 2.7 şi a Teoremei A4 din §2, folosită prin transfer în §3, şi nici condiţia $(C_3)$.

# Capitolul V
# EXTENSII ALE UNOR TEOREME CLASICE ALE ZEROURILOR (HILBERT, RUCKERT)

În §2 al acestui capitol demonstrăm o extindere de la $R$ = corp real închis la $F \subset E$ cu $F$ corp real şi $E$ corp real închis a teoremei zerourilor din [BCR]. Este cunoscut că clasica teoremă a zerourilor a lui Hilbert este strâns legată de proprietatea teoriei corpurilor algebric închise de a fi model completă (a se vedea [CK], [Ro2]). Demonstraţia teoremei analoge pe care o prezentăm aici, nouă, arată că teorema zerourilor este legată de proprietatea de completitudine şi în cazul teoriei corpurilor real închise. În §1 prezentăm complementele din Teoria Modelelor necesare în demonstraţie.

În §5 prezentăm o extindere a teoremei clasice de anulare a lui Ruckert de la un corp $K$ normat, nediscret, complet, algebric închis, ca în [A] la extensia $K \subset \tilde{K}$ (= completatul închiderii algebrice a lui $K$), unde acum $K$ nu mai este presupus şi algebric închis. Metoda de demonstraţie, deşi inspirată din [Ro2] (unde $K = \mathbf{C}$) conţine importante clarificări şi adaptări la contextul considerat. Noţiunile pregătitoare pentru demonstraţie sunt prezentate în §3 şi §4.

Cele două rezultate, în forma extinsă prezentată, ca şi demonstraţiile lor, sunt - după ştiinţa noastră - noi în literatură.

# §1. Preliminarii

## 1.1 Complemente de teoria modelelor

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de prim ordin.

**Definiţia 1.1.1.** 1) $\varphi$ este o *teoremă* în $\mathcal{L}$ dacă se deduce din axiomele logice ale limbajului; scriem $\vdash \varphi$.

2) Dacă $\Sigma$ este o mulţime de propoziţii în $\mathcal{L}$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că există o demonstraţie a lui $\varphi$ pornind de la axiomele logice şi de la $\Sigma$ (spunem că $\varphi$ este *deductibilă* din $\Sigma$).

3) $\Sigma$ se numeşte *inconsistentă* dacă orice formulă $\varphi$ în $\mathcal{L}$ este deductibilă din $\Sigma$. Astfel se numeşte *consistentă.*

4) $\Sigma$ *are un model* dacă există $(A, \mathcal{P})$ model pentru $\mathcal{L}$ astfel încât $A \models \Sigma$.

5) $\varphi$ este *validă* dacă oricare ar fi $(A, \mathcal{P})$ model pentru $\mathcal{L}$, avem $A \models \varphi$ (scriem $\models \varphi$).

6) $\varphi$ este *consecinţă* a lui $\Sigma$ dacă oricare ar fi $(A, \mathcal{P})$ model pentru $\mathcal{L}$, din $A \models \Sigma$ deducem $A \models \varphi$ (scriem $\Sigma \models \varphi$).

Noţiunile de pe aceeaşi linie a tabelului următor sunt echivalente:

| | Sintaxă | Semantică |
|---|---|---|
| $(A)$ | $\vdash \varphi$ | $\models \varphi$ |
| $(B)$ | $\Sigma$ consistentă | $\Sigma$ are model |
| | $\Sigma \vdash \varphi$ | $\Sigma \models \varphi$ |

Echivalenţa (A) reprezintă *Teorema de completitudine a lui Gödel*, iar echivalenţa (B) reprezintă *Teorema de completitudine extinsă.* Împreună cu *Teorema de compacitate* prezentată în Cap. 2, acestea reprezintă teoremele fundamentale ale calculului predicatelor de ordin întâi. Demonstraţiile se găsesc, de exemplu, în [CK].

**Definiţia 1.1.2.** O *teorie* este o colecţie de propoziţii în $\mathcal{L}$. O teorie se numeşte *închisă* dacă este închisă la $\models$ (echivalent, închisă la $\vdash$, conform tabelului).

Cum teoriile sunt mulţimi de propoziţii ale lui $\mathcal{L}$, li se aplică expresiile:

- model al unei teorii;

- teorie consistentă;

- teorie satisfezabilă (are cel puţin un model).

**Exemplu 1.1.3.** *Teoria corpurilor* (limbajul corpurilor) $\mathcal{L} = (+, \cdot, 0, 1)$ cu axiomele corespunzătoare. Dacă adăugăm şirul infinit de axiome

$$(A_n) : (\exists y)(x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \ldots + x_1 y + x_0 \equiv 0) \vee x_n \equiv 0$$

obţinem *Teoria corpurilor algebric închise.* Dacă la axiomele corpurilor adăugăm axioma

$$(B_p) : p.1 \equiv 0$$

obţinem *Teoria corpurilor de caracteristică* $p$ ($p$ rezultă în mod necesar număr prim). Dacă la axiomele corpurilor adăugăm şirul infinit de axiome

$$(\bar{B}_n) : \neg(n.1 \equiv 0), \quad n \in \mathbf{N}^*$$

obţinem *Teoria corpurilor de caracteristică zero.*

În consecinţă obţinem *Teoria corpurilor algebric închise de caracteristică* $p$ (respectiv *de caracteristică zero*).

Înainte de a mai da un exemplu, câteva definiţii ([La], ch. XI).

**Definiţia 1.1.4.** 1) Un corp $K$ se numeşte *real* dacă $-1$ nu este sumă de pătrate în $K$.

2) Un corp $K$ se numeşte *real închis* dacă este real şi dacă orice extindere algebrică a lui $K$, care este corp real, este egală cu $K$ (deci $K$ este maximal relativ la proprietatea de a fi real în închiderea algebrică).

Conform unor teoreme din teoria corpurilor real închise, obţinem

**Exemplul 1.1.5.** Dacă la axiomele corpurilor adăugăm axiomele

$(C) : (\forall x)(\exists y)\ (y^2 \equiv x \vee y^2 + x = 0)$

$(A_n)$ : pentru orice $n$ impar (a se vedea Exp. 1.3)

$(D_n)$: $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 \equiv 0 \to x_0 \equiv 0 \wedge x_1 \equiv 0 \wedge \ldots \wedge x_n \equiv 0$

obţinem *Teoria corpurilor real închise.*

**Teorema 1.1.6. ([La], pag. 274)**: *Orice corp real $K$ are o închidere reală (i.e. un corp $L \supset K$ care este real închis şi extinderea $K \subset L$ este algebrică).*

**Notaţie 1.1.7.** Fie $\mathcal{L}$ limbaj de prim ordin şi $(A, \mathcal{P})$ un model pentru $\mathcal{L}$. Notăm cu $Th(A)$ familia tuturor propoziţiilor din $\mathcal{L}$ adevărate pe $A$.

**Definiţia 1.1.8.** 1) Fie $\mathcal{L}$ limbaj de prim ordin şi $\Sigma$ o mulţime de propoziţii (eventual $\Sigma = \emptyset$) şi $(A, \mathcal{P})$, $(B, \mathcal{Q})$ două modele pentru $\Sigma$. Atunci $A$ şi $B$ se numesc *elementar echivalente* dacă $Th(A) = Th(B)$.

2) O teorie $\Sigma$ se numeşte *completă* dacă orice două modele pentru $\Sigma$ sunt elementar echivalente.

3) Dacă $A$ şi $B$ sunt două structuri, modele pentru $\mathcal{L}$, cu $A \leq B$ (i.e. $A$ este substructură a lui $B$), atunci extinderea $A \leq B$ se numeşte *elementară* (scriem $A \leq_e B$) dacă oricare ar fi formula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ în $\mathcal{L}$ avem $A \models \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ dacă şi numai dacă $B \models \varphi(v_1, \ldots, v_n)$.

4) Dacă $\Sigma$ este o teorie notăm cu $Mod(\Sigma)$ toate modelele lui $\Sigma$. Spunem că $\Sigma$ este *model completă* dacă $(\forall) A, B \in Mod(\Sigma)$ cu $A \leq B$, atunci $A \leq_e B$.

**Remarca 1.1.9.** O teorie completă este model completă.

**Teorema 1.10. ([CK], pag. 188)** *Teoria corpurilor algebric închise este model completă, dar nu este completă.*

Teorema 1.10 este o consecinţă a Teoremei clasice a zerourilor a lui Hilbert pentru corpuri algebric închise ([AMD]).

**Teorema 1.11. ([CK])** 1) *Teoria corpurilor algebric închise de caracteristică fixată este completă.*

2) *Teoria corpurilor real închise este completă.*

## 1.2. Valori absolute (norme) pe corpuri

Fie $K$ un corp. Considerăm pentru o funcţie $|\cdot| : K \to \mathbf{R}$ axiomele:

(N1): $|x| \geq 0$ $(\forall)x \in K$ şi $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N2): $|xy| = |x| \cdot |y|$ $(\forall)x, y \in K$;

(N3): $|x + y| \leq |x| + |y|$, $(\forall)x, y \in K$;

(N4): $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$, $(\forall)x, y \in K$

**Definiţia 1.2.1.** 1) Dacă funcţia $|\cdot|$ verifică (N1), (N2), (N3) ea se numeşte *valoare absolută* (sau *normă*) pe $K$.

2) Dacă $|\cdot|$ verifică (N1), (N2), (N4) se numeşte normă *nearhimediană* sau *valuare* ((N4) rezultă (N3)).

3) Dacă $|\cdot|$ verifică (N1), (N2), (N3) şi nu verifică (N4) ea se numeşte normă *arhimediană.*

**Teorema 1.2.2.** ([La], pag. 186). *Orice corp normat $(K, v)$ se extinde la un corp normat complet $(\hat{K}, \hat{v})$ cu $\hat{v}|K = v$.*

**Teorema 1.2.3.** ([La], pag. 291): *Fie $K$ corp normat, complet, nediscret şi $K \subset E$ o extindere algebrică. Atunci $v$ are o extensie unică la $E$ (în particular $v$ se extinde unic la $\bar{K}$ = închiderea algebrică a lui $K$). Dacă extinderea $K \subset E$ este finită, atunci $E$ este complet.*

**Teorema 1.2.4** ([Rb], pag. 146). *Fie $K$ un corp normat, nediscret, nearhimedian, algebric închis şi $\hat{K}$ completatul lui (cf. Teoremei 1.2.2). Atunci $\hat{K}$ este algebric închis.*

**Teorema 1.2.5** ([IM], pag.12). *Fie $K$ un corp normat. Dacă există $M \in \boldsymbol{R}$, $M > 0$ astfel încât $|x| \leq M$, $(\forall)x \in P$ = corpul prim al lui $K$, atunci $K$ este nearhimedian.*

**Corolar 1.2.6.** *Dacă corpul $K$ este de caracteristică $p > 0$, atunci orice normă pe $K$ este nearhimediană.*

**Teorema 1.2.7** (Ostrovski, [IM], pag. 15). *Orice normă arhimediană pe corpul $Q$ al numerelor raţionale este de forma $|x|^\alpha$ cu $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $0 < \alpha \leq 1$.*

**Teorema 1.2.8** ([La], pag.288). *Fie $K$ corp normat, nediscret, complet şi $E$ spaţiu vectorial finit dimensional peste $K$. Atunci orice două norme* *pe $E$ (compatibile cu norma de pe $K$) sunt echivalente (adică dau aceeaşi topologie metrică pe $E$).*

**Teorema 1.2.9** (Ghelfand-Mazur, [La], pag. 290). *Fie $K$ corp normat care conţine pe $\boldsymbol{R}$ = corpul numerelor reale şi a cărui normă extinde modulul de pe $\boldsymbol{R}$. Atunci $K = \boldsymbol{R}$ sau $K = \boldsymbol{C}$.*

**Teorema 1.2.10.** *Fie $K$ corp normat, nediscret, complet şi $\tilde{K}$ completatul închiderii algebrice a lui $K$ (cf. Teoremelor 1.2.3 şi 1.2.2). Atunci $\tilde{K}$ este corp normat, nediscret, complet, algebric închis.*

**Demonstraţie**. Dacă $K = (K, |\cdot|_K)$ este arhimedian, caracteristica lui $K$ este zero (altfel $|\cdot|_K|_P$ este mărginită, cu $P$ corpul prim al lui $K$, deci $|\cdot|_K$ ar fi nearhimediană, cf. Teoremei 1.2.5). Deci $\mathbf{Q} \subset K$. Notăm cu $|\cdot|_{\mathbf{Q}} := |\cdot|_K|_{\mathbf{Q}}$, deci $|\cdot|_{\mathbf{Q}} = |\cdot|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, unde $|\cdot|$ este modulul obişnuit pe $\mathbf{Q}$ (cf. Teoremei 1.2.7). Deoarece $K$ este complet, avem $K \supset \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ (orice două norme pe $\mathbf{R}$ sunt echivalente). Din Teorema 1.2.9 deducem $K = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$, deci $\tilde{K} = \mathbf{C}$.

Dacă $K$ este nearhimedian, atunci $\bar{K}$ (= închiderea algebrică a lui $K$) rămâne, evident, nearhimedian (a se vedea şi Teorema 1.2.3). Atunci $\tilde{K} = \hat{\bar{K}}$ rămâne normat, nediscret, complet, algebric închis (cf. Teoremelor 1.2.2 şi 1.2.4).

***

## §2. O extensie a teoremei zerourilor a lui Hilbert pentru corpuri reale

Vom aplica rezultatele din capitolele precedente şi §1, 1.1 în algebra, mai exact în teoria inelelor de polinoame peste corpuri, mai precis vom demonstra o teoremă de anulare de tip Hilbert pentru corpuri reale, care extinde Teorema 4.1.4 din [BCR] (Real Nullstellensatz). Demonstraţia noastră foloseşte proprietatea teoriei corpurilor închise de a fi model completă.

**Definitia 2.1** ([BCR]). Fie $A$ un inel comutativ. Un ideal $I \subset A$ se numeşte *real* dacă, pentru orice şir de elemente $a_1, \dots, a_n \in A$, avem

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \in I \to a_1 \in I, a_2 \in I, \dots, a_n \in I.$$

**Remarca 2.2.** Fie $A$ un inel comutativ. Un ideal prim $P \in Spec(A)$ este real dacă şi numai dacă corpul de fracţii al lui $A/P$ este corp real.

**Remarca 2.3.** Orice ideal real $I$ într-un inel comutativ $A$ este radical (i.e. $I = \sqrt{I} := \{x \in A | (\exists) m \in \mathbf{N}, x^m \in I\}$).

Pentru ambele remarci se poate consulta [BCR].

Fie $F \subseteq E$ o extensie de corpuri şi $R := F[X_1, \dots, X_n]$. Fie $S \subseteq R$ o submulţime. Atunci *varietatea asociată lui $S$ în $E$* este

$$\mathcal{V}_E(S) := \{x \in E^n | p(x) = 0,\ (\forall) p \in S\}.$$

Fie $T \subseteq E^n$ o submulţime. Atunci *idealul lui $T$ în $R$* este mulţimea

$$\mathcal{I}(T) := \{p \in R | p(t) = 0,\ (\forall) t \in T\}.$$

Se verifică uşor că $\mathcal{I}(T) \subset R$ este un ideal.

Dacă $a = (a_1, \dots, a_n) \in E^n$, punem $\mathcal{I}(a) := \{p \in R | p(a) = 0\}$.

Dacă $J \subset R$ este un ideal astfel încât $J = \mathcal{I}(a)$ pentru un anume $a \in E^n$, spunem că $a$ este *punct generic* pentru $J$.

**Teorema 2.4** (extensie a Real Nullstellensatz). *Fie $F$ un corp real, $E \supset F$ un corp real închis şi $I \subset R = F[X_1, \dots, X_n]$ un ideal real. Atunci $\mathcal{I}(V_E(I)) = I$.*

**Remarca 2.5.** Putem lua în Teorema 2.4 $E = \tilde{F}$ (= o închidere reală a lui $F$). Dacă $F$ este real închis şi luăm $E = F$, obţinem ca un caz particular Teorema 4.1.4 din [BCR] (Real Nullstellensatz).

**Demonstraţia Teoremei 2.4**: În general $\mathcal{I}(V_E(I)) \supseteq \sqrt{I} = I$ (Remarca 2.3). Demonstrăm acum incluziunea inversă. Fie $q \notin I$ şi punem $\mathcal{F}_q := \{J | J$

ideal real în $R$, $I \subseteq J$, $q \notin J\}$. Atunci $\mathcal{F}_q \neq \emptyset$ ($I \in \mathcal{F}_q$) şi este inductiv ordonată. Din Lema lui Zorn deducem existenţa unui element maximal $P_q \in \mathcal{F}_q$. Demonstrăm că $P_q$ este ideal prim. Într-adevăr, fie $x, y \in R$ cu $xy \in P_q$. Presupunem, prin absurd, $x \notin P_q$, $y \notin P_q$.

Considerăm, pentru un ideal $Q$ din $R$ radicalul său real, $\sqrt[R]{Q} := \{a \in R | (\exists) m \in \mathbf{N}^*, (\exists) b_1, \ldots, b_p \in R$ a.î. $a^{2m} + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_p^2 \in Q\}$. Se arată într-o manieră standard că $\sqrt[R]{Q}$ este ideal real. Privitor la idealul nostru $P_q$, deoarece este maximal în $\mathcal{F}_q$, avem:

$$q \in \sqrt[R]{P_q + < x >}\,, \quad q \in \sqrt[R]{P_q + < y >}. \quad \text{Deci}$$
$$q^{2m} + b_1^2 + \ldots + b_s^2 = \alpha + \lambda x,\ \alpha \in P_q,\ \lambda \in R \text{ şi}$$
$$q^{2r} + c_1^2 + \ldots + c_t^2 = \beta + \mu y,\ \beta \in P_q,\ \mu \in R.$$

Deducem că $q^{2(m+r)} +$ ( o sumă de pătrate) $\in P_q$ (căci $xy \in P_q$). Urmează că $q \in \sqrt[R]{P_q}$. Se arată însă uşor că, dacă $Q$ este ideal real, avem $\sqrt[R]{Q} = Q$. Deci $q \in P_q$, ceea ce contrazice faptul că $P_q \in \mathcal{F}_q$. Rămâne că $P_q$ este ideal prim.

Avem: $F \subset R \to R/P_q \to (R/P_q)_0 \to E_q$, unde $(R/P_q)_0$ este corpul de fracţii al lui $R/P_q$, care este corp real (Remarca 2.2) şi $E_q$ este orice extindere real închisă a lui $(R/P_q)_0$ (de exemplu o închidere reală a lui $(R/P_q)_0$, cf. Teoremei 1.1.6). Scriem $R/P_q = F[x_1, \ldots, x_n]$, unde $x_i = X_i \pmod{P_q}$ şi punem $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_q^n$. Atunci avem $q(x) \neq 0$ în $E_q$ (deoarece $q \notin P_q$). Dar, pentru orice $f \in I$, cum $I \subseteq P_q$, avem $f(x) = 0$ în $E_q$. Deci $q \notin \mathcal{I}(V_{E_q}(I))$. Echivalent, ($\alpha$) $V_{E_q}(I) \not\subseteq V_{E_q}(q)$.

Să considerăm acum, conform noetherianităţii, o mulţime finită de generatori ai lui $I : \theta_1, \ldots, \theta_m$. Atunci ($\alpha$) spune că

$$(\exists w_1) \ldots (\exists w_n)(\theta_1(w_1, \ldots, w_n) = 0 \wedge \ldots \wedge \theta_m(w_1, \ldots, w_n) = 0 \wedge$$
$$\wedge q(w_1, \ldots, w_n) \neq 0).$$

Acum, încheiem demonstraţiile folosind completitudinea teoriei corpurilor real închise (Teorema 1.11.2)). În limbajul $\mathcal{L}$ al corpurilor real închise, considerăm formula

$$\varphi = (\exists w_1)\dots(\exists w_n)[\theta_1(w_1,\dots,w_n) \equiv 0 \wedge \dots \wedge \theta_m(w_1,\dots,w_n) \equiv 0 \wedge$$
$$\wedge \neg(q(w_1,\dots,w_n) \equiv 0)].$$

Am demonstrat că $E_q \models \varphi$. Din completitudinea teoriei corpurilor real închise, deducem că $E' \models \varphi$ pentru orice corp real închis $E'$ care conţine $F$ (deoarece polinoamele din $I$ trebuie să rămână definite), în particular $E' = E$. Deci, în final am demonstrat incluziunea $\mathcal{I}(V_E(I)) \subseteq I$, deci egalitatea dorită (cealaltă incluziune fiind valabilă totdeauna).

**Corolar 2.6.** (Teorema 4.1.4 din [BCR]). *Fie $F$ un corp real închis şi $I \subseteq F[X_1,\dots,X_n]$ un ideal real. Atunci $\mathcal{I}(V_F(I)) = I$.*

**Demonstraţie**. Se ia $E = F$ în Teorema 2.4.

# §3. Germeni pe $K^n$

## 3.1. Germeni de mulţimi şi de funcţii într-un punct

Fie spaţiul metric (topologic) $K^n$ unde $K$ este corp normat, complet, nediscret, şi un punct $p \in K^n$.

Definim o relaţie de echivalenţă "$\sim$" pe $\mathcal{P}(K^n)$ astfel:

Dacă $A_1 \subset K^n$ şi $A_2 \subset K^n$, atunci $A_1 \sim A_2$ dacă există o vecinătate deschisă $U$ a lui $p$ astfel încât $A_1 \cap U = A_2 \cap U$.

Clasele de echivalenţă în raport cu această relaţie de echivalenţă se numesc *germeni de mulţimi în p*. Germenii de mulţimi în $p$ sunt parţial ordonaţi de relaţia "$\leq$" definită astfel: pentru orice germeni de mulţimi $\alpha$ şi $\beta$ în $p$ definim: $\alpha \leq \beta$ dacă există $A_1 \in \alpha$ şi $A_2 \in \beta$ şi o vecinătate deschisă $U$ a lui $p$, astfel încât $A_1 \cap U \subseteq A_2 \cap U$. Deci $\alpha = \beta$ dacă şi numai dacă $\alpha \leq \beta$ şi $\beta \leq \alpha$.

Operaţiile laticeale de reuniune şi intersecţie pentru germeni de mulţimi în $p$, se definesc astfel:

$\alpha \wedge \beta = \gamma$ dacă şi numai dacă există $A_1 \in \alpha$ şi $A_2 \in \beta$, $A_3 \in \gamma$ astfel încât $A_1 \cap A_2 = A_3$,

$\alpha \vee \beta = \gamma$ dacă şi numai dacă există $A_1 \in \alpha$ şi $A_2 \in \beta$, $A_3 \in \gamma$ astfel încât $A_1 \cup A_2 = A_3$.

Fie $\mathcal{F}_n$ clasa funcţiilor definite pe submulţimi ale lui $K^n$ care includ o vecinătate deschisă a lui $p$ în $K^n$, cu valori în $K$

$$\mathcal{F}_n = \{f : A \subset K^n \to K | (\exists) U \in \mathcal{V}_{(P)},\ U \subset A\}.$$

Pentru orice $A \subset K^n$, $f \in \mathcal{F}_n$, $f|_A$ este restrucţia lui $f$ la $A$. Definim o relaţie de echivalenţă în $\mathcal{F}_n$ punând $f_1 \sim f_2$ pentru orice $f_1 \in \mathcal{F}_n$, $f_2 \in \mathcal{F}_n$, dacă există o vecinătate deschisă $U$ a lui $p$ astfel încât $f_1|U = f_2|U$. Spunem că $f_1$ şi $f_2$ *sunt echivalente în* $p$.

O clasă de echivalenţă în raport cu această relaţie se numeşte *germene de funcţie în* $p$.

Fie $\phi$ un germene de funcţie în $p$ şi $q \in K$. Atunci $\phi^{-1}(q)$ este un germene de mulţime în $p$ adică clasa de echivalenţă a lui $f^{-1}(q)$ pentru un anumit $f \in \phi$. Dacă $\phi$ este un germene de funcţie în $p$, atunci germenele de mulţime $\alpha$ se numeşte *varietate locală* sau *varietate a lui* $\phi$ *în* $p$ (pentru un $q \in K$ dat), dacă există $f \in \phi$, $V \in \alpha$, şi o vecinătate deschisă $U$ a lui $p$ care aparţine domeniului de definiţie al lui $f$ astfel încât

$$V = \{x | x \in U \quad \text{şi} \quad f(x) = q\}.$$

Deoarece $K$ este inel, mulţimea germenilor de funcţii în $p$ este înzestrată cu o structură de inel, adică dacă $\phi_1$ şi $\phi_2$ sunt germeni de funcţii în $p$ cu $f_1 \in \phi_1$ şi $f_2 \in \phi_2$, atunci fie $U$ o vecinătate deschisă a lui $p$ comună domeniilor lui $f_1$ şi $f_2$. Atunci:

$\phi_1 + \phi_2$ este clasa de echivalenţă a funcţiei $(f_1|U + f_2|U)$ şi

$\phi_1 \cdot \phi_2$ este clasa de echivalenţă a funcţiei $(f_1|U) \cdot (f_2|U)$.

($f_1+f_2$ şi $f_1 f_2$ sunt definite pe $U$ prin adunarea şi înmulţirea pe componente, respectiv).

Notăm cu $\mathcal{R}_n$ inelul de germeni de funcţii în $p$.

Fie $I$ un ideal al inelului $\mathcal{R}_n$. Definim *radicalul lui $I$*, $\sqrt{I}$ într-un mod analog cu conceptul corespunzător pentru un ideal polinomial, $\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{R}_n | \exists m \in \mathbf{N}$ astfel încât $f^m \in I\}$.

La fel, *varietatea* unei submulţimi finite $S \subset \mathcal{O}_{n,p}$, în $p$ este

$$\mathcal{V}(S) = \wedge\{\phi^{-1}(0)|\phi \in S\},$$

şi dacă $\alpha$ este un germene de mulţime pe $p$, atunci *idealul lui $\alpha$* este mulţimea $\mathcal{I}(\alpha)$ care constă din toţi germenii de funcţii $\phi$ în $p$ pentru care $\alpha \leq \phi^{-1}(0)$, unde "$\leq$" este relaţia de ordine definită mai înainte. Dacă $\phi$ este germene de funcţie în $p$, cu un reprezentant care este analitic într-o anumită vecinătate a lui $p$, atunci $\phi$ este germene de funcţie analitică în $p$.

Mulţimea germenilor de funcţii analitice în $p$ formează un subinel al inelului germenilor de funcţii în $p$. Notăm acest inel cu $\mathcal{O}_{n,p} = \mathcal{O}_{n,p,K}$.

În context relativ, fie $K \subset L$ o extindere de corpuri normate, nediscrete, complete. Dacă $p \in K^n$ şi $S \subset \mathcal{O}_{n,p,K}$ o mulţime finită. Definim *varietatea asociată lui $S$ în $L$* prin

$$\mathcal{V}_L(S) := \wedge\{\varphi^{-1}(0)|\varphi \in S\}$$

(reamintim că $\varphi^{-1}(0)$ este clasa lui $f^{-1}(0)$, pentru un $f \in \varphi$).

Dacă $p \in K^n$ şi $\alpha$ este un germene de mulţime din $L^n$ în $p$, atunci *idealul* lui $\alpha$ se defineşte, ca înainte

$$\mathcal{I}(\alpha) := \{\varphi \in \mathcal{O}_{n,p,K}|\alpha \leq \varphi^{-1}(0)\} \in Id(\mathcal{O}_{n,p,K}).$$

Limbajul germenilor este în mare măsură folosit în prezent deoarece el furnizează un cadru convenabil pentru studiul comportării locale a funcţiilor.

Trebuie remarcat totuşi, că germenii de mulţimi nu sunt mulţimi curente de puncte şi germenii de funcţii nu sunt funcţii uzuale, cu alte cuvinte, punctele individuale se pierd în trecerea la germeni.

Vom arăta cum se poate remedia această situaţie folosind Analiza nonstandard.

Astfel, vom înlocui germenii de mulţimi şi germenii de funcţii prin mulţimi curente şi funcţii curente şi vom da o aplicare efectivă a acestei proceduri.

## 3.2. Germeni nonstandard

Considerăm o extindere ${}^*K^n$ a lui $K^n$, presupusă scufundată într-un univers ${}^*\mathcal{M}$.

Identificăm pe $K$ cu $K \times \{0\} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \subseteq K^n$ şi astfel, ${}^*K$ se identifică cu ${}^*K \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \subseteq {}^*(K^n)$.

Fie $p \in K^n$. Atunci *haloul lui* $p$ (sau monada lui $p$) *hal* $(p)$ este

$$hal_n(p) = \{q \in {}^*(K^n) | {}^*d(p,q) \simeq 0\},$$

unde ${}^*d$ este extensia cu valori hiperreale la ${}^*(K^n)$ a metricii uzuale $d$, de pe $K^n$. Dacă $p = (p_1, \ldots, p_n) \in K^n$, $p_i \in K$, $i = \overline{1, \ldots, n}$, atunci

$$hal_n(p) = hal_1(p_1) \times hal_1(p_2) \times \ldots \times hal_1(p_n).$$

Alte definiţii ale haloului lui $p$ sunt:

$hal_n(p) = \cap\{{}^*U | U$ este vecinătate deschisă a lui $p$ în $K^n\}$

$hal_n(p) = \cap\{{}^*U | U$ este vecinătate standard a lui $p$ în $K^n\}$

Fie $\mathcal{T}$ topologia (metrică) pe $K^n$. Atunci membrii lui ${}^*\mathcal{T}$ sunt ${}^*$-mulţimi deschise din ${}^*(K^n)$. Definim o relaţie $r$ pe vecinătăţile deschise ale lui $p \in K^n$, prin

$UrV$ dacă şi numai dacă, $U, V \in \mathcal{T}$ şi $p \in V \subseteq U$. Dacă $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ sunt vecinătăţi ale lui $p$, atunci şi $V = U_1 \cap U_2 \ldots U_m \in \mathcal{T}$ este vecinătate a lui $p$ şi în plus avem $U_1 rV, U_2 rV, \ldots, U_m rV$.

Astfel relaţia $r$ este concurentă şi din Principiul de Concurenţă, fie $\nu$ un $^*$-deschis cu $p \in \nu \subseteq {}^*U$ pentru fiecare vecinătate deschisă $U$ a lui $p$. Atunci $\nu \subseteq hal_n(p)$.

Fie $A \subseteq K^n$ şi fie $\alpha = {}^*A \cap hal_n(p)$. Atunci $\alpha$ este *germene de mulţimi nonstandard în p*. Dacă $f \in \mathcal{F}_n$, notăm cu $^*f$ extensia lui $f$ la $^*(K^n)$. Restricţia $\phi = {}^*f|hal_n(p)$ este un *germene de funcţie nonstandard in p*.

Fie $^*A \cap hal_n(p) = \alpha = {}^*B \cap hal_n(p)$ un germene de mulţime nonstandard în $p$ şi considerăm propoziţia:

$$\phi = (\exists x \in \mathcal{T})(p \in x \wedge A \cap x = B \cap x).$$

Atunci

$$^*\phi = (\exists x \in {}^*\mathcal{T})(p \in x \wedge {}^*A \cap x = {}^*B \cap x)$$

este adevărată pentru că orice $^*$-submulţime deschisă $\gamma \subset hal_n(p)$ satisface $^*A \cap \gamma = {}^*B \cap \gamma$. Deci conform Principiului Transferului (Cap.2) $\phi$ este adevărată în $K^n$ şi deci $A$ şi $B$ sunt echivalente în $p$.

Presupunem că $^*f|hal_n(p) = \phi = {}^*g|hal_n(p)$ este un germene de funcţie nonstandard în $p$.

Atunci orice $^*$-submulţime deschisă $\gamma \subseteq hal_n(p)$, satisface $^*f|\gamma = {}^*g|\gamma$ şi din nou, conform Principiului Transferului, propoziţia

$$(\exists x \in \mathcal{T})(p \in x \wedge f|_x = g|_x)$$

este adevărată pe $K^n$. Astfel, putem defini aplicaţiile bijective $\sigma$ şi $\delta$ după cum urmează: Dacă $\alpha = {}^*A \cap hal_n(p)$ şi $\phi = {}^*f|hal_n(p)$, atunci

$\sigma(\alpha) = [A]$ este germenele de mulţime în $p$ cu reprezentant $A$ şi

$\delta(\phi) = [f]$ este germenele de funcţie în $p$ cu reprezentant $f$.

Într-adevăr, presupunem că $\alpha = {}^*A \cap hal_n(p)$ şi $\beta = {}^*B \cap hal_n(p)$ sunt germeni de mulţimi nonstandard în $p$ cu $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Atunci $A$ şi $B$ sunt echivalente în $p$ şi astfel există o vecinătate deschisă $U$ a lui $p$, astfel încât

$A \cap U = B \cap U$. Astfel avem:

$$\begin{aligned} *A \cap hal_n(p) = {}^*A \cap ({}^*U \cap hal_n(p)) = ({}^*A \cap {}^*U) \cap hal_n(p) = \\ = ({}^*B \cap {}^*U) \cap hal_n(p) = {}^*B \cap hal_n(p), \end{aligned}$$

deci $\alpha = \beta$, adică $\sigma$ *este injectivă.*

Deoarece pentru orice germene de mulţime $[A]$, avem $\sigma({}^*A \cap hal_n(p)) = [A]$, atunci $\sigma$ *este surjectivă* deci este *bijectivă.*

Presupunem că $\alpha$ şi $\beta$, aşa cum sunt definite mai sus, satisfac $\alpha \leq \beta$. Atunci propoziţia $\phi = (\exists x \in {}^*\mathcal{T})(p \in x \wedge {}^*A \cap x \subseteq {}^*B \cap x)$ este adevărată şi deci conform [P.T] Cap.2, există o mulţime deschisă $U$ cu $A \cap U \subseteq B \cap U$ astfel că $\sigma(\alpha) \leq \sigma(\beta)$, în ordinea definită anterior pentru germeni de mulţimi adică $\sigma$ păstrează ordinea.

Deoarece $[A] \leq [B]$ dacă $A \cap U \subseteq B \cap U$ pentru o anumită vecinătate deschisă a lui $p$, vom avea: ${}^*A \cap {}^*U \subseteq {}^*B \cap {}^*U$, ceea ce implică

$$\alpha = {}^*A \cap hal_n(p) \subseteq {}^*B \cap hal_n(p) = \beta.$$

Deci $\sigma^{-1}$ păstrează ordinea şi rezultă că laticea germenilor de mulţimi este izomorfă cu laticea germenilor de mulţimi nonstandard.

În continuare, mulţimea germenilor de funcţii nonstandard are o structură de inel. Prin evaluare punctuală, dacă $\phi = {}^*f|hal_n(p)$ şi $\psi = {}^*g|hal_n(p)$ atunci:

$$\begin{aligned} \phi + \psi = {}^*f|hal_n(p) + {}^*g|hal_n(p) = ({}^*f + {}^*g)|hal_n(p) \\ \phi \cdot \psi = ({}^*f|hal_n(p)) \cdot ({}^*g|hal_n(p)) = ({}^*f \cdot {}^*g)|hal_n(p) \end{aligned}$$

(Egalităţile de mai sus sunt clare deoarece operaţiile punctuale din ${}^*K^n$ sunt interpretate ca extinderile corespunzătoare ale operaţiilor din $K^n$).

Fie $\phi$ şi $\psi$ ca mai sus. Atunci $f + g$ şi $fg$ sunt definite pe o anumită vecinătate $U$ a lui $p$, astfel că:

$$\begin{aligned} \delta(\phi + \psi) = [f + g] = [f] + [g] = \delta(\phi) + \delta(\psi), \\ \delta(\phi\psi) = [fg] = [f] \cdot [g] = \delta(\phi)\delta(\psi), \end{aligned}$$

unde $[f]$ şi $[g]$ sunt germenii de funcţii cu reprezentanţii $f$ şi $g$. Astfel $\delta$ este un morfism. Dacă $\delta(\phi) = \delta(\psi)$, adică $[f] = [g]$, atunci există o mulţime deschisă $U$, astfel încât: $f|U = g|U$ şi ${}^*f|{}^*U = {}^*g|{}^*U$. Rezultă

$$\phi = {}^*f|hal_n(p) = {}^*g|hal_n(p) = \psi$$

şi deci $\delta$ este injectivă.

Dacă $[f]$ este germene de funcţie în $p$, atunci $\delta({}^*f|hal_n(p)) = [f]$ şi deci $\delta$ este bijectivă.

În concluzie $\delta$ este izomorfism de inele. Deci, dacă notăm cu $\mathcal{N}_{n,p} = \mathcal{N}_{n,p,K}$ laticea germenilor de mulţimi nonstandard din $K^n$ în $p$, cu $\mathcal{G}_{n,p} = \mathcal{G}_{n,p,K}$ laticea germenilor de mulţimi din $K^n$ în $p$, cu $\Gamma_{n,p} = \Gamma_{n,p,K}$ inelul germenilor de funcţii analitice non-standard în $n$ variabile în $p$ şi cu $\mathcal{O}_{n,p} = \mathcal{O}_{n,p,K}$ inelul germenilor de funcţii analitice în $n$ variabile în $p$, avem izomorfismele

$$\sigma : \mathcal{N}_{n,p} \to \mathcal{G}_{n,p}$$
$$\delta := \Gamma_{n,p} \to \mathcal{O}_{n,p}$$

de latici, respectiv de inele.

## 3.3. Varietăţi nonstandard

Fie acum $K \subset L$ o extindere de corpuri normate, nediscrete, complete.

Fie $S \subseteq \Gamma_{n,p,L}$ finită.

Definim *varietatea nonstandard a lui $S$ în $L^n$* ca fiind

$$\mathcal{V}_L(S) := \cap\{\phi^{-1}(0)|\phi \in S\}.$$

Dacă $p \in K^n \subset L^n$, notăm $hal_n(p) = hal_n^K(p)$ haloul lui $p$ în ${}^*(K^n)$ şi cu $hal_n^L(p)$ haloul lui $p$ în ${}^*(L^n)$ (dar, $hal_n(p) \subset hal_n^L(p)$). Atunci $\varphi^{-1}(0) = ({}^*f|hal_n(p))^{-1}(0) = \{x \in hal_n^L(p)|{}^*f(x) = 0\} \subset hal_n^L(p)$ este o mulţime de puncte.

Aici $f$ este o funcţie astfel încât $\phi = {}^*f|hal_n(p)$. Dacă $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$, unde

$$\phi_1 = f_1|hal_n(p), \ldots, \phi_m = {}^*f_m|hal_n(p)$$

avem:

$$\begin{aligned}
&\sigma(\mathcal{V}_L(\phi_1, \ldots, \phi_m)) = \sigma(\phi_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap \phi_m^{-1}(0)) = \\
&= \sigma({}^*f_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap {}^*f_m^{-1}(0) \cap hal_n^L(p)) = \\
&= [f_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap f_m^{-1}(0)] = [f_1^{-1}(0)] \wedge \ldots \wedge [f_m^{-1}(0)] = \\
&= \mathcal{V}_L([f_1], \ldots, [f_m]) = \mathcal{V}_L(\delta(\phi_1), \ldots, \delta(\phi_m)).
\end{aligned}$$

## §4. Polinoame Weierstrass. Teoremele de pregătire şi de împărţire ale lui Weierstrass

Fie $f : V \subset K^n \to K$ o funcţie de $n$ variabile, analitică pe o vecinătate $V \subseteq K^n$ a originii cu valori în $K$ şi fie

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{j \geq 0} f_j(t_1, \ldots, t_n),$$

unde $f_j(t_1, \ldots, t_n)$ este polinom omogen de grad $j$ din dezvoltarea în serie de puteri a lui $f_j(t_1, \ldots, t_n)$ în jurul originii.

$f$ se spune *că este regulată în $t_n$ de ordin $k > 0$*, dacă $f_j(t_1, \ldots, t_n) \equiv 0$ pentru $j < k$ şi $t_n^k$ are coeficient nenul în $f_k(t_1, \ldots, t_n)$.

Dacă

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j \geq k} f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n), \;\; f_k(t_1, \ldots, t_n) \not\equiv 0,$$

este uşor de găsit o transformare liniară nesingulară $t_j \to t'_j$ care transformă pe $f$ într-o funcţie care este regulată în $t'_n$ de ordin $k$.

Un *polinom Weierstrass de grad $k > 0$ în $t_n$* este o funcţie $h(t_1, \ldots, t_n)$ de forma

$$h(t_1, t_2 \ldots, t_n) = t_n^k + a_1(t_1, \ldots, t_{n-1})t_n^{k-1} + \ldots + a_k(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

unde $a_j(t_1, \ldots, t_{n-1})$ sunt analitice într-o vecinătate a originii lui $K^{n-1}$ şi astfel încât $a_j(0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Un astfel de polinom Weierstrass este regulat în $t_n$ de ordin $k$.

**Teorema 4.1. (de pregătire a lui Weierstrass).** *Dacă $f(t_1, \ldots, t_n)$, $n \geq 1$ este analitică în vecinătatea originii şi este regulată în $t_n$ de ordin $k > 0$, atunci există o vecinătate $V$ a originii şi există un polinom Weierstrass $h(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ de grad $k$, definit pe $V$ şi o funcţie analitică $u(t_1, \ldots, t_n)$, $u : V \to K$, $u(0, \ldots, 0) \neq 0$ (deci $u$ inversabilă) astfel încât*

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = u(t_1, \ldots, t_n) \cdot h(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

pe $V$.

**Teoreme 4.2. (de împărţire a lui Weierstrass).** *Fie $h(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ un polinom Weierstrass de ordin $k$ în $t_n$, care este definit pe o vecinătate a originii şi fie $f(t_1, \ldots, t_n)$ o funcţie analitică în origine. Atunci există o vecinătate $V$ a originii, astfel încât*

$$f(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1, \ldots, t_n) \cdot h(t_1, \ldots, t_n) + v(t_1, \ldots, t_n)$$

*unde $g(t_1, \ldots, t_n)$ şi $v(t_1, \ldots, t_n)$ sunt analitice în $V$ şi $v(t_1, \ldots, t_n)$ este un polinom de grad $< k$ în raport cu $t_n$, adică*

$$v(t_1, \ldots, t_n) = b_1(t_1, \ldots, t_{n-1}) t_n^{k-1} + \ldots + b_k(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

*unde $b_j$ sunt analitice în origine.*

Vom folosi versiunile nonstandard ale Teoremelor de Pregătire şi de Împărţire ale lui Weierstrass în extinderea ${}^*K^n$ a lui $K^n$.

Terminologiile nonstandard corespunzătoare sunt:

Un *germene de polinom nonstandard în $t_n$* cu coeficienţi analitici este ${}^*f|hal_n(0)$ unde $hal_n(0)$ este haloul originii şi $f$ este un polinom în $t_n$ cu coeficienţi analitici.

Un germene de funcţie analitică nonstandard ${}^*f|hal_n(0)$ este *regulat în* $t_n$ *de ordin* $k$ dacă $f$ este regulat în $t_n$ de ordin $k$.

Un germene de *polinom Weierstrass, nonstandard, de grad* $k > 0$ este ${}^*g|hal_n(0)$, unde $g$ este polinom Weierstrass de grad $k > 0$.

Din Principiul Transferului, vom avea următoarele versiuni nonstandard ale celor două teoreme.

**Teorema 4.3. (Teorema nonstandard de pregărtire a lui Weierstrass).** *Fie $\phi$ un germene de funcţie analitică nonstandard în origine care este regulat de ordin $k > 0$ în $t_n$. Atunci există un germene de polinom Weierstrass nonstandard $\omega$ de grad $k$ in $t_n$ şi un germene de funcţie analitică nonstandard $\psi$ astfel încât*

$$\phi(t_1, \ldots, t_n) = \psi(t_1, \ldots, t_n) \cdot \omega(t_1, \ldots, t_n).$$

**Teorema 4.4. (Teorema nonstandard de împărţire a lui Weierstrass).** *Fie $\omega$ un germene de polinom Weierstrass nonstandard de grad $k$ în $t_n$ şi fie $\phi$ un germene de funcţie analitică nonstandard în origine $0 \in K^n$. Atunci există un germene de funcţie analitică nonstandard $\Delta$ şi un germene de polinom nonstandard, $\rho$, în $t_n$, de grad $< k$ în $t_n$, astfel încât:*

$$\phi(t_1, \ldots, t_n) = \omega(t_1, \ldots, t_n) \cdot \Delta(t_1, \ldots, t_n) + \rho(t_1, \ldots, t_n).$$

## §5. O extensie a Teoremei lui Ruckert a zerourilor pentru corpuri normate, complete, nediscrete

În acest paragraf extindem teorema clasică a lui Ruckert de la **C** la extinderea de corpuri $K \subset \tilde{K}$, unde $K$ este corp normat, complet, nediscret, iar $\tilde{K}$ este completatul închiderii algebrice a lui $K$ (a se vedea Teorema 1.2.10, §1).

**5.1. Teorema lui Ruckert a zerourilor**: *Fie $I$ un ideal în inelul germenilor de funcţii analitice în originea lui $K^n$, ($K$ corp normat, nediscret, complet) şi fie $\tilde{K}$ ca mai sus. Atunci:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}_{\tilde{K}}(I)) = \sqrt{I}.$$

Vom demonstra un analog al Teoremei lui Ruckert de mai sus pentru germeni de mulţimi şi funcţii nonstandard (Teorema 5.14) şi conform izomorfismelor $\sigma$ şi $\delta$ introduse în §2, vom avea o demonstraţie a Teoremei 5.1.

Pentru a demonstra analogul nonstandard, vom folosi conceptul de *punct generic* al lui Robinson [Ro 2], ceea ce nu ar fi posibil în versiunea standard, deoarece un germene de mulţime nu este mulţime, în schimb germenii de mulţimi nonstandard sunt mulţimi.

**5.2. Puncte generice**. Notăm cu $\Gamma_n$ inelul germenilor de funcţii analitice nonstandard în originea lui $K^n$, adică

$$\phi = {}^*f|hal_n(0,\ldots,0) \in \Gamma_n \Leftrightarrow f : K^n \to K$$

este analitică în $(0,\ldots,0) \in K^n$. Vom nota haloul originii lui $K^n$ prin $hal_n(0)$. Analog $\tilde{\Gamma}_n$ este inelul germenilor de funcţii analitice non-standard în originea lui $\tilde{K}^n$. Notăm cu $\overline{hal_n(0)} := hal_n^{\tilde{K}}(0)$. Avem $hal_n(0) \subseteq \overline{hal_n(0)}$.

Fie $E \subseteq hal_n(0)$. Atunci *idealul lui $E$*, $\mathcal{I}(E)$ este definit astfel

$$\mathcal{I}(E) = \{\phi \in \Gamma_n | a \in E \Rightarrow \phi(a) = 0\}.$$

$\mathcal{I}(E)$ este un ideal în $\Gamma_n$.

Dacă $I \subseteq \Gamma_n$ este un ideal, atunci $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \overline{hal_n(0)}$ este *punct generic pentru $I$* dacă pentru $\phi \in \Gamma_n$, $\phi \in I$ dacă şi numai dacă $\phi(p) = 0$, adică dacă şi numai dacă

$$I = \{\phi \in \Gamma_n | \phi(p) = 0\} = \mathcal{I}(p).$$

## 5.3. Puncte generice pentru ideale prime în $\Gamma_n$.

În inelul germenilor de funcţii analitice în originea lui $K^n$, conceptul de punct generic pentru un ideal rămâne nedefinit, deoarece germenii de funcţii nu mai sunt funcţii definite pe mulţimi de puncte. Vom reînvia conceptul de punct generic, dar acum pentru ideale în $\Gamma_n$, inelul de germeni de funcţii analitice nostandard în origine, şi apoi vom găsi un punct generic pentru orice ideal prim propriu din $\Gamma_n$.

**Lema 5.4.** *Există un punct $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ în $hal_n(0)$, astfel încât $(\forall)\phi \in \Gamma_n$, avem $\phi(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n) = 0$ dacă şi numai dacă $\phi = 0$. Cu alte cuvinte idealul $(0)$ din $\Gamma_n$ admite un punct generic în $hal_n(0)$, deci şi în $\overline{hal_n(0)}$.*

**Demonstraţie**. Fie $P = (0) \in Id(\Gamma_n)$ idealul zero şi fie $\phi = {}^*f|hal_n(0) \in \Gamma_n \setminus P$.

Dacă $U$ este o vecinătate deschisă a originii, atunci $(\exists)x \in U$ astfel încât $f(x) \neq 0$. Putem presupune că $f$ este analitică pe $U$ şi deci există o vecinătate $V$ a lui $x$, $V \subseteq U$ astfel încât $f|V \neq 0$ (această notaţie înseamnă $f(x) \neq 0$ $(\forall)x \in V$). Fie $\nu = {}^*g|hal_n(0)$, $\nu \neq 0$ şi presupunem că $g$ este analitică pe $U$, $g \neq 0$. Dacă $g|V = 0$ atunci $g(x) = 0$ $(\forall)x \in U$ contradicţie. Astfel, pentru orice submulţime deschisă $W \neq \emptyset$, $W \subset V$, $g|W \neq 0$ şi $f|W \neq 0$ şi astfel avem generalizarea:

Fie $f_1, \ldots, f_n$ analitice în origine astfel încât pe nici o vecinătate deschisă $U$ a originii nu există $f_k$, $k \leq n$ identic nulă pe acea $U$.

Atunci, pentru orice vecinţate deschisă $U$ a originii pe care $f_1, \ldots, f_k$ sunt analitice, există o submulţime deschisă $W \neq \emptyset$, $W \subset U$, astfel încât $f_1|W \neq 0, \ldots, f_k|W \neq 0$. Definim o relaţie $r$ astfel: $(f, U)rW$ dacă şi numai dacă $f$ este analitică şi nenulă pe vecinătatea $U$ a originii şi $W \neq \emptyset$ este o submulţime deschisă a lui $U$ cu $f|W \neq 0$.

Relaţia $r$ este concurentă. Conform Principiului de Concurenţă, există o mulţime $^*$-deschisă $\nu \neq \emptyset$ astfel încât dacă $f$ este analitică şi nenulă pe vecinătatea deschisă $U$ a originii, atunci $\nu \subseteq {}^*U$ şi ${}^*f|\nu \neq 0$. Deoarece pentru orice vecinătate deschisă a originii există o funcţie analitică $f \neq 0$, $f : U \to K$, avem:

$$\nu \subseteq \cap\{{}^*U|U \text{ este vecinătate deschisă a originii}\} = hal_n(0).$$

Fie $\zeta \in \nu$. Atunci $\zeta \in hal_n(0)$ şi $\phi \in \Gamma_n$, $\phi(\zeta) = 0$ dacă şi numai dacă $\phi \in P$, adică $\zeta$ este punct generic pentru $P = (0)$.

***

Dacă $P \subseteq \Gamma_1$ este un ideal nenul, atunci fie $\phi = {}^*f|hal_n(0) \in P$, $\phi \neq 0$. Dacă $f \neq 0$ în origine, atunci există o vecinătate $U$ a originii astfel încât $f|U \neq 0$ şi deci $\phi = {}^*f|hal_n(0) \subseteq {}^*f|{}^*U \neq 0$.

Astfel $\phi$ are o inversă multiplicativă în $\Gamma_1$ şi deci $P = \Gamma_1$.

**Lema 5.5.** *Fie $P \in Id(\Gamma_1)$, $P$ ideal prim, propriu nenul în $\Gamma_1$. Atunci orice $\phi \in P$ este dat de $\phi(z) = z^k \cdot \psi(z)$ unde $\psi \in \Gamma_1$, cu $\psi(0) \neq 0$ şi $k \in {}^*N$ standard. Astfel originea este punct generic pentru $P$.*

*De fapt, $P$ este idealul elementelor neinversabile din $\Gamma_1$ şi este generat de polinomul $P(t) = t$.*

**Demonstraţie**. Fie $M$ mulţimea elementelor neinversabile din $\Gamma_1$. Atunci $P \subseteq M$. Fie $\phi \in M$, $\phi = {}^*f|hal_n(0)$. Dacă $f \neq 0$ în origine, atunci $f$ ar fi nenulă pe o vecinătate $U$ a originii şi $\phi$ ar fi inversabilă, contradicţie.

Astfel putem scrie $\phi(z) = z^k \cdot \psi(z)$, unde $\psi \notin M$. În particular, dacă $\phi \in P$, atunci $\psi \notin P$ şi deoarece $P$ este prim, atunci $z^k \in P$ deci $z \in P$ şi $M \subseteq P$. Rezultă că $P = M$.

Deoarece $\phi \in \Gamma_n$ este inversabilă $\Leftrightarrow \phi(0) \neq 0$, atunci $P = \{\phi \in \Gamma_1|\phi(0) = 0\}$, şi astfel *0 este punct generic pentru P*.

***

În continuare, pentru a găsi un punct generic în haloul $\overline{hal_n(0)}$, pentru un ideal prim propriu, arbitrar al lui $\Gamma_n$, trebuie să mai considerăm câteva lucruri intermediare.

În primul rând dacă $P \subseteq \Gamma_n$ este ideal propriu şi $\phi \in P$, atunci $\phi(0, 0, \dots, 0) = 0$, deoarece în caz contrar $\phi \in P$ este inversabil în $\Gamma_n$, contrar cu $P \neq \Gamma_n$.

Considerăm dezvoltarea în serie de puteri a lui $\phi$ dată de

$$\phi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j \geq k} \phi_j(t_1, \dots, t_n)$$

unde $\phi_k$ este omogen şi nenul. Atunci ca în cazul standard, există o transformare liniară nesingulară $T : {}^*K^n \to {}^*K^n$ astfel încât $T(\phi)$ este regulat în $t_n$ de ordin $k$. Deoarece $T$ păstrează idealele prime şi zerourile funcţiilor, atunci putem presupune că *$\phi$ este regulat în $t_n$ de ordin $k$.*

**Lema 5.6.** *Dacă $P \subseteq \Gamma_n$ este un ideal prim propriu nenul atunci există un polinom Weierstrass nonstandard $\omega \in P$.*

**Demonstraţie**. Fie $\phi$ regulat în $t_n$ de ordin $k$. Din Teorema de pregătire Weierstrass, nonstandard, rezultă $\phi = \omega\pi$, unde $\pi \in \Gamma_n$ este inversabil şi $\omega$ este polinom Weierstrass nonstandard.

Atunci $\pi \notin P$, şi deoarece $P$ este ideal prim, avem $\omega \in P$.

***

Fie $\pi_{n+1} = \{\pi \in \Gamma_{n+1} | \pi$ *este germene de polinom nonstandard în $t_{n+1}$ cu coeficienţi analitici* $\}$. Atunci $\pi_{n+1}$ şi $\Gamma_n[t_{n+1}]$ sunt domenii de integritate izomorfe, unde $\pi \in \pi_{n+1}$ poate fi privit ca un membru din $\Gamma_n[t_{n+1}]$.

Pentru $P \subseteq \Gamma_{n+1}$ ideal, fie $P' = P \cap \Gamma_n$ şi $P'' = \Gamma_n[t_{n+1}] \cap P$, adică $P'$ este mulţimea membrilor lui $P$ care sunt independenţi de $t_{n+1}$ şi $P''$ este mulţimea acelor membri ai lui $P$ care sunt numai "polinomial dependente" de $t_{n+1}$. În cazul când $P$ este ideal propriu, atât *$P'$ cât şi $P''$ sunt proprii*, deoarece în caz contrar, un membru inversabil al lui $\Gamma_n$ sau $\Gamma_n[z_{n+1}]$ din $P'$ sau $P''$ va implica $P = \Gamma_{n+1}$, contradicţie.

Avem următorul rezultat (cu demonstraţie imediată).

**Lema 5.7.** *Fie $P \subseteq \Gamma_{n+1}$ un ideal prim, propriu, nenul. Atunci $P'$ este un ideal prim propriu în $\Gamma_n$.*

Presupunem că $P' \subseteq \Gamma_n$ este un ideal cu punctul generic $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ în haloul originii lui ${}^*(\tilde{K}^n)$ şi definim $\varepsilon : \Gamma_n \to {}^*\tilde{K}$ prin $\varepsilon(\phi) = \phi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, adică $\varepsilon$ este morfismul de evaluare în $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Deoarece $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ este punct generic pentru $P'$, atunci avem că $P' = Ker\,\varepsilon$. Astfel fie $G : \Gamma_n/P' \to {}^*\tilde{K}$ scufundare indusă de $\varepsilon$.

Dacă $P \subseteq \Gamma_{n+1}$ este ideal şi $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma_n$ cu $\phi_1 + P' = \phi_2 + P'$, adică $\phi_2 - \phi_1 \in P'$, atunci $\phi_2 - \phi_1 \in P$ şi astfel $\phi_1 + P = \phi_2 + P$. Astfel asocierea $\phi + P' \to \phi + P$ este o aplicaţie bine definită. Dacă $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma_n$, cu $\phi_1 + P = \phi_2 + P$, atunci $\phi_1 - \phi_2 \in P$ şi $\phi_1 - \phi_2 \in \Gamma_n$ adică $\phi_1 - \phi_2 \in P'$, astfel că $\phi_1 + P' = \phi_2 + P'$. Astfel, asocierea dată scufundă $\Gamma_n/P'$ în $\Gamma_{n+1}/P$.

Fie $l : \Gamma_{n+1} \to \Gamma_{n+1}/P$, *proiecţia canonică.*

Dacă $\omega \in P$ este un polinom Weierstrass nonstandard (cf. Lemei 5.6) atunci pentru un anumit $m$ standard, (adică gradul lui $\omega$) avem:

$$0 = l(\omega) = l(t_{n+1})^m + \sum_{j=0}^{m-1} l(a_j) l(t_{n+1})^j$$

unde dacă $j \leq m - 1$, atunci $l(a_j) \in \Gamma_n/P'$. Astfel $l(t_{n+1})$ este întreg peste $\Gamma_n/P$.

Fie $\nu \in \Gamma_{n+1}$. Atunci conform Teoremei de diviziune nonstandard, există $\Delta \in \Gamma_{n+1}$ şi $\rho \in \pi_{n+1}$ cu $\nu = \omega\Delta + \rho$, şi deoarece $\omega \in P$, avem

$$l(\nu) = l(\omega) l(\Delta) + l(\rho) = l(\rho).$$

Astfel, deoarece $\rho \in \Gamma_n[t_{n+1}]$, acesta este polinom în $l(t_{n+1})$ cu coeficienţi în $\Gamma_n/P'$, de unde $l(\nu)$ este întreg peste $\Gamma_n/P'$. Deducem următoarea

**Lema 5.8.** *$\Gamma_{n+1}/P$ este extindere întreagă a lui $\Gamma_n/P'$.*

Fie $\Phi$ corpul de fracţii al lui $\Gamma_n/P'$ şi definim $p \in \Phi[x]$ prin

$$p(x) = x^m + \sum_{j=0}^{m-1} l(a_j) x^j.$$

Astfel $p(l(t_{n+1})) = 0$ şi astfel fie $q \in \Phi[X]$ un factor ireductibil al lui $p$ cu $q(l(t_{n+1})) = 0$. Extindem pe $\varepsilon$ (definit după Lema 5.7) în mod natural la $\Phi[X]$ aplicând-o coeficienţilor unui anumit membru din $\Phi[X]$.

Astfel $\varepsilon : \Phi[X] \to {}^*\tilde{K}[X]$ este morfism. Atunci $\varepsilon(q)$ este un factor al lui $\varepsilon(p)$.

*Fie $\zeta_{n+1}$ un zerou al lui $\varepsilon(q)$ în ${}^*\tilde{K}$, pentru că ${}^*\tilde{K}$ este algebric închis.*

Astfel $\varepsilon(p)(\zeta_{n+1}) = 0$ deoarece $\varepsilon(q)(\zeta_{n+1}) = 0$ şi avem

$$\varepsilon(p)(x) = x^m + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon(l(a_j))x^j = x^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)x^j.$$

Deoarece $a_0, \ldots, a_{m-1}$ sunt coeficienţii unui polinom Weierstrass nonstandard, atunci ei sunt toţi zero şi analitici în origine. Astfel, deoarece $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ este în haloul originii, atunci pentru $j \leq m-1$, $|a_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| \simeq 0$ (deoarece $a_j$ sunt funcţii continue în origine).

**Lema 5.9.** Fie $p$ un polinom peste inelul funcţiilor continue într-o vecinătate deschisă $V$ a originii lui $\tilde{K}^n$ cu valori în $\tilde{K}$, dat de

$$p(z_1, \ldots, z_{n+1}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z_1, \ldots, z_n)z_{n+1}^j + z_{n+1}^k$$

cu $a_0, \ldots, a_{k-1}$ continue pe $V$ şi $a_j(0, \ldots, 0) = 0$, $0 \leq j \leq k-1$. Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \overline{hal_n(0)}$. Atunci orice rădăcină a polinomului $q(z) = p(\xi_1, \ldots, \xi_n, z)$ din ${}^*\tilde{K}$ este de asemenea infinitezimală.

**Demonstraţie**. Fie $\xi \in {}^*\tilde{K}$ o rădăcină a lui $q$. Dacă $\xi = 0$, este infinitezimală. Presupunem $\xi \neq 0$. Avem:

$$0 = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)\xi^j + \xi^k,$$

deci

$$1 = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)\xi^{j-k} \quad \text{împărţim cu } \xi^k \neq 0).$$

Dacă $\xi$ nu este infinitezimal $\xi^{j-k}$ este finit, $(\forall)j$, $0 \leq j \leq k-1$. Cum $a_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sunt infinitezimale, $a \leq j \leq k-1$ (căci $a_j$ sunt continui într-o vecinătate a lui $0 \in \tilde{K}^n$ şi $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \overline{hal_n}(0)$) deducem că membrul drept al ultimei egalităţi este infinitezimal, deci $\neq 1$, contradicţie. Rămâne că $\xi$ este infinitezimal în ${}^*\tilde{K}$.

Din Lema 4.8 şi consideraţiile anterioare deducem:

**Lema 5.10.** *Fie $P \subseteq \Gamma_{n+1}$ un ideal prim, propriu, nenul şi presupunem $P' = P \cap \Gamma_n$ are $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ca punct generic $\in \overline{hal_n}(0)$. Atunci $\zeta_{n+1}$, aşa cum este obţinut mai sus, este infinitezimal şi deci $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \overline{hal_{n+1}}(0)$.*

**Lema 5.11.** *Dacă* $q \in (\Gamma_n/P')[X]$ *este ireductibil peste* $\Phi$*, cu* $l(t_{n+1})$ *zero al lui* $q$ *şi* $\phi \in \Gamma_n$*, atunci pentru un anumit* $\rho \in \Gamma_n[t_{n+1}], \phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}) = \rho(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1})$.

**Demonstraţie**. Fie $\zeta_{n+1} \in {}^*\tilde{K}$ un zerou al lui $\varepsilon(q)$. Deoarece $q \in \Phi[X]$ este ireductibil peste $\Phi$, lema precedentă furnizează $(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}) \in \overline{hal_n}(0)$ şi avem, pentru $p \in \Phi[X]$ cu $q$ ca factor:

$$0 = \varepsilon(p)(\zeta_{n+1}) = \zeta_{n+1}^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\zeta_{n+1}^j = \omega(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1})$$

unde $\omega$ este polinomul Weierstrass nonstandard cu coeficienţi $a_0,\ldots,a_{m-1} \in \Gamma_n$. Din Teorema de împărţire nonstandard, avem $\Delta \in \Gamma_{n+1}$ şi $\rho \in \Gamma_n[t_{n+1}]$ cu grad $< m-1$, astfel încât $\phi = \omega\Delta + \rho$, dar atunci

$$\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}) = \rho(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}).$$

***

Considerăm morfismul de evaluare în $(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1})$, adică $\varepsilon' : \Gamma_n[z_{n+1}] \to {}^*\tilde{K}$ definit prin $\pi \to \pi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1})$.

Atunci $\varepsilon'/\Gamma_n = \varepsilon$ induce o scufundare $G : \Gamma_n/P' \to {}^*\tilde{K}$, după cum a fost arătat.

Deoarece $\zeta_{n+1}$ şi $l(t_{n+1})$ sunt zerouri ale lui $\varepsilon(q)$ şi $q$, $q$ ireductibil, atunci asocierea $l(t_{n+1}) \to \zeta_{n+1}$ produce o extensie $G'$ a lui $G$ la $\Gamma_n[t_{n+1}]/P''$, $G' : \Gamma_n[t_{n+1}]/P'' \to {}^*\bar{K}$ care este o scufundare ($P'' = P \cap \Gamma_n[t_{n+1}]$).

Presupunem $p \in \Gamma_n[t_{n+1}]$ definit prin

$$p(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^{s} b_j(t_1,\ldots,t_n)t_{n+1}^j$$

şi presupunem că $p \in Ker\,\varepsilon$. Atunci

$$G(p+P'') = \sum_{j=0}^{s} G(b_j+P)\zeta_{n+1}^j = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon(b_j)\zeta_{n+1}^j = \varepsilon'(p) = 0$$

şi astfel, deoarece $G'$ este injectiv, avem $p + P'' = P''$.

Un rezultat elementar de algebră este:

**Lema 5.12.** *Morfismul de evaluare* $\varepsilon' : \Gamma_n[t_{n+1}] \to {}^*\bar{K}$ *are ca nucleu idealul* $P''$ *din* $\Gamma_n[t_{n+1}]$, *adică următoarea diagramă este comutativă*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n[t_{n+1}] & \xrightarrow{\varepsilon'} & {}^*\bar{K} \\ l \searrow & & G' \nearrow \\ & \Gamma_n[t_{n+1}]/P'' & \end{array}$$

În final avem următoarea teoremă:

**Teorema 5.13.** *Dacă* $P$ *este ideal prim propriu al lui* $\Gamma_n$, $n$ *standard, atunci* $P$ *are un punct generic în haloul* $\overline{hal_n(0)}$ *a originii lui* ${}^*\bar{K}^n$.

**Demonstraţie**. Dacă $P = 0$, conf. Lemei 5.4, teorema este adevărată.

Presupunem că $P \neq 0$. Dacă $n = 1$, conform Lemei 5.5 afirmaţia este adevărată.

Presupunem că teorema are loc pentru numărul natural standard $n$, şi că $P \subseteq \Gamma_{n+1}$ este un ideal nenul, prim propriu. Din Lema 4.7, $P'$ este ideal prim propriu în $\Gamma_n$, şi astfel are un punct generic $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \overline{hal_n}(0)$, conform ipotezei de inducţie.

Lema 5.9 furnizează un $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1}) \in \overline{hal_{n+1}(0)}$, astfel încât din Lema 5.10, dacă $\phi \in \Gamma_{n+1}$, atunci, pentru un anumit $p \in \Gamma_n[t_{n+1}]$, $\phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1}) =$ $= p(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$. Deoarece de asemenea $l(\phi) = l(p)$, atunci $\phi \in P$ dacă şi numai dacă $p \in P \cap \Gamma_n[t_{n+1}] = P'' = Ker\ (\varepsilon')$ dacă şi numai dacă

$$\phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1}) = p(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1}) = \varepsilon'(p) = 0.$$

Prin urmare, $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$ *este un punct generic pentru* $P$.

Teorema zerourilor a lui Ruckert. Demonstraţie nonstandard.

**Teorema 5.14 (a lui Ruckert a zerourilor pentru corpuri normate, complete. Versiune nonstandard)**. *Cu* $K$ *şi* $\tilde{K}$ *ca în 5.1, dacă* $I$ *este un ideal în* $\Gamma_n$, *atunci* $\mathcal{I}(\mathcal{V}_{{}^*\tilde{K}}(I)) = \sqrt{I}$.

**Demonstraţie**. Fie $I$ ideal în $\Gamma_n$. Presupunem $\psi \notin \sqrt{I}$. Fie $S = \{J \subseteq \Gamma_n | J$ este ideal, $I \subseteq J$ şi $\psi \notin \sqrt{J}\}$.

$S$ este o mulţime nevidă, inductivă şi are astfel un element maximal $P$. $P$ este prim şi deci are un punct generic $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ în haloul originii lui $0 \in {}^*\tilde{K}^n$. Atunci $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ este un zero pentru fiecare membru al lui $I$, dar nu pentru $\psi$, deoarece $\psi \notin P$. Astfel, $\psi \notin \mathcal{I}(\mathcal{V}_{*\tilde{K}}(I))$ şi deci $\mathcal{I}(\mathcal{V}_{*\tilde{K}}(I)) \subseteq \sqrt{I}$, deci $\mathcal{I}(\mathcal{V}_{*\tilde{K}}(I)) = \sqrt{I}$.

Teorema 5.1 rezultă acum din aplicarea izomorfismelor $\sigma$ şi $\delta$ lui $\Gamma_n$ şi mulţimii de germeni nonstandard în origine, respectiv.

**Corolar 5.15** (Teorema Ruckert din [A]). *Dacă $K$ este un corp normat, nediscret, complet, algebric închis, (deci dacă şi numai dacă $K = \tilde{K}$), atunci $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.*

***

# Capitolul VI
# APLICAŢII GEOMETRICE

## §1. Varietăţi Gauss cu curbură continuă

Un rezultat important de analiză nonstandard îl contituie următoarea teoremă datorată lui Stroyan şi Luxemburg:

**Teorema 1.1.** *Fie $f : U \to \mathbf{R}^n$ o aplicaţie standard definită pe $U \subset \mathbf{R}^m$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

a) *Există o aplicaţie standard $Df : U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ astfel încât dacă $x$ este lângă un punct standard din ${}^\sigma U$ şi $\delta_z$ un infinit mic în ${}^*\mathbf{R}^m$, atunci:*

$$f(x + \delta_z) - f(x) = Df_x(\delta_z) + |\delta_z| \cdot \eta,$$

*unde $\eta$ este infinit mic din ${}^*\mathbf{R}^n$.*

b) *Pentru orice punct standard $a \in {}^\sigma U$ există o aplicaţie internă liniară finită $L_a \in {}^*\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ (având norma* sup *finită) astfel încât*

$$x \approx y \approx a \quad \textit{implică} \quad f(y) - f(x) = L_a(y - x) + |y - x| \cdot \eta,$$

*cu $\eta \in {}^*\mathbf{R}^n$.*

c) *$U$ este deschisă şi $f \in C^1(U)$.*

Mai general, dacă $f : U \to \mathbf{R}^n$ este o aplicaţie standard, atunci $U$ este deschisă şi $f \in C^r(U)$ dacă şi numai dacă există o aplicaţie standard $L^k$ : $U \to S\mathcal{L}^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $k \leq r$ (mulţimea aplicaţiilor $k$-liniare simetrice : $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$) astfel încât pentru orice $x$ lângă un punct standard din $^*U$ şi $\delta_z \in {}^*\mathbf{R}^m$ infinit mic, atunci

$$f(x + \delta_z) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} L_x^k(\delta_z)^{(k)} + ||\delta_z||^n \cdot \eta,$$

cu $\eta \in {}^*\mathbf{R}^n$ infinit mic (*formula Taylor*).

**Definiţia 1.2.** O submulţime $V \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte *varietate Gauss de dimensiune m având curbura continuă* dacă există o aplicaţie standard $T$ : $V \to \mathcal{A}_m(\mathbf{R}^n)$ = mulţimea hiperplanelor afine de dimensiune $m$ din $\mathbf{R}^n$, având următoarele proprietăţi:

1) dacă $A \in V$, atunci $A \in T(A)$;

2) pentru orice punct aproape standard $A \in {}^*V$ proiecţia ortogonală a mulţimii $^*V$ pe $T(A)$ aplică punctele $B \in {}^*V$ cu $B \approx A$ în puncte $b \in T(A)$ astfel încât $b \approx A$.

3) pentru orice puncte aproape standard $A \in {}^*V$ şi $B \in {}^*V$ astfel încât $B \approx A$, cu $B - A = t + n$ ($t \in T(A)$) şi $n$ normal la $T(A)$), atunci $\dfrac{||n||}{||B - A||} \approx 0$.

Condiţia 1) este o condiţie de incidenţă;

Condiţia 2) arată că în apropierea infinitezimală a oricărui punct, varietatea are dimensiunea cel puţin $m$; $T(A)$ este numit *hiperplanul tangent în A la V*.

**Observaţie**. Conceptul modern de varietate datorat lui Hermann-Weyl este diferit. Anume, varietatea diferenţiabilă de clasă $C^k$ şi dimensiune $n$ este un spaţiu topologic separat care se acoperă cu un atlas ale cărui hărţi locale sunt homeomorfe pe deschişi din $\mathbf{R}^n$, în plus orice două hărţi sunt $C^k$ compatibile.

**Teorema 1.3.** *Dacă* $V \subset \mathbf{R}^n$ *este o varietate Gauss de dimensiune* $m$ *având curbura continuă, atunci* $V$ *este o varietate diferenţiabilă de clasă* $C^1$ *şi dimensiune* $m$ *cu hărţile date de proiecţiile locale pe spaţiile tangente.*

**Demonstraţie** (nonstandard). Arătăm mai întâi că dacă $A$ şi $B$ sunt puncte aproape standard pe $^*V$, şi $A \approx B$, atunci $T(A)$ şi $T(B)$ sunt aproape paralele (adică au aceeaşi parte standard $P$). Într-adevăr, fie $\delta = ||B-A|| \neq 0$.

Vectorii unitari standard $st\dfrac{B-A}{\delta} = -st\dfrac{A-B}{\delta}$ aparţin la $st(T(A)) \cap st(T(B)) = P$ şi conform condiţiei 3):

$$\frac{B-A}{\delta} = \frac{n(A)}{\delta} + \frac{t(A)}{\delta} \approx \frac{t(A)}{\delta} \quad \text{şi} \quad \frac{A-B}{\delta} = \frac{n(B)}{\delta} + \frac{t(B)}{\delta} \approx \frac{t(B)}{\delta}$$

deci $\dfrac{t(A)}{\delta} \cdot \dfrac{t(B)}{\delta} \approx -1$ şi proiecţia unuia pe celălalt are aceeaşi parte standard.

Vom scrie $B - A \approx {}^{\delta}t(A)$ în loc de $\dfrac{B-A}{\delta} \approx \dfrac{t(A)}{\delta}$. Conform condiţiei 2), în $^*V$ există puncte $C, D$ astfel încât $\delta = ||C - A|| = ||D - B||$ şi unghiul dintre $C - A$, $D - B$ este egal cu unghiul dintre $T(A)$ şi $T(B)$. În plus, conform 3) $C - A \approx {}^{\delta}t(C)$ în $T(A)$ şi $D - B \approx {}^{\delta}t(D)$ în $T(B)$. Aşadar, $C - A + A - B \approx {}^{\delta}t(C) + t(B) \approx {}^{\delta}t(C) - t(A) \approx {}^{\delta}C - B$ şi ca atare, $T(A)$ este aproape paralel cu $T(B)$.

Arătăm acum că proiecţia ortogonală a lui $V$ pe $T(A)$ este bijectivă în vecinătatea aproape standard a unui vector din $^*V$.

Fie $B - A = T + M$ şi $C - A = T + N$, unde $M$ şi $N$ sunt normale la $T(A)$. Atunci $C - B = C - A + A - B = N - M$ stă aproape în $T(B)$ conform condiţiei 3) şi aproape în $T(M)$, deoarece $T(M)$ este aproape paralel cu $T(B)$. Aşadar, $M = N$.

Să considerăm acum următoarea proprietate:

**Proprietatea P**. *Proiecţia ortogonală a unei mulţimi de vectori* $B$ *pe* $^*V$ *astfel încât* $||B - A|| < \eta$ *este o bijecţie pe imaginea ei în* $T(A)$.

Conform celor spuse anterior, Proprietatea P are loc pentru orice număr pozitiv infinit mic $\eta$. Conform principiului Cauchy " dacă $P(x)$ este o proprietate interioară cu cuantificatori şi variabilă liberă $x$ şi dacă $I'(P(\eta))$ are loc pentru orice $\eta$ infinit mic, atunci $I'(P(x))$ este adevărată pentru toţi $x$, $|x| < \delta$, mai mici decât un număr standard $\delta$", rezultă că proiecţia este o bijecţie locală.

Alegem acum în $^*V$ două puncte $A, B$ aproape standard cu proiecţiile $P_A, P_B$ bijective pe vecinătăţi care conţin un punct aproape standard $C$. Aplicaţiile $P_A, P_B$ sunt definite prin neglijarea componentelor normale de vectori deplasare definiţi în $^*\mathbf{R}^n$ deci şi pe $T(C)$.

Considerăm "restricţia" $\psi$ a lui $T(A)$ la $T(B)$ prin $T(C)$, adică $\psi = P_B \circ (P_A^{-1}|T(C))$. Aceasta este o aplicaţie liniară care deplasează $c = P_A(C)$ în $P_B(C)$. Notăm

$$\varphi = P_B \circ P_A^{-1}.$$

Dacă $a \approx c$ pe $T(A)$ şi $X = P_A^{-1}(x)$, cum $P_A$ este continuă şi $X \approx C$, atunci conform 3), $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ diferă printr-un număr infinitezimal multiplu al lui $||X - C||$.

Rezultă că $\varphi$ este uniform derivabilă în $C$ şi aplicând teorema Stroyan-Luxemburg, rezultă că $\varphi \in C^1$. Aşadar, $V$ are o structură naturală de varietate $C^1$ diferenţiabilă în sensul lui Weyl.

**Observaţie**. Fie $A$ aproape standard în $^*V$ şi $\delta > 0$, $\delta \approx 0$. Introducem notaţia $E \overset{\delta}{\approx} F$ dacă $\dfrac{||E - F||}{\delta}$ este infinitezimal (se spune că $E$ este $\delta$-egal cu $F$); condiţia 3) arată că $\delta V = \left\{ B \in {}^*V | \dfrac{||B - A||}{\delta} \text{ este finit} \right\}$ este $\delta$-vecin de un spaţiu vectorial având $A$ ca vector nul; $\delta V$ diferă $\delta$-infinitezimal de proiecţia lui $V$ pe $T(A)$.

În acest mod, există o legătură între numere infinit mici şi forme diferenţiale.

Dacă $x : {}^*V \to {}^*\mathbf{R}^n$ este o aplicaţie finită interioară astfel încât $\delta \cdot x(A) \in \delta(V)$, atunci $x$ are o aproximare liniară finită şi notăm cu $dx$ clasa de $\delta$-egalitate a acesteia.

Folosirea infinitezimalelor mici în geometria locală cere nu utilizarea funcţiilor ci a germenilor.

Dăm două ilustrări ale acestor consideraţii.

a) **Studiul nonstandard al triedrului Frènet**

Presupunem că $m = 1$ şi $V \subset \mathbf{R}^3$ este o varietate Gauss cu curbură continuă. Presupunem curba local parametrizată, luând ca parametru lungimea $u$ în lungul tangentei (ca în teorema anterioară), iar vectorii unitari ai tangentei aproximaţi astfel: dacă $B \approx A$, $T(A) \approx \dfrac{B-A}{||B-A||}$. Dacă $V$ este dată printr-o parametrizare $X(T)$ de clasă $C^2$, atunci

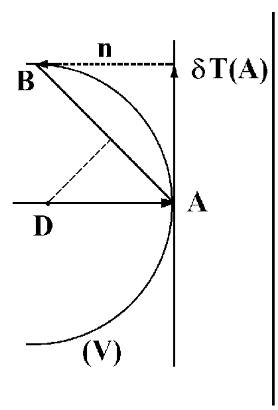
$$T(A) = \frac{dX}{dt}/\frac{ds}{dt} = st\left(\frac{X(t+\delta t) - X(t)}{\delta(t)}\right)/st\left(\frac{||X(t+\delta t) - X(t)||}{\delta(t)}\right)$$

unde $A$ este standard, $A = X(t)$, $B = X(t+\delta t) \approx A$. Avem $||X(u) - A|| = u(1+\varepsilon)$ deci $\dfrac{du}{ds}(A) = 1$, $\dfrac{dX}{du}(A) = \dfrac{dX}{ds}(A) = T(A)$. Considerăm apoi deplasarea normală $n$ a punctelor infinitezimal apropiate de $A$, $n = X(\delta) - A - \delta T(A)$. Conform formulei lui Taylor, rezultă

$$n = \frac{1}{2}\delta^2(d^2X/du^2)(A) + \delta^2\eta,$$

unde $\eta \approx 0$ şi

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dX}{du}\right)(A) = \frac{dT}{ds}(A).$$



Notăm $\chi_A = \dfrac{dT}{ds}(A)$ numit *vectorul de curbură al lui* $V$ *în* $A$ şi presupunem că $\chi_A \neq 0$ (adică $T(A)$ şi $n$ determină un plan $P$ trecând prin $A$.

Fie $D$ intersecţia paralelei prin $A$ la $n$ cu normala din mijlocul segmentului $AB$ la planul $P$, $B = X(\delta)$. Atunci

$$\frac{||D-A||}{||B-A||} = \frac{||B-A||}{2||n||}$$

deci

$$D - A = (1+\varepsilon)^2 \cdot \frac{\delta^2}{2||n||} \cdot \frac{n}{||n||} \approx \frac{1}{\left\|\dfrac{dT}{ds}(A)\right\|} \cdot \frac{\dfrac{dT}{ds}(A)}{\left\|\dfrac{dT}{ds}(A)\right\|}.$$

În plus, cercul care trece prin $A$ şi $B$, cu centrul în $D$ are partea standard tangentă la cercul standard de rază $\dfrac{1}{||\chi_A||}$ în direcţia lui $\chi_A$. Aceasta nu depinde de alegerea lui $\delta$.

Considerând triedrul lui Frènet mobil cu versorii $T, N = \dfrac{\chi}{||\chi||}$ şi $B = T \times N = \dfrac{\tau}{||\tau||}$ rezultă

$$T(s+\delta) = T(s) + \delta||\chi||N,$$

$$N(s+\delta) = N(s) - \delta||X||T + \delta||\tau||B$$

şi

$$B(s+\delta) = B(s) - \delta||\tau||N,$$

care descriu (modulo $\overset{\delta}{\approx}$) formulele clasice ale lui Frènet, anume

$$dT = N||\chi||ds$$

$$dN = -||\chi||Tds + ||\tau||Bds$$

$$dB = -||\tau||Nds.$$

Notând $R = T||\tau|| + B||\chi||$, rezultă într-o formă mai simplă.

$$dT = R \times Tds$$

$$dN = R \times Nds$$

$$dB = R \times Bds.$$

b) **Definiţia nonstandard a noţiunii de curbură totală a unei suprafeţe**

Fie $n = 2$, $V \subset \mathbf{R}^3$ o suprafaţă (varietate Gauss) de clasă $C^2$ nesingulară, orientată prin vectorul normală $n(A)$, $A \in V$. Aplicaţia Gauss $\gamma : V \to S^2$ ($S^2$ fiind sfera unitate $X^2+Y^2+Z^2 = 1$ din $\mathbf{R}^3$ raportată la un reper ortonormal $OXYZ$) asociază oricărui punct $A(x, y, z)$ acel unic punct $L(X, Y, Z) \in S^2$ astfel încât $\overrightarrow{OL}= n(A)$. Dacă $B \approx A$ şi $B(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, atunci scriind că vectorul $\overrightarrow{OL}$ este normal la $\overrightarrow{AB}$, rezultă $Xdx + Ydy + Zdz \overset{\delta}{\approx} 0$. Dacă $B, C \in T(A)$ sunt infinitezimal apropiate de $A$, notăm cu $d^2\sigma$ paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, cu aria egală (modulo $\delta^2$) cu aria proiecţiei acestuia pe ${}^*V$.

Dacă $A + E \in d^2\sigma$, avem $\vec{n}(A + E) = n(A) + Dn_A(E) + ||E||\eta$ deci $n(A + E) \approx {}^{\sigma}n(A) + Dn_A(E)$ deci notând cu $d^2\Sigma$ proiecţia paralelogramului pe sfera unitate (prin aplicaţia $\gamma$) deci paralelogramul construit pe vectorii $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ în planul tangent la sfera $S^2$ în punctul $n(A)$, Gauss a definit curbura totală a suprafeţei $V$ în punctul $A$ prin

$$K(A) \approx \frac{\text{aria}(d^2\Sigma)}{\text{aria}(d^2\sigma)}.$$

De exemplu dacă $V$ este dată prin ecuaţia carteziană $z = f(x, y)$, atunci

$$A(x, y), \quad B(x + \delta_1 x, y + \delta_1 y), \quad C(x + \delta_2 x, y + \delta_2 y),$$

$$n(A)(XY), \quad n(B)(X + \delta_1 X, Y + \delta_1 Y), \quad n(C)(X + \delta_2 X, Y + \delta_2 Y),$$

atunci ariile celor două paralelograme vor fi

$$(\delta_1 x)(\delta_2 y) - (\delta_2 x)(\delta_1 y) \quad \text{şi} \quad (\delta_1 X)(\delta_2 Y) - (\delta_2 X)(\delta_1 Y)$$

şi cum $X, Y$ sunt funcţii de $x, y$, rezultă

$$\delta_1 X = X(B) - X(A) \overset{\delta}{\approx} \frac{\partial X}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta_1 y,$$

$$\delta_2 X = X(C) - X(A) \overset{\delta}{\approx} \frac{\partial X}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta_2 y,$$
$$\delta_1 Y = Y(B) - Y(A) \overset{\delta}{\approx} \frac{\partial Y}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta_1 y,$$
$$\delta_2 Y = Y(C) - Y(A) \overset{\delta}{\approx} \frac{\partial Y}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta_2 y.$$

După calcule uşoare rezultă curbura totală a suprafeţei $V$ în punctul curent ca fiind

$$K = \frac{\partial X}{\delta x} \cdot \frac{\partial Y}{\delta y} - \frac{\partial X}{\delta y} \cdot \frac{\partial Y}{\delta x},$$

cu egalitate (şi nu modulo $\delta$) deoarece ambii membrii sunt expresii standard.

Aceste consideratii nu sunt noi dar arată că Analiza Non-Standard permite reprezentări geometrice intuitive mai simple decât limbajul limitelor cu $\varepsilon - \delta$ al analizei clasice şi al geometriei diferenţiale moderne.

# §2. Varietăţi Nonstandard

Fie $I$ o mulţime finită standard. Fixăm o mulţime $M$, $n \in \mathbf{N}_\sigma$ şi $(U_i)_{i \in I}$ o familie de $s$-deschişi din $\mathbf{R}^n$, împreună cu o familie $\varphi_i : U_i \to M$ de aplicaţii injective ale căror imagini acoperă $M$ (numite parametrizări locale) astfel încât

$$U_{ij} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)]$$

sunt $s$-deschişi în $\mathbf{R}^n$ pentru $i, j \in I$.

Se spune că $M$ *are o structură de varietate* $C^1$ *nonstandard* dacă $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sunt standardizabile ($\forall st p \in U_{ij}\ \exists st q \in U_{ij}$, $q \simeq \varphi_{ji}(p)$), $S$-continue, cu derivate $S$-continue.

*$M$ împreună cu atlasul $(U_i, \varphi_i)$, $i \in I$ se numeşte varietate nonstandard de clasă $C^1$.*

Această definiţie reproduce definiţia lui H. Weyl cu adaptări, considerând atlase finite. Definiţia se extinde imediat obţinând *varietăţi analitice* sau *olomorfe* (Înlocuind $\mathbf{R}^n$ cu $\mathbf{C}^n$ şi diferenţiabilitatea prin $\mathbf{C}$-diferenţiabilitate). De asemenea rezultă şi conceptul de aplicaţie olomorfă între varietăţi analitice nonstandard.

În Geometria clasică, fibratul tangent la o varietate este definit asociind fiecărui punct $p$ spaţiul (afin) al vectorilor tangenţi în acel punct $T_pM$, identificând $v \in T_pM$ şi $w \in T_qM$ ori de câte ori $q = \varphi_{ji}(p)$ şi $w = D\varphi_{ji}(p)v$.

Ştim că derivatele sunt unice, în sensul că pentru un punct standard fixat două funcţii derivabile având aceeaşi standardizare au şi aceleaşi derivate externe. Aşadar, definiţia unui fibrat tangent pentru varietăţi nonstandard nu trebuie să fie sensibilă la variaţii infinitezimale ale funcţiilor de tranziţie $\varphi_{ji}$.

În multe consideraţii de Mecanică şi Electromagnetism sunt studiate mărimi fizice influenţate de perturbaţii sau mici deformări ale structurilor în timp sau în spaţiu. Deformările infinitezimale sunt direct legate de Analiza Nonstandard, de îndată ce este asigurată stabilitatea structurală a cadrului geometric.

# Bibliografie

[A] S.S. ABHYANKAR, Local Analitic Geometry, Acad. Press, 1964

[An] Th. ANGHELUŢĂ, Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.

[AC] C.A. CAZACU, Teoria funcţiilor de mai multe variabile complexe. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[AMD] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALDS, Introd. to Comm. Alg., Addison-Wesley, 1969.

[ACJ] C.A. CAZACU, G. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU. Probleme moderne de teoria funcţiilor, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1965.

[AM] Analiză matematică II. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[Ba] S. BASARAB, Teorema lui Roth. Aspecte nonstandard. St. Cerc. Mat. Tom 35, Nr.2, Bucureşti, 1983.

[Bg] IP.v.d BERG, Nonstandard Asymtotic Analysis. vol. 1249 of LNM, Springer-Verlag, 1987.

[BCR] J. BOCHNEK, M. COSTE, M.F. ROY, Real Alg. Geom., Springer, 1998.

[BSt] C. BĂNICĂ, O. STĂNĂŞILĂ, Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe. Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1974.

[BS] J.L. BELL, A.B. SLOMSON, Models and Ultraproducts: An Introduction. Amsterdam, North Holland, 1971.

[AM] N. CUTLAND, Nonstandard Analysis and its Applications. London Math. Soc. Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988.

[CK] C.C. CHANG, H.J. KEISLER, Model Theory, Studies in Logic and the foundations of mathematics. vol. 73, North Holland, 1990.

[Dv] M. DAVIS, Applied Nonstandard Analysis. Wiley, New York, 1977.

[DD] F. DIENER, M. DIENNER, Nonstandard Analysis in Practice. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[DR] F. DIENER, G. REEB, Analyse Nonstandard. Hermann, 1982.

[Fr] A. FRUCHARD, Complex analysis in Nonstandard Analysis in Practice, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[GR] R.C. GUNNING, H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables. Englewood Clifs, N.J: Prentice-Hall, 1965.

[HiM] J. HIRSCHFELD, M. MACHOVER, Lecture Notes on Non-Standard Analysis. L.N.M. 94, Springer Verlag, 1969.

[HeM] C.W. HENSON, L.C. MOORE, The nonstandard theory of topological vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972).

[I1] C. IMPENS, Local Microcontinuity of nonstandard polynomials. Isr. J. Math. 59, nr.1, 1987.

[I2] C. IMPENS, Propagation of microcontinuity for nonstandard polynomials. J. Anal. Math. vol. 53, 1989.

[I3] C. IMPENS, Real functions as traces of infinite polynomials. Math. Ann. 284, 1989.

[I4] C. IMPENS, Standard and Nonstandard Polynomial Approximation. Journal of Math. Analysis and Applications, vol. 171, nr.2, 1992.

[IM] GH. ISAC, GH. MARINESCU, Analiză pe corpuri ultrametrice, Ed. Acad. RSR, 1976.

[La] S. LANG, Algebra, Addison-Wesley, 1965.

[Lu1] W.A.J. LUXEMBURG, What is Non-Standard Analysis. Amer. Math. Monthly, 80.

[Lu2] W.A.J. LUXEMBURG, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Holt, New York, 1969.

[Li] T. LINDSTRØM, An invitation to nonstandard analysis, in Non-standard Analysis and its Applications. London Math. Soc. St. Texts,10, 1988.

[LG] R. LUTZ, M. GOZE, Non-Standard Analysis a practical guide with applications, L.N.M. 881. Springer, 1982.

[Na] R. NARASIMHAN, Analiză pe varietăţi reale şi complexe; Texte matematice esenţiale. Theta, Bucureşti, 2001.

[Ne] E. NELSON, Internal Set Theory. Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1977.

[Ra] N. RADU, Inele locale, vol. I şi II. Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1968.

[Ro1] A. ROBINSON, Nonstandard Analysis. Princeton University Press, 1996.

[Ro2] A. ROBINSON, Germs, In Proc. of Internat. Sympos. on Applications of Model Theory to Algebra Analysis and Probability. Pasa. Calif. Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[R] P. ROQUETTE, Nonstandard aspects of Hilbert irreducibility theorem; in Model Theory and Algebra, Lecture Notes in Mathematics 498, Springer Verlag, 1975.

[Rb] A. ROBERT, Elliptic Curves, LNM 326, Springer, 1973.

[RR] A. ROBINSON, P. ROQUETTE, On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations. J. Number Theory 7, 1975.

[Ru] S. RUDEANU, Elemente de teoria mulţimilor, Bucureşti, 1973.

[RZ] A. ROBINSON, E. ZAKON, A set theoretical characterization of enlargements; in [Lu2], 1969.

[RW] W. RUDIN, Real and complex analysis. McGraw-Hill, New Delhi, 1974.

[St] S. STOILOW, Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, vol. I, II. Ed. Academiei RSR, 1954.

[SL] K.D. STROYAN, W.A.J. LUXEMBURG, Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press, 1976.

[SZ] P. SAMUEL, O. ZARISKI, Commutative Algebra, vol.1, 2. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1960.

[Vo] R.L. VAUGHT, Some aspects of the Theory of Models.

[PP] A. PĂSĂRESCU, O. PĂSĂRESCU, Study on formal convergent series with nonstandard methods. Buletin St. Univ. Piteşti, Serie Matematică şi Informatică, 5(2000).

[P1] A. PĂSĂRESCU, Rückert Nullstellensatz for normed, non-discrete fields using non-standard analysis, Analele Univ. Constanţa, vol. 9, f.2 (2001).

[P2] A. PĂSĂRESCU, Nullstellensatz for real fields using model theory, Analele Univ. Bucureşti, Seria Matematică, vol. 51 (2002).