Applied Sciences *** **Monographs** # 1

Marcel Romică ROMAN

HIGHER ORDER LAGRANGE SPACES

APPLICATIONS

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Higher Order Lagrange Spaces. Applications (Rom)
Monographs # 1

Higher Order Lagrange Spaces. Applications (Rom)
Marcel Romică Roman. - Bucharest:
Applied Sciences * Monographs, 2002

Includes bibliographical references.

Universitatea "Al.I.Cuza"
Facultatea de Matematică

Teză de doctorat

SPAŢII LAGRANGE DE ORDIN SUPERIOR SPECIALE. APLICAŢII.

Conducător ştiinţific:	Candidat:
Acad.Prof.Dr.Doc. Radu Miron	**Asist. Roman Marcel Romică**
Facultatea de Matematică	Catedra de Matematică
Universitatea "Al.I.Cuza", Iaşi	Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

2001

CUPRINS

INTRODUCERE

Geometria Lagrange de ordin superior a fost construită de Prof. Radu Miron, [49], şi constă în definirea fibratului k-osculator $Osc^k M$, definirea clară, pentru prima dată a noţiunii de spaţiu Lagrange de ordin superior, rezolvarea problemei prelungirii structurilor Riemanniene, Finsleriene şi Lagrangiene la fibratul k-osculator, studierea problemei variaţionale pentru Lagrangieni de ordin k şi studierea geometriei acestora.

Tematica tezei de doctorat se încadrează în domeniul geometriilor Lagrange, un domeniu deosebit de actual. Deoarece geometriile Lagrange cuprind ca un caz particular geometriile Riemanniene, geometriile Finsleriene şi sunt subordonate geometriilor Lagrange generale, spectrul aplicaţiilor este foarte larg şi divers. Astfel, Relativitatea Generală, Optica Relativistă, Mecanica Analitică a Lagrangienilor care depind de acceleraţiile de ordin superior, procesele biologice etc., sunt studiate tot mai intens cu ajutorul geometriilor Lagrange. În teză am studiat clase speciale de Lagrangieni de ordin superior, în principal geometrii Finsler de ordin superior cu (α, β)-metrică, problema variaţională pentru integrala acţiunii acestor spaţii, legea conservării energiei, cazul deosebit de important al spaţiilor Randers de ordin superior. Deasemeni, sunt studiate conexiunile liniare, obţinându-se noi caracterizări pentru acestea.

Prezenta lucrare este structurată pe cinci capitole şi cu excepţia primului capitol şi a unei părţi din capitolul al doilea conţine, în majoritatea lor, rezultate originale care au făcut obiectul a 6 articole publicate (3) sau în curs de publicare. De asemenea, o parte din rezultate au fost prezentate la diferite conferinţe din ţară sau străinătate:

- A XXV-a Conferinţa Naţională de Geometrie şi Topologie, Iaşi, 18-23 septembrie, 1995;

- Workshop-ul "Differential Geometry, Global Analysis and Lie Algebras", Thessaloniki, Grecia, iunie 1997;

- Zilele Academice Ieşene, octombrie 1996, octombrie 1999;

- Sesiunea omagială dedicată Acad.Prof.Dr.Doc. Radu Miron la a 70-a aniversare, octombrie 1997;

- Al XI-lea Seminar Naţional de Geometrie Finsler şi Lagrange, Bacău, 16-20 februarie 2000;

-A treia Conferinţă a Societăţii Balcanice a Geometrilor, Bucureşti, august 2000.

Vom prezenta rezumatul lucrării: Primul capitol are caracter monografic şi este dedicat introducerii fibratului k–osculator studiind distribuţiile verticale, câmpurile vectoriale Liouville, k-semisprayurile, conexiunile neliniare (în special cele ce derivă dintr-un k-semispray), prelungirile structurilor Riemanniene, Finsleriene şi Lagrangiene la fibratul k-osculator, pentru ca în final să introducem noţiunile de spaţiu Lagrange şi Finsler de ordin superior.

În primul paragraf al capitolului se defineşte noţiunea de fibrat k-osculator, Osc^kM utilizând contactul de ordin k a două curbe. Se arată că relaţia "a avea un contact de ordin k" este o relaţie de echivalenţă pe multimea curbelor care trec prin x_0. O clasă de echivalenţă o vom nota $[\rho]_{x_0}$ şi o vom numi *spaţiul k-osculator* în punctul $x_0 \in M$. Notăm cu Osc^kx_0 mulţimea spaţiilor k-osculatoare în x_0 şi vom considera $\mathrm{Osc}^kM = \bigcup_{x_0 \in M} \mathrm{Osc}^k x_0$. Mulţimea Osc^kM are o structură diferenţiabilă naturală indusă de cea de pe M, cu ajutorul submersiei $\pi : [\rho]_{x_0} \in \mathrm{Osc}^kM \longrightarrow x_0 \in M,\ \forall [\rho]_{x_0}$, aşa încât (Osc^kM, π, M) este un fibrat diferenţiabil numit fibratul k-osculator. În (1.5) este dată o transformare de coordonate locale induse.

Utilizând aplicaţiile tangente ale proiectorilor π^k_α, $(\alpha = 1, .., k-1)$ se obţin k distribuţii verticale integrabile $V_1, V_2, ..., V_k$ ce au proprietăţile:

1. $V_1, V_2, ..., V_k$ sunt distribuţii integrabile.
2. $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_k$.
3. $\dim V_1 = kn,\ \dim V_2 = (k-1)n, ..., \dim V_k = n$.
4. O bază locală a distribuţiei V_α este $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}}, ..., \dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}} \right\}$

pentru $\alpha = 1, ..., k$. Se definesc câmpurile vectoriale $\overset{1}{\Gamma}, ..., \overset{k}{\Gamma}$ date de (2.7) numite câmpurile vectoriale Liouville.

Cu ajutorul k-structurii tangente J se introduce noţiunea de k-semispray (în Definiţia 3.1) şi se exprimă acesta în baza naturală.

Noţiunea de omogenitate prezentată în §4. a fost introdusă de M. de Leon,[44]. Are loc o teoremă care generalizează teorema lui Euler pentru funcţii omogene, (Teorema 4.1): $f \in \mathcal{F}(E)$ este p-omogenă de ordin r dacă şi numai dacă $\pounds_{\overset{k}{\Gamma}} f = rf$, unde $\pounds_{\overset{k}{\Gamma}}$ reprezintă derivata Lie în raport cu câmpul vectorial $\overset{k}{\Gamma}$.

În §5. se defineşte conexiunea neliniară pe $E = Osc^k M$ ca fiind un subfibrat vectorial NE al fibratului tangent TE astfel încât să aibă loc sumă Whitney (5.1). Cu ajutorul coeficienţilor $\{\underset{(\alpha)}{N^i_j}\}, \alpha = 1, .., k$ ai conexiunii neliniare N se introduce baza adaptată descompunerii directe

$$T_u E = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus \ldots \oplus N_{k-1}(u) \oplus V_k(u), \quad \forall u \in E$$

dată de $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\}$. Se exprimă apoi coeficienţii duali şi legăturile acestora cu coeficienţii conexiunii neliniare N.

O problemă veche în geometria diferenţială este cea a prelungirii unei structuri Riemanniene g de pe o varietate reală n-dimensională M la fibratul jeturilor de ordin superior. Problema a fost rezolvată pentru $k = 1$ de A.Morimoto în [60] şi parţial pentru cazul $k = 2$ de K.Yano şi S.Ishihara în [89]. În lucrarea [49], R.Miron rezolvă această problemă în cazul general. În acest sens plecând de la o structură Riemanniană g, R.Miron determină o conexiune neliniară N, care depinde numai de g. N-liftul Sasaki al metricii g, ne dă o structură Riemanniană G pe E care depinde numai de metrica Riemann considerată. Existenţa spaţiului $Prol^k R^n = (Osc^k M, G)$, rezolvă problema mai sus menţionată. Problema prelungirii structurilor Riemanniene a mai fost studiată de E. Bompiani, Ch. Ehresman, S. Kobayashi. Problema prelungirii structurilor Finsleriene sau Lagrangiene de la TM la fibratul k–osculator $\mathrm{Osc}^k M$ a apărut prima dată în lucrarea [49].

În paragraful 7 se defineşte spaţiul Lagrange de ordin superior: *Un spaţiu Lagrange de ordin k este o pereche* $L^{(k)n} = (M, L)$, *unde*

1° M *este o varietate reală n-dimensională.*

2° $L : \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow I\!R$ *este un Lagrangian diferenţiabil pe* $\widetilde{E}$.

3° *d-câmpul tensorial*

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} \tag{1.1}$$

satisface:

a. rang $\|g_{ij}\| = n$ *pe* $\widetilde{E} = \widetilde{\mathrm{Osc}^k M}$

b. Forma pătratică $\psi = g_{ij}\xi^i\xi^j$ *are signatură constantă pe* $\widetilde{E}$.

În continuare vom spune că L este *funcţia fundamentală* şi g_{ij} este *câmpul tensorial fundamental* al spaţiului $L^{(k)n}$. Se pot introduce două conexiuni canonice ce depind numai de lagrangianul L, una dată de Prof. R.Miron în (7.6) şi una dată de I.Bucataru în (7.9).

Au fost necesari peste 70 de ani de încercări datorate lui A.Kawaguchi, J.L.Synge, H.V.Craig, K.Kondo şi mulţi alţii pentru a se obţine o definiţie corectă a noţiunii de spaţiu Finsler de ordinul $k > 1$. Dificultăţile constau în definirea corectă a omogenităţii Lagrangienilor de forma $L(x, y^{(1)}, .., y^{(k)})$. Abia în 1996, Prof. R.Miron a considerat spaţiile Lagrange $L^{(k)n} = (M, L)$ pentru care omogenitatea funcţiei L este definită prin $L(x, ty^{(1)}, t^2y^{(2)}, .., t^ky^{(k)}) = t^r L(x, y^{(1)}, y^{(2)}, .., y^{(k)}),\ \ r \in Z$. Cartea "The geometry of higher order Finsler spaces", Hadronic Press, 1998 - prefaţată de R.M.Santilli,[50] introduce clar şi riguros spaţiile menţionate. Se prezintă succint câteva rezultate din teoria spaţiilor Finsler de ordinul $k \geq 1$, în ideea de a le aplica la ceea ce vom numi spaţii Finsler de ordin $k \geq 1$ cu (α, β)-metrică.

Capitolul al doilea se ocupă de problema variaţională. Problema variaţională în mecanica analitică de ordin superior a fost abordată de numeroşi geometri: R.Miron [9], [49], [55], H.V.Craig [24], J.L.Synge [84], M.R.Santilli [76], [77], M.de Léon [43], [44], M.Crampin [25], K.Kondo [42], şi alţii. În acest capitol este descrisă problema variaţională pentru spaţii Lagrange $L^{(k)n}$, sunt exprimate ecuaţiile Euler–Lagrange, energiile de ordin superior şi sunt determinate legile de conservare ale energiei $\varepsilon_k(L)$.

În prima parte a capitolului vom prezenta problema variaţională pentru metrici Riemanniene, după care problema variaţională va fi prezentată pentru Lagrangieni diferenţiabili de ordin 1, 2 şi k. Deoarece în cazul $k = 2$ rezultatele sunt mai clare şi mai uşor de demonstrat am prezentat acest caz mai pe larg, iar pentru $k > 2$ am enunţat rezultatele mai importante. Vom specifica particularizările în cazul spaţiilor Finsler de ordin $k \geq 1$.

Apare aici pentru prima oară, în paragraful 3, calculul variaţional pentru spaţii Finsler de ordinul 1 cu (α, β)-metrică, în care contribuţia autorului cade pe euaţiile Lorentz a acestora.

Problema variaţională pentru un spaţiu Riemann conduce la ecuaţiile Euler-Lagrange (1.3), a căror soluţii se numesc curbe extremale sau geodezice ale spaţiului Riemann $\mathcal{R}^n$.

Pentru Lagrangieni de ordinul 1 problema variaţională conduce la ecuaţiile Euler-Lagrange $E_i(L) = 0$, $\left(y^i = \frac{dx^i}{dt}\right)$. Se arată că de-a lungul curbelor extremale, soluţii ale acestor ecuaţii, energia E_L a Lagrangianului L se conservă.

Problema variaţională pentru un Lagrangian regulat $L(\alpha,\beta) = \check{F}^2(\alpha,\beta)$ a unui spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică conduce la ecuaţiile Euler-Lagrange. Vom demonstra că ecuaţiile Euler-Lagrange sunt ecuaţiile Lorentz ale spaţiului. Atunci conexiunea neliniară Lorentz şi conexiunea metrică şi canonică permit dezvoltarea geometriei acestor spaţii. Spaţiile Finsler cu (α,β)-metrici sunt o generalizare directă a spaţiilor Randers sau Kropina. Importanţa acestei noţiuni în aplicaţii este subliniată de M.Matsumoto, [48], D.Bao, S.S.Chern şi Z.Shen, [12], P.Antonelli şi R.Miron, [9], H.Shimada şi S.Sabău, [83]. Spaţiile menţionate au fost studiate cu metode ale geometriei Finsler, utilizând mai ales conexiunea neliniară Cartan şi conexiunea metrică şi canonică. Aceste conexiuni sunt obţinute în urma unor calcule extrem de complicate. Din acest motiv, ecuaţiile Einstein şi ecuaţiile Maxwell bazate pe conexiunile menţionate nu au fost suficient investigate.

În paragraful 3 este studiată problema variaţională a integralei acţiunii pentru Lagrangianul regulat dat de $L(\alpha(x,y),\beta(x,y)) = F^2(x,y)$, luând în considerare o parametrizare specială pentru curbele extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange, anume parametrizarea în raport cu metrica Riemann $\alpha^2(x,y)$. Problema variaţională pentru $F^2(x,y)$ conduce la ecuaţiile Euler-Lagrange (3.14) Se demonstrează că energia $\varepsilon_L = F^2$ a spaţiului Finsler F^n se conservă de-a lungul curbelor extremale. Considerând parametrizarea canonică a metricii Riemann α^2 se obţine Teorema 3.2 care exprimă ecuaţiile Euler-Lagrange în forma:

$$E_i(\alpha^2) + 2\frac{\rho_1}{\rho}F_{ij}(x)y^j = 0,\ y^j = \frac{dx^j}{ds} \tag{3.25}$$

care nu reprezintă altceva decât ecuaţiile Lorentz pentru un spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică. Demonstrăm apoi că (3.25) se scriu în forma echivalentă (3.26):

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \sigma(x,y)F^i_j(x)\frac{dx^j}{ds}.$$

Ca aplicaţii, particularizăm Lagrangianul $L(\alpha,\beta)$ şi obţinem ecuaţiile Lorentz pentru spaţiile Randers, Kropina, Matsumoto şi Riemann.

În ce priveşte problema variaţională pentru Lagrangieni de ordin $k > 1$ se arată că spaţiile Lagrange de ordin $k \geq 2$ ce satisfac condiţiile Zermelo sunt singulare, adică $rang||g_{ij}(x,y^{(1)},y^{(2)})|| < n$.

Un rezultat nou, care surprinde este că nu există spaţii Finsler de ordin $k \geq 2$ care să satisfacă condiţiile Zermelo.

În Capitolul 3 studiem N-conexiunea liniară iar în §3. calculăm d-tensorii de torsiune şi de curbură ai unei N-conexiuni liniare şi ai unei conexiuni Berwald.

Un rol deosebit în geometria fibratului k-osculator îl au conexiunile liniare care păstrează prin paralelism distribuţiile date de suma directă (5.2), Cap.I. Acestea au fos introduse şi studiate de Prof. R.Miron în [49] şi se numesc N-conexiuni liniare. În această secţiune se introduce noţiunea de N-conexiune liniară pe spaţiul total E=$Osc^k M$ al fibratului k-osculator şi vom da o nouă caracterizare a N-conexiunii liniare utilizând k-structura tangentă şi k-structura aproape de contact ale conexiunii neliniare N. Avantajul considerării acestei conexiuni liniare rezultă din faptul că, în baza adaptată, coeficienţii acestei conexiuni sunt obiecte geometrice destul de simple, uşor de găsit în majoritatea cazurilor. Se demonstrează Propoziţia 1.1 şi anume că pentru orice N-conexiune liniară avem îndeplinite condiţiile 3. şi 4.:

3. $D\mathbf{F}_1 = D\mathbf{F}_2 = \cdots = D\mathbf{F}_{k-1} = 0$ şi 4. $D\mathbf{F}_k = 0$.

Reciprocele acestei propoziţii pun în evidenţă noi caracterizări ale N-conexiunii liniare date în teoremele 1.4 şi 1.5.

În paragraful al doilea din acest capitol generalizăm d-conexiunea Vrănceanu de la două distribuţii suplementare la trei, obţinem cu ajutorul structurii θ din (2.4) o nouă caracterizare pentru N-conexiunea liniară şi stabilim condiţiile în care conexiunea Berwald D (pe care aici o obţinem ca un caz particular de conexiune Vrănceanu) coincide cu conexiunea Vrănceanu $\widetilde{\nabla}$. Astfel, avem următorii coeficienţi locali ai conexiunii Berwald

$$F^k_{ij} = \frac{\delta \underset{(1)}{N^k_j}}{\delta y^{(1)i}}, \quad \underset{(1)}{C^k_{ij}} = \frac{\partial \underset{(1)}{N^k_j}}{\partial y^{(2)i}}, \quad \underset{(2)}{C^k_{ij}} = 0. \tag{2.9}$$

Are loc Teorema 2.7: *Fie* ∇ *o conexiune liniară pe* Osc^2M, $\widetilde{\nabla}$ *conexiunea Vrănceanu asociată acesteia şi* D *conexiunea Berwald. Atunci* $\widetilde{\nabla} = D$ *dacă şi numai dacă* $\widetilde{\nabla} \circ J = 0$.

Capitolul 4 are scopul de a studia spaţiile Lagrange de ordin superior de tip Randers.

Cum am văzut în Cap.2, spaţiile Randers sunt cazuri particulare de spaţii Finsler cu (α, β)-metrică. Vom extinde noţiunea la spaţiile Randers generale studiate de Prof. R.Miron în [51]. Un spaţiu Randers general este un spaţiu Finsler având funcţia metrica $L(x,y)$ de forma $L(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$ unde $\alpha(x,y)$ este funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler şi $\beta = b_i(x)y^i$ este o funcţie 1-formă pe fibratul tangent al varietăţii bază M.

Perechea $GR^n = (M, L(x,y))$ a fost denumită de Prof.R.Miron, în lucrarea [51], spaţiu Randers general.

Geometria spaţiilor GR^n este importantă pentru modelele geometrice din teoria câmpurilor fizice.

O problemă importantă este determinarea prin metode geometrice a unei conexiunii neliniare canonice, mai simplă decât conexiunea neliniară Cartan funcţiei metrice $L(x,y)$, deoarece aceasta este extrem de complicată.

În lucrarea [51] această problemă este rezolvată folosind ecuaţiile Lorentz ale spaţiului GR^n. Se obţine o conexiune neliniară canonică având coeficienţii $N^i{}_j(x,y) = \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - F^i_j$ unde $\overset{\circ}{N}{}^i{}_j$ este conexiunea neliniară Cartan a spaţiului Finsler $F^n = (M, \alpha(x,y))$ asociat lui GR^n iar $F^i_j(x,y) = a^{ik}(x,y)F_{kj}(x)$ este forma mixtă a tensorului electromagnetic $F_{ij}(x) = \dfrac{\partial b_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial b_i}{\partial x^j}$.

Se remarcă faptul că această conexiune neliniară nu are caracter Finslerian, deoarece coeficienţii $N^i{}_j$ nu sunt omogeni în raport cu y^i. Într-adevăr, $\overset{\circ}{N}{}^i{}_j$ este 1-omogen iar F^i_j este 0-omogen.

În cele ce urmează vom elimina acest inconvenient. Ca urmare rezultatele acestui capitol aparţin autorului tezei.

Vom considera o nouă conexiune neliniară care să fie omogenă, având coeficienţii

$$N^i{}_j(x,y) = \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - f(x,y)F^i_j$$

unde f este o funcţie 1-omogenă în raport cu y^i. Pentru aceasta vom determina conexiunea metrică şi canonică, curbura d-conexiunii metrice canonice şi vom scrie ecuaţiile Einstein ale spaţiului Randers general GR^n, corespunzătoare d-conexiunii metrice canonice $C\Gamma(N)$, unde N este conexiunea neliniară considerată mai sus.

În §2. introducem spaţiile Randers de ordinul al doilea şi apoi considerând coeficienţii unui 2-semispray daţi de (2.11), construim o conexiune neliniară şi determinăm d-tensorii de torsiune şi d-tensorii de curbură ai conexiunii Berwald.

În ultimul paragraf se introduc în maniera paragrafului precedent spaţiile Randers de ordinul k.

Capitolul 5 este dedicat spaţiilor Finsler de ordin superior cu (α, β)-metrici.

Am definit în acest capitol spaţiile Finsler de ordinul al doilea cu (α, β)-metrică, ocupându-ne în special de funcţia fundamentală, tensorul fundamental, problema variaţională şi energiile de ordin superior.

În primul paragraf definim spaţiul Finsler cu (α, β)-metrică, punând în evidenţă, ca exemple, spaţiul Randers de ordinul al doilea, spaţiul Kropina de ordinul al doilea, spaţiul Matsumoto de ordinul al doilea şi o nouă clasă de spaţii Finsler de ordinul al doilea, ce are $\breve{F}(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon\beta^2}$ cu $\alpha - \beta > 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

În Propoziţia 1.1 demonstrăm că Lagrangianul $L(\alpha, \beta)$ este omogen de gradul al doilea în raport cu α şi β. Au loc relaţiile (1.9), ca urmare a omogenităţii lui L.

Introducem apoi invarianţii ρ_1, ρ, ρ_0, ρ_{-1}, ρ_{-2}, r_{-1}, r_{-2} şi r_{-3} despre care arătăm că au gradele de omogenitate 2, 0, 0, -2, -4, -2, -4 şi respectiv, -6.

În cele ce urmează, caracterizăm clasele spaţiilor Randers, Kropina, Matsumoto şi a clasei noi mai sus menţionate cu ajutorul invarianţilor în teoremele 1.2, 1.3, 1.4 şi respectiv 1.5.

În paragraful următor ne ocupăm de tensorul fundamental g_{ij} al spaţiului Finsler de ordinul al doilea cu (α, β)-metrică. Acesta este 0-omogen pe fibrele lui $\widetilde{E}$ şi păstrează forma obţinută în Cap.2. Ca exemple, dăm forma tensorului fundamental pentru clasele caracterizate mai sus.

Următorul paragraf prezintă ecuaţiile Euler-Lagrange (3.4), obţinute din problema variaţională. Deasemeni, tot aici prezentăm energiile de ordin superior şi dăm legile de conservare pentru acestea.

În ultimul paragraf sunt determinate ecuaţiile Lorentz pornind de la ecuaţiile Craig-Synge $\overset{1}{E}_i(L) = 0$.

În încheiere, doresc să aduc mulţumiri:

Domnului Acad.Prof.Dr.Doc.Radu Miron pentru încrederea investită, pentru generozitatea şi răbdarea dovedită şi mai ales pentru discuţiile extrem de utile care au stat la baza ideilor din lucrare.

Domnului Prof.Dr.Mihai Anastasiei pentru sprijinul permanent acordat pe parcursul elaborării acestei lucrări.

Domnului Prof.Dr. Vasile Cruceanu pentru indicţiile utile din perioada pregătirii tezei de doctorat.

Colegului Lect.Dr.Ioan Bucataru pentru discuţiile purtate pe perioada elaborării tezei cât şi pentru sugestiile cu privire la redactarea acesteia.

Nu în ultimul rând, vreau să mulţumesc colectivului Catedrei de Geometrie a Facultăţii de Matematică precum şi membrilor Catedrei de Matematică a Universităţii "Gh.Asachi" Iaşi, unde îmi desfăşor activitatea.

CAPITOLUL 1

Spaţii Lagrange de ordin superior.

1 Fibratul k–osculator $(Osc^k M, \pi, M)$

În 1950 Ch.Ehresman [30], introduce fibratul jeturilor de ordin k, $(J_0^k M, \pi, M)$, pentru ca mai târziu acest fibrat să fie studiat pe larg de către K.Yano şi S.Ishihara [89], M. de Leon şi P.R. Rodrigues [43], D.J. Saunders [79]. Studiul acestuia a fost sugerat de vechea problemă a prelungirii unei metrici Riemanniene de pe varietatea bază M, la spatiul total al fibratului jeturilor de ordin k, $J_0^k M$.

În 1993, R.Miron [49], înlocuieşte fibratul jeturilor de ordin k cu fibratul k-osculator $(Osc^k M, \pi^k, M)$ şi obţine geometria spaţiului total pentru acest fibrat. Prezentul capitol este dedicat introducerii fibratului k–osculator studiind distribuţiile verticale, câmpurile vectoriale Liouville, k-semisprayurile, conexiunile neliniare (în special cele ce derivă dintr-un k-semispray), precum şi conexiunile liniare compatibile cu anumite structuri geometrice pe fibratul k-osculator.

Fie M o varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune n.

Două curbe în M, $\rho, \sigma : I \longrightarrow M$, $(I \subset I\!\!R)$ au un *contact de ordin* k, $k \in N^*$, în punctul $x_0 \in M$, $\rho(0) = \sigma(0) = x_0$, $(0 \in I)$ dacă pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}(U)$, $x_0 \in U$ şi orice mulţime deschisă U din M are loc

$$\frac{d^\alpha (f \circ \rho)(t)}{dt^\alpha}\Big|_{t=0} = \frac{d^\alpha (f \circ \sigma)(t)}{dt^\alpha}\Big|_{t=0}, \ (\alpha = 1, ..., k). \tag{1.1}$$

Relaţia "*a avea un contact de ordin k*" este o relaţie de echivalenţă pe multimea curbelor care trec prin x_0. O clasă de echivalenţă o vom nota $[\rho]_{x_0}$ şi o vom numi *spaţiul k-osculator* în punctul $x_0 \in M$.

Notăm cu $Osc^k x_0$ mulţimea spaţiilor k-osculatoare în x_0 şi vom considera

$$\text{Osc}^k M = \bigcup_{x_0 \in M} \text{Osc}^k x_0. \tag{1.2}$$

Mulţimea $\text{Osc}^k M$ are o structură diferenţiabilă naturală indusă de cea de pe M, cu ajutorul submersiei

$$\pi : [\rho]_{x_0} \in \text{Osc}^k M \longrightarrow x_0 \in M, \ \forall [\rho]_{x_0} \tag{1.3}$$

după cum urmează:

Dacă $U \subset M$ este un domeniu de hartă locală pe varietatea M, $x_0 \in U$ şi $\rho : I \longrightarrow M$, $\rho(0) = x_0$ o curbă reprezentată pe U prin $x^i = x^i(t)$, $t \in I$ (indicii $i, j, ... = 1, ..., n = \dim M$), spaţiul k–osculator $[\rho]_{x_0}$ va avea un reprezentant al clasei de echivalenţă dat de curba:

$$x^{*i} = x^i(0) + \frac{t}{1!}\frac{dx^i}{dt}(0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\frac{d^k x^i}{dt^k}(0), \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I$$

cu un $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Această funcţie polinomială este determinată de coeficienţii săi:

$$x_0^i = x^i(0), \ y_0^{(1)i} = \frac{1}{1!}\frac{dx^i}{dt}(0), ..., y_0^{(k)i} = \frac{1}{k!}\frac{d^k x^i}{dt^k}(0). \tag{1.4}$$

Considerând

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow R^{(k+1)n}, \ \Phi([\rho]_{x_0}) = (x_0^i, y_0^{(1)i}, ..., y_0^{(k)i})$$

rezultă că $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ este o hartă locală pe $\text{Osc}^k M$, o vom numi harta locală indusă de harta (U, ϕ) de pe M. Funcţiile coordonate induse de aceasta harta locală vor fi notate cu $(x^i, y^{(1)i}, ..., y^{(k)i})$.

În acest fel, un atlas diferenţiabil de pe varietatea M determină un atlas diferenţiabil pe $\text{Osc}^k M$ iar tripleta $(\text{Osc}^k M, \pi, M)$ reprezintă un fibrat diferenţiabil. Conform celor prezentate anterior $Osc^k M$ este o varietate diferenţiabilă de clasă C^∞, reală, de dimensiune $n(k+1)$. Vom folosi notaţiile: $E = Osc^k M$ şi $Osc^0 M \equiv M$.

Observaţia 1.1 *$Osc^1 M$ se identifică în mod canonic cu fibratul tangent TM.*

O transformare de coordonate locale induse $(x^i, y^{(1)i}, ..., y^{(k)i}) \longrightarrow (\tilde{x}^i, \tilde{y}^{(1)i}, ..., \tilde{y}^{(k)i})$ pe varietatea $\mathrm{Osc}^k M$ este dată de

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, ..., x^n), \ rank\|\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\| = n,\\ &\tilde{y}^{(1)i} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} y^{(1)j},\\ &2\tilde{y}^{(2)i} = \frac{\partial \tilde{y}^{(1)i}}{\partial x^j} y^{(1)j} + 2\frac{\partial \tilde{y}^{(1)i}}{\partial y^{(1)j}} y^{(2)j},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &ky^{(k)i} = \frac{\partial \tilde{y}^{(k-1)i}}{\partial x^j} y^{(1)j} + 2\frac{\partial \tilde{y}^{(k-1)i}}{\partial y^{(1)j}} y^{(2)j} + \dots +\\ &\qquad\qquad + k\frac{\partial \tilde{y}^{(k-1)i}}{\partial y^{(k-1)j}} y^{(k)j}, \end{aligned}$$

Se arată uşor că au loc egalităţile:

$$(1.5)' \qquad \frac{\partial \tilde{y}^{(\alpha)i}}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{y}^{(\alpha+1)i}}{\partial y^{(1)j}} = \dots = \frac{\partial \tilde{y}^{(k)i}}{\partial y^{(k-\alpha)j}}, \ (\alpha = 0, ..., k-1; y^{(0)i} = x^i)$$

Un punct $u \in \mathrm{Osc}^k M$ avînd coordonatele $(x^i, y^{(1)i}, ..., y^{(k)i})$ se va nota prin $u = (x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ sau $u = (y^{(0)}, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$, în care $x = y^{(0)}$.

Pentru a asigura existenţa globală a obiectelor geometrice de pe varietatea $\mathrm{Osc}^k M$ se demonstrează teorema, [49]:

Teorema 1.1 *Dacă varietatea diferenţiabilă M este paracompactă, atunci $\mathrm{Osc}^k M$ este de asemenea o varietate diferenţiabilă paracompactă.*

Se poate observa că $\mathrm{Osc}^k M : Man \longrightarrow Man$ este un functor covariant de la categoria varietăţilor diferenţiabile Man la ea insăşi:

$$\mathrm{Osc}^k : M \in Ob\,Man \longrightarrow \mathrm{Osc}^k M \in Ob\,Man,$$
$$\mathrm{Osc}^k : \{f : M \longrightarrow N\} \longrightarrow \{\mathrm{Osc}^k f : \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow \mathrm{Osc}^k N\}.$$

Dacă, în coordonate locale $f : x \in M \longrightarrow f(x) \in N$ se reprezintă prin

$$(1.6)\qquad x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n), \ (i', j' = 1, ..., m = \dim N)$$

atunci $\mathrm{Osc}^k f : \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow \mathrm{Osc}^k N$ este dată de

$$(1.7)\qquad \begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n)\\ y^{(1)i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} y^{(1)j}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ ky^{(k)i'} = \dfrac{\partial y^{(k-1)i'}}{\partial x^j} y^{(1)j} + 2\dfrac{\partial y^{(k-1)i'}}{\partial y^{(1)j}} y^{(2)j} + \dots +\\ \qquad\qquad + k\dfrac{\partial y^{(k-1)i'}}{\partial y^{(k-1)j}} y^{(k)j} \end{cases}$$

Relaţiile (1.7) ne dovedesc că Osc^k este un functor covariant.

2 Distribuţii verticale. Câmpuri vectoriale Liouville.

Dacă folosim notaţia $E = \mathrm{Osc}^k M$, atunci

$$\tilde{E} = \left\{ u = (x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) \in E \mid rang\|y^{(1)i}\| = 1 \right\}, \tag{2.1}$$

este o subvarietate deschisă a lui E.

Aplicaţia liniară tangentă indusă de submersia canonică $\pi : E \longrightarrow M$ va fi notată cu $d\pi : TE \longrightarrow TM$. Vom considera $V(E) = Ker\ d\pi$. Atunci $V(E)$ este *subfibratul vertical* al fibratului tangent (TE, τ_T, E). Fibrele acestui subfibrat generează distribuţia verticală $V = V_1$ pe E:

$$V_1 : u \in E \longrightarrow V_1(u) \subset T_u E. \tag{2.2}$$

O bază locală a distribuţiei V_1 este

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}} \right\}. \tag{2.3}$$

Aşadar V_1 este o distribuţie integrabilă şi $\dim V_1 = kn$.

În mod asemănător pentru proiecţia $\pi_1^k : E = \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow \mathrm{Osc}^1 M$ vom nota cu $d\pi_1^k : T(\mathrm{Osc}^k M) \longrightarrow T(\mathrm{Osc}^1 M)$ aplicaţia liniară indusă iar nucleului acestei aplicaţii, $V_2 = \ker d\pi_1^k$, determină o distribuţie

$$V_2 : u \in E \longrightarrow V_2(u) \subset T_u E. \tag{2.4}$$

O bază locală pentru V_2 este dată de

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}} \right\} \tag{2.5}$$

În consecinţă, V_2 este o subdistribuţie integrabilă a lui V_1 şi are $\dim V_2 = (k-1)n$.

Continuând procedeul obţinem distribuţiile verticale $V_1, V_2, ..., V_k$ având proprietăţile:

1. $V_1, V_2, ..., V_k$ sunt distribuţii integrabile.
2. $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_k$.

3. $\dim V_1 = kn,\ \dim V_2 = (k-1)n, ..., \dim V_k = n.$
4. O bază locală a distribuţiei V_α este $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}}, ..., \dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\right\}$ pentru $\alpha = 1, ..., k$.

Calculând Jacobianul transformării (1.5) avem:

Lema 2.1 *Regulile ce dau schimbarea bazei naturale la o transformare de coordonate* (1.5) *sunt:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{y}^{(1)j}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(1)j}} + \cdots + \frac{\partial \tilde{y}^{(k)j}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(k)j}},\\
\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} &= \frac{\partial \tilde{y}^{(1)j}}{\partial y^{(1)i}}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(1)j}} + \cdots + \frac{\partial \tilde{y}^{(k)j}}{\partial y^{(1)i}}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(k)j}},\\
&\vdots\\
\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}} &= \frac{\partial \tilde{y}^{(k)j}}{\partial y^{(k)i}}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(k)j}}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Teorema 2.1

1° *Următorii operatori:*

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{\Gamma} &= y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\\
\overset{2}{\Gamma} &= y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overset{k}{\Gamma} &= y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} + ... + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

sunt câmpuri vectoriale în algebra $\mathcal{F}(E)$, global definiţi pe E.

2° $\overset{1}{\Gamma}, ..., \overset{k}{\Gamma}$ *sunt câmpuri liniar independente pe $\tilde{E}$.*

3° $\overset{1}{\Gamma}$ *aparţine distribuţiei $V_k, ..., \overset{k}{\Gamma}$ aparţine distribuţiei V_1.*

Câmpurile vectoriale $\overset{1}{\Gamma}, ..., \overset{k}{\Gamma}$ se numesc *câmpuri vectoriale Liouville.* Acestea sunt foarte importante în geometria fibratului k–osculator $\mathrm{Osc}^k M$.

Deasemeni vom utiliza operatorul

$$
\Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}.
\tag{2.8}
$$

Avem următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.1 *La o schimbare de coordonate de tipul (1.5) operatorul* Γ *se transformă după cum urmează:*

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} + \left\{ y^{(1)i} \frac{\partial \tilde{y}^{(k)j}}{\partial x^i} + \cdots + k y^{(k)i} \frac{\partial \tilde{y}^{(k)j}}{\partial y^{(k-1)i}} \right\} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(k)j}}. \tag{2.9}$$

Dacă $f \in \mathcal{F}(E)$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)i}} = 0$, *atunci (2.9) conduce la:*

$$\Gamma f = \tilde{\Gamma} \tilde{f}. \tag{2.10}$$

3 k–Structura tangentă. k–Semisprayuri.

Se numeşte k–structură tangentă pe $E = \mathrm{Osc}^k M$ (sau endomorfism vertical) aplicaţia $\mathcal{F}(E)$–liniară $J : \mathcal{X}(E) \to \mathcal{X}(E)$ definită în baza naturală astfel:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}, J\left(\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}\right) = \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}, ..., \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}, J\left(\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Teorema 3.1 *Au loc următoarele proprietăţi:*

1° *J este global definită pe E.*

2° *J este un câmp de tensori de tip* $(1,1)$ *pe E.*

3° *J este o structură integrabilă.*

4° $Im\, J = V_1$, $Ker\, J = V_k$.

5° $rang\|J\| = kn$.

6° $J \overset{k}{\Gamma} = \overset{k-1}{\Gamma}, ..., J(\overset{2}{\Gamma}) = \overset{1}{\Gamma},\ J \overset{1}{\Gamma} = 0$.

7° $\underbrace{J \circ \cdots \circ J}_{k+1} = 0$.

Cu ajutorul k-structurii tangente J se introduce noţiunea de k-semispray:

Definiţia 3.1 Un k–semispray pe E este un câmp vectorial $S \in \mathcal{X}(E)$ cu proprietatea

$$JS = \overset{k}{\Gamma} \tag{3.2}$$

Cum nu întotdeauna putem găsi un câmp vectorial S care să satisfacă (3.2) şi să fie global definit pe E, se impune o exprimare locală a unui k-semispray.

Astfel, avem:

Teorema 3.2

1° *Un k–semispray S se scrie unic, în baza naturală, în forma*

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} S &= y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i}+\cdots+ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}- \\ &- (k+1)G^i(x,y^{(1)},...,y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}. \end{aligned}$$

2° *În raport cu o schimbare de coordonate, (1.5), coeficienţii G^i se transformă după cum urmează:*

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} (k+1)\widetilde{G}^i &= (k+1)G^j\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^j}- \\ &- \left(y^{(1)j}\frac{\partial\tilde{y}^{(k)i}}{\partial x^j}+\cdots+ky^{(k)j}\frac{\partial\tilde{y}^{(k)i}}{\partial y^{(k-1)j}}\right). \end{aligned}$$

3° *Dacă pe fiecare domeniu de hartă locală a varietăţii E avem daţi coeficienţii $G^i(x,y^{(1)},...,y^{(k)})$ care la o schimbare de coordonate locale, (1.5), satisfac (3.4), atunci câmpul vectorial S din (3.3) este un k–semispray.*

Deasemeni, avem teorema, [49]:

Teorema 3.3 *Dacă varietatea bază M este paracompactă, atunci există semisprayuri locale pe $E=\mathrm{Osc}^kM$.*

4 Omogenitate

Noţiunea de omogenitate folosită în continuare a fost introdusă de M. de Leon,[44]: Pentru fiecare $t\in I\!\!R^*_+$ şi $u=(x,y^{(1)},...,y^{(k)})\in E$ se defineşte:

$$(4.1)\qquad h_t(x,y^{(1)},...,y^{(k)})=(x,ty^{(1)},...,t^ky^{(k)}).$$

În acest mod se obţine o acţiune de clasă C^∞, $h: I\!\!R\times Osc^kM\to Osc^kM$, a grupului multiplicativ $I\!\!R^*_+$ pe Osc^kM, numit grupul omotetiilor lui Osc^kM. Pentru fiecare $u\in E$ vom nota cu c_u curba $t\mapsto h_t(u)$. Câmpul vectorial tangent la fiecare curbă c_u pentru $t=1$ este câmpul vectorial Liouville $\overset{k}{\Gamma}$.

Pentru acest câmp vectorial $(h_t)_{t\in \mathbb{R}^*_+}$ este grupul său uniparametric. Vom considera câmpurile vectoriale $\overset{\alpha}{\Gamma} = J^{k-\alpha}(\overset{k}{\Gamma})$ pentru $\alpha \in \{1, ..., k-1\}$, numite de asemenea câmpuri vectoriale Liouville. Exprimarea acestora în baza naturală este dată de: $\overset{1}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$, $\overset{2}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}, \cdots, \overset{k-1}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} + \cdots + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(3)i}} + \cdots + (k-1)y^{(k-1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$. Aceste câmpuri vectoriale sunt global definite pe E, liniar independente şi au proprietatea că $\overset{\alpha}{\Gamma} \in V_{k-\alpha+1}$.

Definiţia 4.1 *O funcţie $f \in \mathcal{F}(E)$ se numeşte pozitiv omogenă (pe scurt p-omogenă) de ordin r dacă $f \circ h_t = t^r f$.*

Are loc o teoremă care generalizează teorema lui Euler pentru funcţii omogene:

Teorema 4.1 *$f \in \mathcal{F}(E)$ este p-omogenă de ordin r dacă şi numai dacă $\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}} f = rf$, unde $\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}}$ reprezintă derivata Lie în raport cu câmpul vectorial $\overset{k}{\Gamma}$.*

Demonstraţie. Dacă f este omogenă de ordin r atunci

(4.2)
$$(\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}} f)(u) = \lim_{t\to 1} \frac{f(u) - f(h_{-t}u)}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{f(u) - (-t)^r f(u)}{t-1} = f(u) \lim_{t\to 1} \frac{1-(-t)^r}{t-1} = rf(u).$$

Am folosit că h_t este fluxul câmpului vectorial $\overset{k}{\Gamma}$.

Invers, să presupunem că f verifică $\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}} f = rf$. Se obţine că pentru orice $u = (x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) \in E$ ecuaţia diferenţială $\frac{dv}{dt} = rv$ cu condiţia iniţială $v(1) = u$ are ca soluţie pe $f \circ h_t$. Din unicitatea soluţiei acestei ecuaţii diferenţiale se obţine că $f \circ h_t = t^r f$, ceea ce înseamnă că f este omogenă de ordin r. **q.e.d.**

În coordonate locale, exprimarea faptului că o funcţie f este omogenă de ordin r este dată de:

$$y^{(1)i}\frac{\partial f}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial f}{\partial y^{(2)i}} + \cdots + ky^{(k)i}\frac{\partial f}{\partial y^{(k)i}} = rf. \tag{4.3}$$

Propoziţia 4.1 *Dacă f este o funcţie diferenţiabilă omogenă de ordin r pe E, atunci aceasta se poate exprima local astfel:*

$$f = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i_1\beta_1+\cdots+i_\alpha\beta_\alpha = r} A_{i_1\cdots i_\alpha}(x) y^{(\beta_1)i_1} \cdots y^{(\beta_\alpha)i_\alpha}, \quad \text{cu } \beta_1 < \cdots < \beta_\alpha. \tag{4.4}$$

Demonstraţie. Fie f omogenă de ordin r. Atunci $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(\alpha)i}}$ este omogenă de ordin $r-\alpha$, în cazul când $r-\alpha$ este negativ $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(\alpha)i}}=0$. Folosind (4.3) aplicată funcţiei f şi apoi succesiv funcţiilor $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(\alpha)i}}$ până acestea devin 0-omogene (adică nu depind decât de x) se obţine relaţia din enunţul propoziţiei. **q.e.d.**

Observaţie. Din acest motiv, în definiţia spaţiilor Finsler se consideră funcţia fundamentală omogenă, diferenţiabilă pe $\widetilde{E}$ (şi nu pe E).

Definiţia 4.2 *Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(E)$ se numeşte omogen de ordin r dacă*

$$X \circ h_t = t^{r-1}(h_t)_* \circ X.$$

Teorema 4.2 *$X \in \mathcal{X}(E)$ este omogen de ordin r dacă şi numai dacă*

$$\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}} X = (r-1)X. \tag{4.5}$$

Corolar 4.1 *Un câmp vectorial $X = \overset{0}{X}{}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + \overset{1}{X}{}^i \dfrac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + \overset{k}{X}{}^i \dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$ este omogen de ordin r dacă şi numai dacă funcţiile $\overset{p}{X}{}^i$ sunt omogene de ordin $r+p-1$ pentru $p \in \{0,1,...,k\}$.*

Corolar 4.2 *Fie $X \in \mathcal{X}(E)$ un câmp vectorial omogen de ordin r şi $f \in \mathcal{F}(E)$ o funcţie omogenă de ordin s. Atunci $X(f)$ este o funcţie omogenă de ordin $r+s-1$.*

Propoziţia 4.2 *Dacă X_1 şi X_2 sunt câmpuri vectoriale omogene de ordin r_1 şi respectiv r_2, atunci $[X_1, X_2]$ este un câmp vectorial omogen de ordin $r_1 + r_2 - 1$.*

Demonstraţie. Avem: $\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}}[X_1, X_2] = [\overset{k}{\Gamma}, [X_1, X_2]] = [X_1, [\overset{k}{\Gamma}, X_2]] - [X_2, [\overset{k}{\Gamma}, X_1]]$
$= [X_1, (r_2 - 1)X_2] + [(r_1 - 1)X_1, X_2] = (r_1 + r_2 - 2)[X_1, X_2]$. **q.e.d.**

Definiţia 4.3 *Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(E)$ se numeşte h-invariant dacă este invariant relativ la acţiunea omotetiilor lui $Osc^k M$.*

Deci un câmp vecorial $X \in \mathcal{X}(E)$ este h-invariant dacă:

$$X \circ h_t = (h_t)_* \circ X,$$

aceasta este echivalent cu anularea derivatei Lie în raport cu câmpul vectorial Liouville $\overset{k}{\Gamma}$: $\mathcal{L}_{\overset{k}{\Gamma}} X = 0$, echivalent cu a spune că X este un câmp vectorial 1-omogen.

5 Conexiunea neliniară.

Definiţia 5.1 *O conexiune neliniară pe E este un subfibrat vectorial NE al fibratului tangent TE astfel încât următoarea sumă Whitney are loc:*

$$TE = NE \oplus V_1E. \tag{5.1}$$

Deci o conexiune neliniară pe E determină o distribuţie $N : u \in E \mapsto N(u) \subset T_uE$, n-dimensională, suplementară distribuţiei verticale V_1E.

Vom considera $N_0 = N, N_1 = J(N_0), \ldots, N_{k-1} = J(N_{k-2})$ şi V_k.

Avem astfel $k+1$ distribuţii $(N_0, \ldots, N_{k-1}, V_k)$, n-dimensionale, astfel încât:

$$T_uE = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus \ldots \oplus N_{k-1}(u) \oplus V_k(u), \quad \forall u \in E \tag{5.2}$$

Fie $\{\frac{\delta}{\delta x^i}|_u\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază a distribuţiei orizontale N_0 astfel încât $d\pi_u(\frac{\delta}{\delta x^i}|_u) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}$. Va rezulta că pe fiecare domeniu de hartă locală din E există funcţiile $\underset{(1)}{N^i_j}$, $\underset{(2)}{N^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{N^i_j}$, funcţii coordonate ale câmpurilor vectoriale locale $\frac{\delta}{\delta x^i}$ în baza naturală, deci

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \underset{(1)}{N^j_i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)j}} - \ldots - \underset{(k)}{N^j_i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)j}}$$

Funcţiile $\underset{(1)}{N^j_i}, \ldots, \underset{(k)}{N^j_i}$ se numesc *coeficienţii conexiunii neliniare* N, sunt definite pe fiecare domeniu de hartă locală şi în urma unei schimbări de coordonate verifică:

$$\begin{cases} \underset{(1)}{\widetilde{N}^i_m}\dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m}\underset{(1)}{N^m_j} - \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)i}}{\partial x^j}, \\ \underset{(2)}{\widetilde{N}^i_m}\dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m}\underset{(2)}{N^m_j} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)i}}{\partial x^m}\underset{(1)}{N^m_j} - \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(2)i}}{\partial x^j}, \ldots, \\ \underset{(k)}{\widetilde{N}^i_m}\dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m}\underset{(k)}{N^m_j} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)i}}{\partial x^m}\underset{(k-1)}{N^m_j} + \cdots + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(k-1)i}}{\partial x^m}\underset{(1)}{N^m_j} - \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(k)i}}{\partial x^j}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Notând:

$$\begin{gathered} \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - \underset{(1)}{N^j_i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}} - \ldots - \underset{(k-1)}{N^j_i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)j}}, \ldots, \\ \frac{\delta}{\delta y^{(k-1)i}} = \frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}} - \underset{(1)}{N^j_i}\frac{\partial}{\partial y^{(k)j}}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

se obţine că $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\}$ constituie o bază adaptată descompunerii directe

$$T_u E = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus \ldots \oplus N_{k-1}(u) \oplus V_k(u), \quad \forall u \in E.$$

Baza duală a bazei adaptate conexiunii neliniare este:

$$\{dx^i, \delta y^{(1)i}, \ldots, \delta y^{(k)i}\} \text{ unde :}$$

$$(5.5) \qquad \begin{cases} \delta y^{(1)i} = dy^{(1)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dx^j, \\ \delta y^{(2)i} = dy^{(2)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dy^{(1)j} + \underset{(2)}{M^i_j}\, dx^j, \\ \ldots \\ \delta y^{(k)i} = dy^{(k)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dy^{(k-1)j} + \ldots + \underset{(k)}{M^i_j}\, dx^j. \end{cases}$$

Funcţiile $\underset{(\alpha)}{M^i_j}$, $(\alpha = 1, .., k)$, se numesc coeficienţii duali ai conexiunii neliniare N.

Între coeficienţii $\underset{(1)}{N^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{N^i_j}$ şi coeficienţii duali $\underset{(1)}{M^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{M^i_j}$ au loc următorele relaţii:

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M^i_j} = \underset{(1)}{N^i_j}, \\ \underset{(2)}{M^i_j} = \underset{(2)}{N^i_j} + \underset{(1)}{N^i_m} \underset{(1)}{M^m_j}, \cdots, \\ \underset{(k)}{M^i_j} = \underset{(k)}{N^i_j} + \underset{(k-1)}{N^i_m} \underset{(1)}{M^m_j} + \ldots + \underset{(1)}{N^i_m} \underset{(k-1)}{M^m_j}. \end{cases}$$

O conexiune neliniară N este complet determinată de un sistem de funcţii $\underset{(1)}{M^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{M^i_j}$, definit pe fiecare domeniu de hartă locală şi care la o schimbare de coordonate pe E verifică:

$$(5.7) \qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M^m_j} \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} \underset{(1)}{\widetilde{M}^i_m} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)i}}{\partial x^j}, \\ \underset{(2)}{M^m_j} \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} \underset{(2)}{\widetilde{M}^i_m} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)m}}{\partial x^j} \underset{(1)}{\widetilde{M}^i_m} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(2)i}}{\partial x^j}, \cdots, \\ \underset{(k)}{M^m_j} \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^m} = \dfrac{\partial \widetilde{x}^m}{\partial x^j} \underset{(k)}{\widetilde{M}^i_m} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(1)m}}{\partial x^j} \underset{(k-1)}{\widetilde{M}^i_m} + \ldots + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(k-1)m}}{\partial x^j} \underset{(1)}{\widetilde{M}^i_m} + \dfrac{\partial \widetilde{y}^{(k)i}}{\partial x^j}. \end{cases}$$

6 Prelungiri ale structurilor Riemanniene, Finsleriene şi Lagrangiene la fibratul $Osc^k M$.

O problemă veche în geometria diferenţială este cea a prelungirii unei structuri Riemanniene g de pe o varietate reală n-dimensională M la fibratul jeturilor de ordin superior. Problema a fost rezolvată pentru $k = 1$ de A.Morimoto în [60] şi parţial pentru cazul $k = 2$ de K.Yano şi S.Ishihara în [89]. În lucrarea [49], R.Miron rezolvă această problemă în cazul general. În acest sens plecând de la o structură Riemanniană g, R.Miron determină o conexiune neliniară N, care depinde numai de g. N-liftul Sasaki al metricii g, ne dă o structură Riemanniană G pe E care depinde numai de metrica Riemann considerată. Existenţa spaţiului $Prol^k R^n = (Osc^k M, G)$, rezolvă problema mai sus menţionată. Problema prelungirii structurilor Riemanniene a mai fost studiată de E. Bompiani, Ch. Ehresman, S. Kobayashi. Problema prelungirii structurilor Finsleriene sau Lagrangiene de la TM la fibratul k–osculator $\mathrm{Osc}^k M$ a apărut prima dată în lucrarea [49].

<u>*Prelungirea structurilor Riemanniene la* $\mathrm{Osc}^k M$.</u>

Fie $\mathcal{R}^n = (M, g)$ un spaţiu Riemannian în care g este o metrică Riemann definită pe M, având coordonatele locale $g_{ij}(x)$, $x \in U \subset M$. Se extinde g_{ij} la $\pi^{-1}(U) \subset \mathrm{Osc}^k M$, luând

$$(g_{ij} \circ \pi)(u) = g_{ij}(x), \quad \forall u \in \pi^{-1}(U), \ \pi(u) = x.$$

În acest caz $g_{ij} \circ \pi$ ne dă un d-câmp de tensori pe $Osc^k M$ pe care îl vom nota tot cu g_{ij}. Deasemeni vom nota cu $\gamma^i_{jm}(x)$ simbolii Christoffel ai lui g.

Problema prelungirii spaţiului Riemannian $\mathcal{R}^n = (M, g)$ se rezolvă găsind un lift $G(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ (de tip Sasaki) al structurii $g(x)$, aşa încât G să fie o structură Riemanniană pe $\mathrm{Osc}^k M$ iar G să depindă numai de g.

Mai întâi, se determină o conexiune neliniară canonică pe $\widetilde{\mathrm{Osc}}^k M$ depinzând numai de g, [49]:

Teorema 6.1 *Există conexiuni neliniare N pe $\widetilde{Osc^k M}$ determinate numai de structura Riemanniană $g(x)$. Una dintre ele este dată de următorii coeficienţi duali:*

$$
\begin{aligned}
&\underset{(1)}{M}{}^i{}_j = \gamma^i{}_{jm}(x)y^{(1)m}, \\
&\underset{(2)}{M}{}^i{}_j = \frac{1}{2}\left(\Gamma \underset{(1)}{M}{}^i{}_j + \underset{(1)}{M}{}^i{}_m \underset{(1)}{M}{}^m{}_j\right), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\underset{(k)}{M}{}^i{}_j = \frac{1}{k}\left(\Gamma \underset{(k-1)}{M}{}^i{}_j + \underset{(1)}{M}{}^i{}_m \underset{(k-1)}{M}{}^m{}_j\right),
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

unde Γ *este operatorul (2.8):*

$$
\Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}.
$$

Utilizând coeficienţii conexiunii neliniare canonice N se poate scrie baza adaptată $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \dots, \frac{\delta}{\delta y^{(k)}}\right)$.

Se obţine atunci prelungirea de ordin k a spaţiului Riemann $\mathcal{R}^n = (M, g)$:

Teorema 6.2 *Perechea* $\mathrm{Prol}^k\mathcal{R}^n = \left(\widetilde{\mathrm{Osc}^k M}, G\right)$, *unde*

$$
G = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x)\delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + \dots + g_{ij}(x)\delta y^{(k)i} \otimes \delta y^{(k)j},
\tag{6.2}
$$

este un spaţiu Riemann $(k+1)n$-dimensional pe $\widetilde{E}$, a cărui structură metrică G depinde numai de structura $g(x)$ a spaţiului Riemann $\mathcal{R}^n = (M, g)$.

Prelungirea structurilor Finsleriene la fibratul k–osculator.

Prelungirea structurilor Finsleriene la $\widetilde{E}$ poate fi realizată într-un mod asemănător.

Fie $F(x, y^{(1)})$ funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler $F^n = (M, F)$ şi tensorul său fundamental $g_{ij}(x, y^{(1)})$:

$$
g_{ij}(x, y^{(1)}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^{(1)i}\partial y^{(1)j}}.
\tag{6.3}
$$

Presupunem că $g_{ij}(x, y^{(1)})$ este pozitiv definit.

Determinarea unei structuri Riemanniene G pe $\widetilde{E} = \widetilde{\mathrm{Osc}^k M}$ care să depindă numai de tensorul fundamental $g_{ij}(x, y^{(1)})$ a spaţiului Finsler F^n se poate face ca în cazul prelungirilor Riemanniene.

Se prelungeşte mai întâi d-câmpul tensorial g_{ij} la $\widetilde{E}$, punând

(6.4) $$(g_{ij} \circ \pi_1^k)(u) = g_{ij}(x, y^{(1)}),\ \forall u \in \widetilde{\mathrm{Osc}^k M},\ \pi_1^k(u) = (x, y^{(1)})$$

şi identificând $g_{ij} \circ \pi_1^k$ cu g_{ij}. Vom nota cu $\gamma^i{}_{jm}(x, y^{(1)})$ simbolii Christoffel ai d-tensorului $g_{ij}(x, y^{(1)})$, adică:

$$\gamma^i_{jm}(x, y^{(1)}) = \frac{1}{2} g^{is} \{ \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^s} \}.$$

2-semisprayul canonic al lui F^n este dat de

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

în care

(6.5) $$G^i = \frac{1}{2} \gamma^i{}_{jm} y^{(1)j} y^{(1)m}.$$

Conexiunea neliniară Cartan pe $\widetilde{TM}$ are coeficienţii:

(6.6) $$G^i{}_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(1)j}}.$$

Se demostrează următorul rezultat, [49]:

Teorema 6.3 *Există o conexiune neliniară pe $\widetilde{E}$ determinată numai de tensorul fundamental $g_{ij}(x, y^{(1)})$ al spaţiului Finsler $F^n = (M, F)$ care are următorii coeficienţi duali:*

(6.7) $$\begin{aligned} &\underset{(1)}{M}{}^i{}_j = G^i{}_j \\ &\underset{(2)}{M}{}^i{}_j = \frac{1}{2} \left(\Gamma G^i{}_j + G^i{}_m \underset{(1)}{M}{}^m{}_j \right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ &\underset{(k)}{M}{}^i{}_j = \frac{1}{k} \left(\Gamma \underset{(k-1)}{M}{}^i{}_j + G^i{}_m \underset{(k-1)}{M}{}^m{}_j \right). \end{aligned}$$

Fie $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, ..., \frac{\delta}{\delta y^{(k)i}} \right)$ şi $(dx^i, \delta y^{(1)i}, ..., \delta y^{(k)i})$ baza adaptată şi baza duală adaptată.

Teorema 6.4 *Perechea* $\mathrm{Prol}^k F^n = (\widetilde{\mathrm{Osc}^k M}, G)$, $k \geq 2$, *în care*

(6.8) $$\begin{aligned} G = g_{ij}(x, y^{(1)}) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y^{(1)}) \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + \dots + \\ + g_{ij}(x, y^{(1)}) \delta y^{(k)i} \otimes \delta y^{(k)j} \end{aligned}$$

este un spaţiu Riemann $(k+1)n$-dimensional a cărui structură metrică G depinde numai de tensorul fundamental $g_{ij}(x, y^{(1)})$ al spaţiului Finsler $F^n = (M, F)$.

Acest spaţiu Riemann se va numi prelungirea de ordin k a spaţiului Finsler F^n.

Prelungirea structurilor Lagrangiene la $\widetilde{E}$.

Să considerăm spaţiul Lagrange $L^n = (M, L(x, y^{(1)}))$ şi tensorul său fundamental

$$g_{ij}(x, y^{(1)}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(1)i}\partial y^{(1)j}}, \tag{6.9}$$

presupus pozitiv definit.

Fie $\overset{\circ}{N}$ conexiunea neliniară canonică a lui L^n având coeficienţii

$$\overset{\circ}{N}{}^i{}_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(1)j}},\ G^i = \frac{1}{4}g^{is}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^s \partial x^m}y^{(1)m} - \frac{\partial L}{\partial x^s}\right). \tag{6.10}$$

$\overset{\circ}{N}$–conexiunea canonică a spaţiului L^n are coeficienţii

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{L}{}^i{}_{jm} &= \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\overset{\circ}{\delta}\, g_{sj}}{\delta x^m} + \frac{\overset{\circ}{\delta}\, g_{ms}}{\delta x^j} - \frac{\overset{\circ}{\delta}\, g_{jm}}{\delta x^s}\right) \\ \overset{\circ}{C}{}^i{}_{jm} &= \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial y^{(1)m}} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial y^{(1)j}} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial y^{(1)s}}\right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Tensorul fundamental $g_{ij}(x, y^{(1)})$ se extinde la $\widetilde{\mathrm{Osc}^k M}$ prin

$$(g_{ij} \circ \pi_1^k)(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) = g_{ij}(x, y^{(1)}). \tag{6.12}$$

Se arată că:

Teorema 6.5 *Există o conexiune neliniară N pe $\widetilde{Osc^k M}$ determinată numai de Lagrangianul $L(x, y^{(1)})$ al spaţiului Lagrange $L^n = (M, L)$ care are coeficienţii duali daţi de*

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{M}{}^i{}_j &= \overset{\circ}{N}{}^i{}_j \\ \underset{(2)}{M}{}^i{}_j &= \frac{1}{2}\left(\Gamma G^i{}_j + G^i{}_m \underset{(1)}{M}{}^m{}_j\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \underset{(k)}{M}{}^i{}_j &= \frac{1}{k}\left(\Gamma \underset{(k-1)}{M}{}^i{}_j + G^i{}_m \underset{(k-1)}{M}{}^m{}_j\right). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Folosind baza adaptată construită cu conexiunea neliniară de mai sus, să considerăm N-liftul Sasaki G al tensorului fundamental (6.9):

Teorema 6.6 *Perechea* $\mathrm{Prol}^k L^n = (\widetilde{\mathrm{Osc}^k M}, G)$, *unde* G *este N-liftul Sasaki al tensorului fundamental* $g_{ij}(x, y^{(1)})$ *al spaţiului Lagrange* $L^n = (M, L(x, y^{(1)})$,

$$G = g_{ij}(x, y^{(1)})dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y^{(1)})\delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + \cdots + \\ + g_{ij}(x, y^{(1)})\delta y^{(k)i} \otimes \delta y^{(k)j}$$

este un spaţiu Riemann de dimensiune $(k+1)m$, *a cărui structură metrică* G *depinde numai de Lagrangianul* $L(x, y^{(1)})$.

7 Spaţii Lagrange de ordin superior.

Definiţia 7.1 *Un spaţiu Lagrange de ordin* k *este o pereche* $L^{(k)n} = (M, L)$, *unde*

1° M *este o varietate reală* n*-dimensională.*

2° $L : \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow I\!R$ *este un Lagrangian diferenţiabil pe* $\widetilde{E}$.

3° *d-câmpul tensorial*

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(k)i}\partial y^{(k)j}} \tag{7.1}$$

satisface:

a. rang $\|g_{ij}\| = n$ *pe* $\widetilde{E} = \widetilde{\mathrm{Osc}^k M}$

b. *Forma pătratică:*

$$\psi = g_{ij}\xi^i\xi^j$$

are signatură constantă pe $\widetilde{E}$.

În continuare vom spune că L este *funcţia fundamentală* şi g_{ij} este *câmpul tensorial fundamental* al spaţiului $L^{(k)n}$.

Teorema următoare ne asigură existenţa spaţiilor Lagrange de ordin superior, [49].

Teorema 7.1 *Dacă varietatea bază* M *este paracompactă atunci există spaţii Lagrange de ordin* k, $L^{(k)n} = (M, L)$, *pentru care tensorul fundamental* g_{ij} *este pozitiv definit.*

Demonstraţie. M fiind o varietate paracompactă, atunci există o structură Riemanniană γ_{ij} pe M. Vom nota cu D conexiunea Levi-Civita a varietăţii Riemann

(M, γ). Într-o hartă locală, $(U, \phi = (x^i))$, pe M, vom nota cu $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{kj}$ coeficienţii locali ai conexiunii liniare D. Se poate demonstra că:

$$
\begin{aligned}
z^{(1)m} &= y^{(1)m}, \\
z^{(2)m} &= \frac{1}{2}[\Gamma z^{(1)m} + \gamma^m_{ij} z^{(1)i} z^{(1)j}], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
z^{(k)m} &= \frac{1}{k}[\Gamma z^{(k-1)m} + \gamma^m_{ij} z^{(1)j} z^{(k-1)i}]
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

unde Γ este operatorul dat de (2.8), sunt d-câmpuri vectoriale numite d-câmpurile vectoriale Liouville.

Funcţia $L = \gamma_{ij} z^{(k)i} z^{(k)j}$ are proprietăţile:

1) L este global definit pe $\widetilde{Osc^k M}$;

2) L este un Lagrangian regulat;

3) L depinde numai de metrica γ_{ij};

4) Tensorul fundamental al lui L este dat de

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} = \gamma_{ij}(x). \tag{7.3}
$$

Perechea (M,L) cu L definit mai sus este un spaţiu Lagrange de ordin k.

Teorema 7.2 *Există k-semisprayuri S pe $\tilde{E}$, determinate numai de Lagrangianul spaţiului $L^{(k)n}$. Unul dintre acestea este dat de*

$$
S = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \dots + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}} - (k+1)G^i\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}} \tag{7.4}
$$

unde coficienţii G^i au exprimarea:

$$
(k+1)G^i = \frac{1}{2}\{\Gamma\frac{\partial L}{\partial y^{(k)j}} - \frac{\partial L}{\partial y^{(k-1)j}}\} \tag{7.5}
$$

şi unde Γ este operatorul (neliniar) (2.8):

$$
\Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \dots + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}.
$$

Ţinând cont de teorema precedentă se determină două conexiuni neliniare canonice N, depinzând numai de Lagrangianul L.

Una dintre acestea este determinată de R.Miron în [49]:

Teorema 7.3 *Dacă S este un k-semispray, având coeficienţii G^i din (7.5), atunci următoarea mulţime de funcţii ne dă coeficienţii duali ai conexiunii neliniare N, care depind numai de funcţia fundamentală L a spaţiului $L^{(k)n}$:*

$$(7.6)\qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M}{}^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^{(k)j}}, \\ \underset{(2)}{M}{}^i_j = \dfrac{1}{2}(S\ \underset{(1)}{M}{}^i_j + \underset{(1)}{M}{}^i_m \underset{(1)}{M}{}^m_j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{(k)}{M}{}^i_j = \dfrac{1}{k}(S\ \underset{(k-1)}{M}{}^i_j + \underset{(1)}{M}{}^i_m \underset{(k-1)}{M}{}^m_j \end{cases}$$

În baza adaptată câmpul vectorial Liouville $\overset{k}{\Gamma}$ este reprezentat unic în forma:

$$(7.7)\qquad \overset{k}{\Gamma} = z^{(1)i}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \dots + kz^{(k)i}\frac{\delta}{\delta y^{(k)i}}$$

unde coeficienţi sunt următoarele d-câmpuri vectoriale Liouville:

$$(7.8)\qquad \begin{cases} z^{(1)i} = y^{(1)i}, \\ 2z^{(2)i} = 2y^{(2)i} + \underset{(1)}{M}{}^i_j\, y^{(1)j}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ kz^{(k)i} = ky^{(k)i} + (k-1)\ \underset{(1)}{M}{}^i_j\, y^{(k-1)j} + \dots + \underset{(k-1)}{M}{}^i_j\ y^{(1)j} \end{cases}$$

Cea de-a doua conexiune neliniară este descoperită de I.Bucataru în [18]:
Se demonstrează astfel următoarea teoremă:

Teorema 7.4 *Fie $S = \Gamma - (k+1)G^i\dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$ un k-semispray pe E. Sistemul de funcţii $(\underset{(\alpha)}{M}{}^i_j)_{\alpha=\overline{1,k}}$ definite pe fiecare domeniu de hartă locală prin:*

$$(7.9)\qquad \underset{(1)}{M}{}^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(k)j}},\ \underset{(2)}{M}{}^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(k-1)j}}, \dots, \underset{(k)}{M}{}^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(1)j}},$$

sunt coeficienţii duali ai unei conexiuni neliniare N pe fibratul k-osculator.

Aceste teoreme asigură existenţa unei conexiuni neliniare N cu coeficienţii duali $\underset{(1)}{M}{}^i{}_j, \dots, \underset{(k)}{M}{}^i{}_j$, care sunt determinaţi numai de funcţia fundamentală L a spaţiului Lagrange $L^{(k)n}$. O vom numi *conexiunea neliniară canonică.*

Fie N, conexiunea neliniară canonică a spaţiului Lagrange de ordin k, $L^{(k)n} = (M, L)$.

Teorema 7.5 *Au loc următoarele proprietăţi:*

1° *Există o singură N-conexiune liniară D pe* $\widetilde{E}$ *ce verifică axiomele:*

$$g_{ij|h} = 0, \ g_{ij} \overset{(\alpha)}{|}_h = 0, \ (\alpha = 1, ..., k)$$
$$\underset{(0)}{T}{}^i{}_{jh} = L^i{}_{jh} - L^i{}_{hj} = 0,$$
$$\underset{(\alpha)}{S}{}^i{}_{jh} = \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{jh} - \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hj} = 0, \ (\alpha = 1, ..., k).$$

2° *Coeficienţii* $C\Gamma(N) = (L^i{}_{jh}, \underset{(1)}{C}{}^i{}_{jh}, ..., \underset{(k)}{C}{}^i{}_{jh})$ *ai acestei conexiuni sunt daţi de simbolii lui Christoffel generalizaţi:*

$$L^m{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{ms} \left(\frac{\delta g_{is}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{sj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^s} \right),$$
$$\underset{(\alpha)}{C}{}^m{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{ms} \left(\frac{\delta g_{is}}{\delta y^{(\alpha)j}} + \frac{\delta g_{sj}}{\delta y^{(\alpha)i}} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta y^{(\alpha)s}} \right)$$
$$(\alpha = 1, ..., k).$$

3° *Această conexiune depinde numai de funcţia fundamentală* $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ *a spaţiului* $L^{(k)n}$.

Conxiunea D din teorema precedentă este *N-conexiunea metrică şi canonică* a spaţiului $L^{(k)n}$. Mulţimea coeficienţilor săi a fost notată cu $C\Gamma(N)$.

8 Spaţii Finsler de ordin superior.

Au fost necesari peste 70 de ani de încercări datorate lui A.Kawaguchi, J.L.Synge, H.V.Craig, K.Kendo şi mulţi alţii pentru a se obţine o definiţie corectă a noţiunii de spaţiu Finsler de ordinul $k > 1$. Dificultăţile constau în definirea corectă a omogenităţii Lagrangienilor de forma $L(x, y^{(1)}, .., y^{(k)})$. Abia în 1996, R.Miron a considerat spaţiile Lagrange $L^{(k)n} = (M, L)$ pentru care omogenitatea funcţiei L este definită prin

$$L(x, ty^{(1)}, t^2 y^{(2)}, .., t^k y^{(k)}) = t^r L(x, y^{(1)}, y^{(2)}, .., y^{(k)}), \quad r \in Z.$$

Cartea "The geometry of higher order Finsler spaces", Hadronic Press, 1998 - prefaţată de R.M.Santilli,[50] introduce clar şi riguros spaţiile menţionate. Vom prezenta succint câteva rezultate din teoria spaţiilor Finsler de ordinul $k \geq 1$, în ideea de a le aplica la ceea ce vom numi it spaţii Finsler de ordin $k \geq 1$ cu (α, β)-metrică.

Ne vom ocupa mai întâi de noţiunea de omogenitate. Grupul omotetiilor $H = \{h_t \mid t \in R^+\}$, $h_t(a) = ta$, $\forall a \in R$, acţionează ca un grup Lie de transformări pe varietatea $\tilde{E} = Osc^k M \setminus \{0\}$ după cum urmează:

$$h_t(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}) = (x, ty^{(1)}, ..., t^k y^{(k)}), \quad \forall t \in R^+. \tag{8.1}$$

Această acţiune păstrează fibrele lui E şi nu depinde de schimbările de coordonate (1.5).

Considerând curba $\bar{u} = h_t(u)$, $\forall t \in R^+$, atunci în punctul $(t = 1)$, $u = h_1(u)$, vectorul tangent la această curbă este câmpul vectorial Liouville $\overset{k}{\Gamma}$ în punctul $u \in \tilde{E}$.

Se introduce apoi definiţia:

Definiţia 8.1 *O funcţie $f : E \to R$ este r-omogenă, $(r \in Z)$, pe fibrele lui E dacă:*

$$f \circ h_t = t^r f, \quad \forall t \in R^+. \tag{8.2}$$

Teorema 8.1 *O funcţie $f : Osc^k M \to R$ este r-omogenă pe fibrele lui E dacă şi numai dacă avem:*

$$\pounds_{\overset{k}{\Gamma}} f = rf$$

unde $\pounds$ este operatorul Lie de derivare.

Această noţiune se poate extinde la câmpurile de vectori $X \in \chi(E)$ şi de q-forme pe E. Urmează că un câmp de vectori $X \in \chi(E)$ este r-omogen pe fibrele lui E dacă şi numai dacă $\pounds_{\overset{k}{\Gamma}} X = (r - 1)X$. Dacă X este dat în forma

$$X = X^{(0)i} \frac{\partial}{\partial x^i} + ... + X^{(k)i} \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$$

atunci el este r-omogen pe fibrele lui E dacă şi numai dacă funcţiile $X^{(0)i}, .., X^{(k)i}$ sunt $r - 1, .., r - 1 + k$ omogene, respectiv. Dacă X este r-omogen şi $f : E \to R$ este s-omogenă atunci:

1° fX este $(r + s)$ -omogen,

2° Xf este $(r + s - 1)$ -omogen.

De exemplu $\overset{k}{\Gamma}$ este 1-omogen pe fibrele lui E. Un k-semispray S este 2-omogen dacă şi numai dacă G^i, coeficienţii săi, sunt $(k + 1)$-omogeni pe fibrele lui E.

Poate fi introdusă atunci noţiunea de spacţiu Finsler de ordin superior ,[50].

Definiţia 8.2 *Un spaţiu Finsler de ordin $k \geq 1$ este o pereche $F^{(k)n} = (M, F)$ determinată de o varietate reală, C^∞-diferenţiabilă M de dimensiune n şi o funcţie $F : Osc^k M \to R$ având proprietăţile:*

1. F este de clasă C^∞ pe $\tilde{E}$ şi continuă pe secţiunea nulă;

2. F este pozitivă;

3. F este k-omogenă pe fibrele lui E;

4. Hessiana având elementele:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} \tag{8.3}$$

este pozitiv definită pe $\tilde{E}$.

Bineînţeles, g_{ij} de mai sus este un d-câmp tensorial, numit d-câmpul tensorial fundamental al spaţiului $F^{(k)n}$ iar F se numeşte funcţia fundamentală a spaţiului $F^{(k)n}$.

Câteva proprietăţi imediate

1. F^2 este $2k$-omogen;
2. $\dfrac{\partial F^2}{\partial y^{(k)i}}$ este un câmp de covectori k-omogen;
3. g_{ij} este 0-omogen.

În consecinţă, avem:

$$\pounds_{\overset{k}{\Gamma}} F^2 = 2kF^2, \ \pounds_{\overset{k}{\Gamma}} \frac{\partial F^2}{\partial y^{(k)i}} = k \frac{\partial F^2}{\partial y^{(k)i}}, \ \pounds_{\overset{k}{\Gamma}} g_{ij} = 0. \tag{8.4}$$

Evident, pentru $k = 1$, $F^{(1)n} = (M, F)$ este spaţiul Finsler clasic.

CAPITOLUL 2

Problema variaţională pentru Lagrangieni de ordin superior

Problema variaţională în mecanica analitică de ordin superior a fost abordată de numeroşi geometri: R.Miron [9], [49], [55], H.V.Craig [24], J.L.Synge [84], M.R.Santilli [76], [77], M.de Léon [43], [44], M.Crampin [25], K.Kondo [42], şi alţii. În acest capitol este descrisă problema variaţională pentru spaţii Lagrange $L^{(k)n}$, sunt exprimate ecuaţiile Euler–Lagrange, energiile de ordin superior şi apoi sunt determinate legile de conservare ale energiei.

În prima parte a capitolului vom prezenta problema variaţională pentru metrici Riemanniene, după care problema variaţională va fi prezentată pentru Lagrangieni diferenţiabili de ordin 1, 2 şi k. Deoarece în cazul $k = 2$ rezultatele sunt mai clare şi mai uşor de demonstrat am prezentat acest caz mai pe larg, iar pentru $k > 2$ am enunţat rezultatele mai importante. Vom specifica particularizările în cazul spaţiilor Finsler de ordin $k \geq 1$.

Apare aici pentru prima oară calculul variaţional pentru spaţii Finsler de ordinul 1 cu (α, β)-metrică, în care contribuţia autorului cade pe euaţiile Lorentz a acestora.

1 Problema variaţională aplicată metricilor Riemanniene.

Considerăm $\mathcal{R}^n = (M, g)$ o varietate Riemann, diferenţiabilă de clasă C^∞ şi de dimensiune n. Fie $c : t \in [0,1] \to (x^i(t)) \in U \subset M$ o curbă având imaginea într-un domeniu de hartă U din M, $x_0 = c(0)$ şi $x_1 = c(1)$. Definim lungimea curbei

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt})}dt.$$

Local, aceasta se scrie

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(c(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt.$$

Vom considera în continuare familia de curbe $c_\varepsilon : t \mapsto \bar{x}^i(t)$ unde $\bar{x}^i(t) = x^i(t) + \varepsilon V^i(t)$ şi ε suficient de mic în valoare absolută astfel încât $Imc_\varepsilon \subset U$, U fiind un domeniu de hartă. Vom cere ca aceste curbe să aibă aceleaşi extremităţi x_0 şi x_1 ca şi curba c, aşa încât câmpul vectorial $V^i(t)$ are proprietatea $V^i(0) = V^i(1) = 0$.

Se pune problema să găsim o condiţie necesară pentru ca o curbă c pe M, care uneşte punctele x_0 şi x_1, să realizeze extremul lungimilor curbelor c_ε.

Lungimea curbelor c_ε este dată de:

$$\mathcal{L}(c_\varepsilon) = \int_0^1 L(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))dt$$

unde $L(x(t), \dot{x}(t)) = \sqrt{< \dot{x}(t), \dot{x}(t) >_g}$. Avem deci:

(1.1)
$$\mathcal{L}(c_\varepsilon) = \int_0^1 L(x^i(t) + \varepsilon V^i(t), \dot{x}^i(t) + \varepsilon \dot{V}^i(t))dt.$$

Conform teoremei lui Fermat, pentru ca să se realizeze extremul funcţionalei $\mathcal{L}(c)$ este necesar să avem:

(1.2)
$$\left.\frac{d\mathcal{L}(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Vom obţine :

$$\int_0^1 (\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}V^i + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\dot{V}^i)dt = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x^i}V^i dt + \int_0^1 [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}V^i) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i})V^i]dt = 0$$

Ţinând cont de cerinţele asupra familiei de curbe c_ε ajungem la

$$\int_0^1 (\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}))V^i dt = 0.$$

Dar $V^i(t)$ este arbitrar, ceea ce ne conduce la:

Teorema 1.1 *Condiţia necesară pentru ca funcţionala $\mathcal{L}(c)$ să realizeze extremul pentru $\mathcal{L}(c_\varepsilon)$ este ca c să fie soluţie pentru ecuaţia:*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0 \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{1.3}$$

Ecuaţiile (1.3) se numesc ecuaţiile Euler–Lagrange. Soluţiile acestor ecuaţii se vor numi <u>curbe extremale</u> sau <u>geodezice</u> ale spaţiului $\mathcal{R}^n$.

Dacă vom folosi parametrizarea canonică vom avea:

$$L(x^i(s), \dot{x}^i(s)) = 1 \Longrightarrow \frac{dL}{ds} = 0$$

şi ecuaţia (1.3) este echivalentă cu

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds}$$

Dar ultima ecuaţie ne dă:

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial x^k}\frac{dx^k}{ds} - \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\frac{d^2 x^j}{ds^2} = 0.$$

Cum $L^2 = g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$ avem

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q \qquad \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{iq}(x)\dot{x}^q$$

$$\frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial x^k} = 2\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^k}\dot{x}^q \qquad \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = 2g_{ij}.$$

Înlocuind, obţinem:

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^i}\dot{x}^p\dot{x}^q - 2\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^k}\dot{x}^q\dot{x}^k - 2g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2} = 0$$

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^k\dot{x}^q = 0.$$

Înmulţim cu g^{pi} şi avem:

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{pi}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^k\dot{x}^q = 0$$

adică

Teorema 1.2 *În parametrizarea canonică ecuaţiile Euler–Lagrange se scriu sub forma echivalentă:*

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} + \gamma^p_{kq}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0. \tag{1.4}$$

unde $\gamma^p_{kq}(x(s))$ sunt simbolii lui Christoffel de speţa a doua.

Observaţie. Cu alte cuvinte: geodezicele spaţiului Riemann $\mathcal{R}^n = (M, g)$, în parametrizarea canonică sunt date de ecuaţiile (1.4).

2 Calculul variaţional pentru Lagrangieni de ordinul 1.

Fie $L : TM \to R$ un Lagrangian diferenţiabil de ordinul 1 pe varietatea M, care nu este obligatoriu regulat.

O curbă $c : t \in [0,1] \to (x^i(t)) \in U \subset M$ (într-o parametrizare fixată) având imaginea într-un domeniu de hartă U pe M, are extensia la TM dată de $c^* : t \in [0,1] \to (x^i(t), \frac{dx^i}{dt}(t)) \in \pi^{-1}(U)$. Întrucât câmpul vectorilor tangenţi $\frac{dx^i}{dt}(t)$, $t \in [0,1]$ nu se anulează, imaginea lui c^* aparţine lui $\widetilde{T}M$.

Integrala acţiunii Lagrangianului L pe curba c este dată de funcţionala

$$I(c) = \int_0^1 L(x, \frac{dx}{dt})dt.$$

Considerăm curbele $c_\varepsilon : t \in [0,1] \to (x^i(t)+\varepsilon V^i(t)) \in M$, care au aceleaşi extremităţi $x^i(0), x^i(1)$ ca şi curba c, $V^i(t) = V^i(x(t))$ fiind un câmp vectorial regulat pe curba c, cu proprietatea $V^i(0) = V^i(1) = 0$ şi ε un număr real, suficient de mic în valoare absolută, aşa încât $Im\ c_\varepsilon \subset U$.

Extensia curbei c_ε la TM este dată de:

$$c_\varepsilon^* : t \in [0,1] \to \left(x^i(t) + \varepsilon V^i(t), \frac{dx^i}{dt} + \varepsilon \frac{dV^i}{dt}\right) \in \pi^{-1}(U).$$

Integrala acţiunii Lagrangianului L în lungul curbei c_ε are forma:

$$I(c_\varepsilon) = \int_0^1 L\left(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) dt. \tag{2.1}$$

Condiţia necesară pentru ca $I(c)$ să fie o valoare extremală a lui $I(c_\varepsilon)$ este

$$\left.\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{2.2}$$

Operatorul $\frac{d}{d\varepsilon}$ permută cu operatorul de integrare şi din formula (2.1). Se obţine:

$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} L\left(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) dt. \tag{2.3}$$

Efectuând calculele se ajunge la

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}L\left(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) dt\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\frac{dV^i}{dt} =$$

$$= \left\{\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i}\right\} V^i + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial y^i} V^i\right\}, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Înlocuind ultima expresie în (2.3) şi ţinând cont că

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial y^i} V^i\right\} dt = [\frac{\partial L}{\partial y^i} V^i]|_0^1 = 0$$

şi de faptul că $V^i(x(t))$ este arbitrar, se obţine următoarea proprietate:

Teorema 2.1 *Pentru ca funcţionala $I(c)$ să fie valoare extremală a lui $I(c_\varepsilon)$ este necesar ca să fie soluţie a ecuaţiilor Euler–Lagrange:*

$$E_i(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Curbele c care sunt soluţii ale ecuaţiilor de mai sus se numesc curbe extremale ale Lagrangianului L.

Avem următoarea teoremă:

Teorema 2.2 *Au loc următoarele proprietăţi:*

1° $E_i(L)$ *este un d–câmp de covectori.*

2° $E_i(L + L') = E_i(L) + E_i(L'),\ E_i(aL) = aE_i(L),\ a \in R.$

3° $E_i\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0,\ \forall F \in \mathcal{F}(TM),$ *cu* $\frac{\partial F}{\partial y^i} = 0.$

În mecanica teoretică se introduce noţiunea de energie a Lagrangianului L prin:

$$E_L = y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} - L. \tag{2.4}$$

Teorema 2.3 *Pe o curbă netedă c din varietatea M, are loc formula:*

$$\frac{dE_L}{dt} = -\frac{dx^i}{dt} E_i(L), \quad \left(y^i = \frac{dx^i}{dt}\right).$$

Demonstraţie. Din (2.4) obţinem

$$\frac{dE_L}{dt} = \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i} + y^i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) - y^i\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i} = -y^i\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i}\right),$$

$y^i = \frac{dx^i}{dt}.$ **q.e.d.**

Teorema 2.4 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y)$, energia E_L se conservă în lungul oricărei curbe extremale c soluţie a ecuaţiilor Euler–Lagrange $E_i(L) = 0$,* $\left(y^i = \frac{dx^i}{dt}\right).$

3 Problema variaţională în spaţii Finsler cu (α, β)-metrică.

Problema variaţională pentru un Lagrangian regulat $L(\alpha, \beta) = \check{F}^2(\alpha, \beta)$ a unui spaţiu Finsler cu (α, β)-metrică conduce la ecuaţiile Euler-Lagrange.

Vom demonstra că ecuaţiile Euler-Lagrange sunt ecuaţiile Lorentz ale spaţiului. Atunci conexiunea neliniară Lorentz şi conexiunea metrică şi canonică permit dezvoltarea geometriei acestor spaţii.

Spaţiile Finsler cu (α, β)-metrici sunt o generalizare directă a spaţiilor Randers sau Kropina. Importanţa acestei noţiuni în aplicaţii este subliniată de M.Matsumoto, [48], D.Bao, S.S.Chern şi Z.Shen, [12], P.Antonelli şi R.Miron, [9], H.Shimada şi S.Sabău, [83].

Spaţiile menţionate au fost studiate cu metode ale geometriei Finsler, utilizând mai ales conexiunea neliniară Cartan şi conexiunea metrică şi canonică. Aceste conexiuni sunt obţinute în urma unor calcule extrem de complicate. Din acest motiv, ecuaţiile Einstein şi ecuaţiile Maxwell bazate pe conexiunile menţionate nu au fost suficient investigate.

În acest paragraf vom studia problema variaţională a integralei acţiunii pentru Lagrangianul regulat dat de $L(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = F^2(x,y)$, luând în considerare o parametrizare specială pentru curbele extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange, anume parametrizarea în raport cu metrica Riemann $\alpha^2(x,y)$.

Spaţii Finsler cu (α, β)-metrici.

Un spaţiu Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ se numeşte cu (α, β)-metrică dacă funcţia sa fundamentală $F(x,y)$ depinde de x^i şi y^i, $(i = 1, .., n,\ n = dim\ M)$ prin intermediul lui $\alpha(x,y)$ şi $\beta(x,y)$, adică

$$F(x,y) = \check{F}(\alpha(x,y), \beta(x,y)), \tag{3.1}$$

unde

$$\begin{cases} \alpha^2(x,y) & = & a_{ij}(x) y^i y^j \\ \beta(x,y) & = & b_i(x) y^i. \end{cases} \tag{3.2}$$

În general funcţia $\check{F}$ este definită pe o mulţime deschisă $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$, unde (TM, π, M) este fibratul tangent al varietăţii reale M şi $0 : M \longrightarrow TM$ este secţiunea nulă a proiecţiei $\pi : TM \longrightarrow M$.

Evident, $\alpha(x,y) \neq 0$, deoarece $\alpha^2(x,y)$ este o metrică Riemanniană pe varietatea bază M, adică $\alpha^2 = ds^2 = a_{ij}(x)dx^i dx^j$ şi $\beta(x,y)$ este 1-forma $\beta = b_i(x)dx^i$ pe varietatea M.

În particular, dacă $\check{F}(\alpha,\beta) = \alpha+\beta$ se obţin spaţiile Randers studiate în Capitolul 4, pe baza unor ecuaţii Lorentz mai generale.

Cum $F(x,y)$ este funcţia fundamentală a spaţiului Finsler F^n, avem

$$\check{F}(\alpha(x,ty),\beta(x,ty)) = t\check{F}(\alpha(x,y),\beta(x,y)), \quad \forall t \in I\!R_+. \tag{3.3}$$

Notând

$$L(\alpha,\beta) = \check{F}^2(\alpha,\beta) \tag{3.4}$$

şi luând în considerare 2-omogenitatea lui $L(\alpha,\beta)$ avem următoarele identităţi:

$$\begin{aligned} &\alpha L_\alpha + \beta L_\beta = 2L, \quad && \alpha L_{\alpha\alpha} + \beta L_{\alpha\beta} = L_\alpha \\ &\alpha L_{\alpha\beta} + \beta L_{\beta\beta} = L_\beta, \quad && \alpha^2 L_{\alpha\alpha} + 2\alpha\beta L_{\alpha\beta} + \beta^2 L_{\beta\beta} = 2L. \end{aligned} \tag{3.5}$$

pentru $L_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \alpha}$, $L_\beta = \dfrac{\partial L}{\partial \beta}$, $L_{\alpha\alpha} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}$, $L_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}$, $L_{\beta\beta} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}$.

Din (3.2), deducem

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} = \frac{1}{\alpha} a_{ij}(x) y^j = \frac{1}{\alpha} Y_i, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y^i} = b_i(x) \tag{3.6}$$

unde

$$Y_i = a_{ij}(x) y^j. \tag{3.6$'$}$$

Evident Y_i este un câmp de d-covectori pe $\widetilde{TM}$.

Câmpul tensorial fundamental al spaţiului Finsler F^n este dat de

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}. \tag{3.7}$$

Vom nota ca în [83]:

$$y_i = g_{ij}(x,y) y^j = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i}. \tag{3.8}$$

Cum $F^2(x,y) = L(\alpha,\beta)$, y_i se exprimă $y_i = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial L}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \dfrac{\partial L}{\partial \beta}\dfrac{\partial \beta}{\partial y^i})$. În Consecinţă, obţinem

$$y_i = \rho_1 b_i + \rho Y_i \tag{3.9}$$

unde

$$\rho_1 = \frac{1}{2}L_\beta, \ \rho = \frac{1}{2}\alpha^{-1}L_\alpha. \tag{3.9'}$$

Are loc următoarea lemă:

Lema 3.1 *Câmpurile de d-covectori $b_i(x)$ şi $Y_i(x,y)$ sunt liniar independente pe $\widetilde{TM}$.*

Într-adevăr, din $f(x,y)b_i + g(x,y)Y_i = 0$, contracţionând cu y^i deducem $f\beta + g\alpha^2 = 0$. Derivând în raport cu β obţinem $f = 0$. Astfel, $g\alpha^2 = 0$, $\alpha \neq 0$ implică $g = 0$. **q.e.d.**

Aşadar y_i este unic reprezentat în forma (3.9).

Diferenţiind (3.9)' în raport cu y^i obţinem

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial y^i} = \rho_0 b_i + \rho_{-1}Y_i, \ \frac{\partial \rho}{\partial y^i} = \rho_{-1}b_i + \rho_{-2}Y_i \tag{3.10}$$

unde

$$\rho_0 = \frac{1}{2}L_{\beta\beta}, \ \rho_{-1} = \frac{1}{2}\alpha^{-1}L_{\alpha\beta}, \ \rho_{-2} = \frac{1}{2}\alpha^{-2}(L_{\alpha\alpha} - \alpha^{-1}L_\alpha). \tag{3.10'}$$

Funcţiile $\rho_1, \rho, \rho_0, \rho_{-1}, \rho_{-2}$ se numesc *invarianţii* spaţiului Finsler cu (α, β)-metrică, [83]. Indicii 1, 0, -1, -2 ne dau gradul de omogenitate a acestor invarianţi.

Acum putem arăta un rezultat foarte cunoscut, [83]:

Teorema 3.1 *Câmpul tensorial fundamental a spaţiului Finsler cu (α, β)-metrică este dat de*

$$g_{ij} = \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j + \rho_{-1}(b_i Y_j + b_j Y_i) + \rho_{-2} Y_i Y_j \tag{3.11}$$

sau, în formă echivalentă:

$$g_{ij}(x,y) = \rho(x,y)a_{ij}(x) + c_i(x,y)c_j(x,y) \tag{3.11'}$$

unde

$$c_i(x,y) = q_0 b_i + q_{-1} Y_i \tag{3.11''}$$

şi

$$\rho_0 = (q_0)^2, \ \rho_{-1} = q_0 q_{-1}, \ \rho_{-2} = (q_{-1})^2. \tag{3.11'''}$$

Demonstraţie. Din (3.8) şi (3.9) avem $\dfrac{\partial L}{\partial y^i} = \alpha^{-1}L_\alpha Y_i + L_\beta b_i$ şi $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$ este exact g_{ij} din (1.11). Ţinând cont de (3.11)" şi (3.11)"', g_{ij} din (3.11)' are expresia (3.11). **q.e.d.**

Observaţie. O metrică Lagrange de forma generală (3.11)' a fost considerată de M.Anastasiei. Teoria acesteia a fost considerabil extinsă de M.Kitayama în teza sa de doctorat, elaborată sub conducerea prof. M.Anastasiei.

Forma (3.11)' permite determinarea formei câmpului tensorial contravariant fundamental.

Propoziţia 3.1 *Tensorul contravariant $g^{ij}(x,y)$ al câmpului tensorial fundamental g_{ij} este:*

$$g^{ij} = \frac{1}{\rho}a^{ij} - \frac{1}{1+c^2}c^i c^j \tag{3.12}$$

unde

$$c^i = \frac{1}{\rho}a^{ij}c_j, \ \ c^2 = c_i c^i. \tag{3.12'}$$

Demonstraţia poate fi făcută prin calcul direct, arătând că $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$.

Calculul lui g_{ij} sau g^{ij}, în sensul relaţiilor (3.11) sau (3.12) nu este dificil pentru următoarele spaţii Finsler cu (α,β)-metrică,

$$\begin{array}{ll} L(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^2 & -\text{spaţii Randers}, \\ L(\alpha,\beta) = (\dfrac{\alpha^2}{\beta})^2, \ \beta \neq 0 & -\text{spaţii Kropina}, \\ L(\alpha,\beta) = (\dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta})^2, \ \beta \neq 0 & -\text{spaţii Matsumoto}, \\ L(\alpha,\beta) = \alpha^2+\beta^2 & -\text{spaţii Riemann}. \end{array}$$

Se obţine:

Propoziţia 3.2 *În cazul spaţiilor Randers, $L(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^2$ avem*

$$g_{ij} = pa_{ij} + \frac{1}{\alpha^2}pY_iY_j + l_il_j \tag{3.11$_1$}$$

şi

$$g^{ij} = \frac{1}{p}a^{ij} + \frac{1}{\dfrac{1}{p} + a^{ij}l_il_j}\left(\frac{1}{p}a^{ir}a^{js}l_rl_s\right) \tag{3.12$_1$}$$

unde $p = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ *şi* $l_i = b_i + \dfrac{1}{\alpha}Y_i$.

Demonstraţie.În cazul Randers invarianţii sunt $\rho_0 = 1$, $\rho_{-1} = \frac{1}{\alpha}$, $\rho_{-2} = -\frac{\beta}{\alpha^3}$, $\rho = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, $\rho_1 = \alpha+\beta$ iar prin calcul direct găsim exprimările din enunţ. **q.e.d.**

<u>Observaţie.</u> Dacă notăm $\frac{1}{\alpha}Y_i = \overset{\circ}{l}_i$ atunci g_{ij} are forma

$$gij = p(a_{ij} - \overset{\circ}{l}_i\overset{\circ}{l}_j) + l_il_j,$$

formă ce o vom regăsi în Cap.4. Deasemeni, g^{ij} din $(3.12)_1$ este acelaşi cu g^{ij} găsit în Cap.4.

Propoziţia 3.3 *Pentru spaţiile Kropina,* $L(\alpha,\beta) = (\frac{\alpha^2}{\beta})^2$, $\beta \neq 0$, *câmpul tensorial fundamental şi contravariantul său sunt daţi de:*

$$(3.11)_2 \qquad g_{ij} = 2q^2a_{ij} + q^2[(3q^2+8q)b_ib_j - 4q(b_il_j + b_jl_i) + 4l_il_j],$$

respectiv,

$$(3.12)_2 \qquad g^{ij} = \frac{1}{2q^2}a^{ij} - \frac{1}{2q^2 + a^{ij}c_ic_j}(\frac{1}{2q^2}a^{ri}a^{sj}c_rc_s)$$

unde $q = \frac{\alpha}{\beta}$, $l_i = b_i + \frac{1}{\alpha}Y_i$ *şi* $c_i = \sqrt{3}q^2b_I + 2ql_i]$.

Demonstraţie. Prin calcul direct, utilizând invarianţii $\rho_0 = 3(\frac{\alpha}{\beta})^4 = 3q^4$, $\rho_{-1} = -\frac{4\alpha^2}{\beta^3}$, $\rho_{-2} = \frac{4}{\beta^2}$, $\rho = 2(\frac{\alpha}{\alpha})^2 = 2q^2$, se obţin relaţiile $(3.11)_2$ şi $(3.12)_2$. **q.e.d.**

Propoziţia 3.4 *Spaţiile Matsumoto,* $L(\alpha,\beta) = (\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta})^2$, $\beta \neq 0$, *au tensorul fundamental* g_{ij} *şi contravariantul acestuia* g^{ij} *daţi de*

$(3.11)_3$

$$\begin{aligned} g_{ij} = \; & \frac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3}a_{ij} + \\ & + \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)^4}[\alpha(\alpha+8\beta)b_ib_j + \alpha(\alpha-4\beta)(b_il_j + b_jl_i) - \beta(\alpha-4\beta)l_il_j], \end{aligned}$$

respectiv,

$$(3.12)_3 \qquad g^{ij} = \frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^2(\alpha-2\beta)}a^{ij} - \frac{1}{\frac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3} + a^{ij}c_ic_j}[\frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^2(\alpha-2\beta)}a^{ri}a^{sj}c_rc_s,]$$

unde $l_i = b_i + \frac{1}{\alpha}Y_i$ *şi* $c_i = \frac{\alpha}{\sqrt{3}(\alpha-\beta)^2}[2(\alpha+2\beta)b_i + (\alpha-4\beta)l_i]$.

Demonstraţie. Pentru $L(\alpha,\beta) = (\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta})^2$, $\beta \neq 0$, invarianţii sunt $\rho_0 = 3(\frac{\alpha}{\alpha-\beta})^4$, $\rho_{-1} = \frac{\alpha^2(\alpha-4\beta)}{(\alpha-\beta)^4}$, $\rho_{-2} = -\frac{3\beta(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^4}$, $\rho = \frac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3}$. Prin calcul direct se obţin expresiile din enunţ. **q.e.d.**

Propoziţia 3.5 *În cazul spaţiilor Riemann, $L(\alpha,\beta) = \alpha^2+\beta^2$ obţinem următoarele exprimări ale tensorului fundamental g_{ij} şi a tensorului g^{ij}:*

$$g_{ij} = a_{ij} + b_i b_j \tag{3.11)$_4$}$$

şi

$$g^{ij} = a^{ij} - \frac{1}{1+a^{ij}b_i b_j} a^{ir} a^{js} b_r b_s. \tag{3.12)$_4$}$$

Demonstraţie.Într-adevăr, utilizând invarianţii $\rho_0 = 1$, $\rho_{-1} = 0$, $\rho_{-2} = 0$, $\rho = 1$, obţinem relaţiile cerute. **q.e.d.**

În continuare vom studia problema variaţională a unui spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică.

Fie $F^n = (M,F)$ un spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică: $F(x,y) = \check{F}(\alpha(x,y),\beta(x,y))$ şi $F^2 = \check{F}^2(\alpha,\beta) = L(\alpha,\beta)$.

Funcţiile $F : (x,y) \in TM \longmapsto F(x,y) \in I\!R$, $F^2 : (x,y) \in TM \longmapsto F^2(x,y) \in I\!R$ sunt funcţii Lagrange. Acestea sunt funcţii diferenţiabile pe $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$ şi continue pe secţiunea nulă a proiecţiei canonice $\pi : TM \longrightarrow M$.

Între cei doi Lagrangieni există o mare diferenţă, F fiind singular, în timp ce F^2 este nesingular (sau nedegenerat).

Într-adevăr,
$$k_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{1}{F}(g_{ij} - \frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{\partial F}{\partial y^j})$$
are proprietatea $y^i k_{ij} = 0$. Urmează că $det||k_{ij}|| = 0$. Lagrangianul (3.4), $L(\alpha(x,y),\beta(x,y)) = \check{F}^2(\alpha(x,y),\beta(x,y))$ este nesingular, deoarece Hessiana acestuia are elementele $2g_{ij}$ şi $det||g_{ij}|| \neq 0$ pe $\widetilde{TM}$.

Deci, vom studia problema variaţională în spaţiul Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ cu (α,β)-metrică pornind de la integrala acţiunii Lagrangianului nedegenerat $L(\alpha,\beta) = \check{F}^2(\alpha,\beta) = F^2(x,y)$, [6],[5].

Fie $c : t \in [0,1] \longmapsto c(t) \in M$ o curbă netedă parametrizată pe M având imaginea într-un domeniu de hartă locală din M. Curba c se poate exprima analitic prin $x^i = x^i(t),\ t \in [0,1]$.

Integrala acţiunii Lagrangianului nedegenerat $F^2(x,y) = L(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ este dată de funcţionala

$$I(c) = \int_0^1 F^2(x, \frac{dx}{dt})dt. \tag{3.13}$$

Problema variaţională pentru $I(c)$, (punctele $x_0 = (x^i(0))$, $x_1 = (x^i(1))$ fiind fixate) conduc la ecuaţiile Euler-Lagrange

$$E_i(F^2) := \frac{\partial F^2}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^2}{\partial y^i} = 0, \; y^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{3.14}$$

Curbele c, soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale de mai sus se numesc *curbe extremale*, [50].

Energia Lagrangianului L este

$$\mathcal{E}_L = y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} - L. \tag{3.15}$$

Dar $L = F^2$ este 2-omogen în raport cu y^i.

Energia spaţiului Finsler $F^n = (M, F)$ cu (α, β)-metrică, $\mathcal{E}_L$, este dată de

$$\mathcal{E}_L = L. \tag{3.16}$$

Într-adevăr, $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_{F^2} = y^i \dfrac{\partial F^2}{\partial y^i} - F^2 = 2F^2 - F^2 = F^2 = L$. Din Teorema 2.4 rezultă:

Propoziţia 3.6 *Energia $\mathcal{E}_L = F^2$ a spaţiului Finsler F^n se conservă de-a lungul curbelor extremale.*

Urmează că:

Propoziţia 3.7 *De-a lungul curbelor extremale c avem*

$$\frac{dF^2}{dt} = \frac{dL}{dt} = 0. \tag{3.17}$$

Cu alte cuvinte, pătratul funcţiei fundamentale a unui spaţiu Finsler se conservă pe fiecare curbă extremală a spaţiului.

Considerăm operatorul E_i aplicat lui $L(\alpha(x,y), \beta(x,y))$. Obţinem

Propoziţia 3.8 *Câmpul de covectori $E_i(L(\alpha, \beta))$ se exprimă prin:*

$$E_i(L) = L_\alpha E_i(\alpha) + L_\beta E_i(\beta) - \{\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i}\}. \tag{3.18}$$

Într-adevăr,

$$E_i(L(\alpha,\beta)) = \frac{\partial L(\alpha,\beta)}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\alpha,\beta)}{\partial y^i} \quad \text{si}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = L_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} + L_\beta \frac{\partial \beta}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} = L_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + L_\beta \frac{\partial \beta}{\partial y^i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i} = \frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i} + L_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + L_\beta \frac{d}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i},$$

au drept consecinţă formula (3.18). **q.e.d.**

Remarcăm relaţiile între $E_i(\alpha)$ şi $E_i(\alpha^2)$:

$$2\alpha E_i(\alpha) = E_i(\alpha^2) + 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i}. \tag{3.19}$$

Rezultă

Propoziţia 3.9 *Ecuaţiile Euler-Lagrange (3.15) sunt echivalente cu următoarele ecuaţii diferenţiale:*

$$E_i(\alpha^2) + 2\frac{\rho_1}{\rho}E_i(\beta) + 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} = \frac{1}{\rho}\{\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i}\}, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{3.20}$$

Demonstraţie.Ţinând cont de (3.19) avem

$$E_i(L) = \frac{1}{2\alpha}L_\alpha E_i(\alpha^2) + \frac{1}{\alpha}L_\alpha \frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + L_\beta E_i(\beta) - \{\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i}\}.$$

Pe de altă parte, avem $\rho = \frac{1}{2\alpha}L_\alpha$ şi $\rho_1 = \frac{1}{2}L_\beta$, ceea ce conduce la

$$E_i(L) = \rho E_i(\alpha^2) + 2\rho_1 E_i(\beta) + 2\rho\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} - \{\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^i} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^i}\},$$

iar $E_i(L) = 0$ este chiar (3.20). **q.e.d.**

Să fixăm acum o parametrizare a curbei c. Considerăm s lungimea arcului de curbă dată de $ds^2 = \alpha^2(x, \frac{dx}{dt})dt^2$. În acest caz $\alpha^2(x, \frac{dx}{ds}) = 1$. Atunci, s se va numi <u>parametru canonic</u>. De-a lungul curbei c avem

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0. \tag{3.21}$$

Propoziţia 3.10 *În parametrizarea canonică, de-a lungul unei curbe extremale c, avem*

$$\frac{d\beta}{ds}=0,\ \frac{dL}{ds}=0,\ \frac{dL_\alpha}{ds}=0,\ \frac{dL_\alpha}{ds}=0. \tag{3.22}$$

Într-adevăr, $\frac{dL}{ds}=0$ are loc conform propoziţiei precedente. Luând în considerare că de-a lungul unei curbe extremale c, (3.21) este satisfăcută, rezultă că $\frac{dL}{ds}=L_\alpha\frac{d\alpha}{ds}+L_\beta\frac{d\beta}{ds}=L_\beta\frac{d\beta}{ds}=0$. Remarcând că $L_\beta\neq 0$, urmează $\frac{d\beta}{ds}=0$.

În final $\frac{dL_\alpha}{ds}=L_{\alpha\alpha}\frac{d\alpha}{ds}+L_{\alpha\beta}\frac{d\beta}{ds}=0$. Analog pentru $\frac{dL_\beta}{ds}=0$.

Fie $F_{ij}(x)$ câmpul tensorial electromagnetic corespunzător funcţiei electromagnetice $\beta=b_i(x)y^i$:

$$F_{ij}(x)=\frac{\partial b_j}{\partial x^i}-\frac{\partial b_i}{\partial x^j}. \tag{3.23}$$

Ţinând cont de expresia lui $E_i(\beta)$, obţinem:

$$E_i(\beta)=F_{ij}(x)\frac{dx^j}{ds}. \tag{3.24}$$

Utilizând (3.21), (3.22), (3.23) putem afirma:

Teorema 3.2 *În parametrizarea canonică, ecuaţiile Euler-Lagrange ale spaţiului Finsler cu* (α,β)*-metrică sunt:*

$$E_i(\alpha^2)+2\frac{\rho_1}{\rho}F_{ij}(x)y^j=0,\ y^j=\frac{dx^j}{ds}. \tag{3.25}$$

Aceste ecuaţii sunt exact ecuaţiile Lorentz pentru un spaţiu Randers. Le vom numi ecuaţiile Lorentz pentru un spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică.

Teorema 3.3 *Ecuaţiile Lorentz ale spaţiului Finsler cu* (α,β)*-metrică* $F^n=(M,F)$ *au forma:*

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=\sigma(x,y)F^i_j(x)\frac{dx^j}{ds} \tag{3.26}$$

unde

$$\sigma(x,y)=\frac{\rho_1}{\rho},\ F^i_j(x)=a^{is}(x)F_{sj}(x) \tag{3.26$'$}$$

şi γ^i_{jk} *sunt simbolii lui Christoffel ai tensorului metric Riemannian* $a_{ij}(x)$.

Demonstraţie.Într-adevăr, din (3.2) şi (3.14) avem

$$E_i(\alpha^2) = (\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial y^i})(a_{mj}j^m y^j) = \frac{\partial a_{mj}}{\partial x^i} y^m y^j - \frac{d}{ds}(a_{mj}\delta_i^m y^j + a_{mj} y^m \delta_i^j) =$$

$$= \frac{\partial a_{mj}}{\partial x^i} y^m y^j - a_{ij}\frac{dy^j}{ds} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x^j} y^m y^j - a_{im}\frac{dy^m}{ds} =$$

$$= \{\frac{\partial a_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x^j}\} y^m y^j - 2a_{ij}\frac{dy^j}{ds}.$$

Înlocuind în (3.25) şi ţinând cont de (3.26)' avem

$$-\{\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial a_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{mj}}{\partial x^i}\} y^m y^j - 2a_{ij}\frac{dy^j}{ds} + 2\sigma(x,y)F_{ij}(x)\frac{dx^j}{ds}.$$

Înmulţind cu $-\frac{1}{2}a^{hi}$, obţinem:

$$\frac{d^2x^h}{ds^2} + \gamma^h_{mj}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \sigma(x,y)F^h_j\frac{dx^j}{ds}$$

adică (3.26). **q.e.d.**

Corolar 3.1 1°. *Dacă* $b_i(x) = \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}$ *(β-este un gradient) atunci (3.26) ne dau geodezicele spaţiilor Riemann* $\mathcal{R}^n = (M, \alpha^2(x,y))$.

2°. *Transformarea gauge* $b_i(x) \longmapsto b_i(x) + \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}$ *păstrează forma ecuaţiilor Lorentz.*

Într-adevăr,

1°. $b_i(x) = \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}$ implică $F_{ij}(x) = 0$. Astfel, membrul al doilea al ecuaţiei Lorentz se anulează.

2°. $b_i(x) \longmapsto b_i(x) + \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}$ implică invarianţa tensorului electromagnetic F_{ij} iar membrul al doilea al ecuaţiei Lorentz este un factor nou $\dfrac{\rho_1}{\rho}$ înmulţit cu $F^i_j(x)$. **q.e.d.**

Lema 3.2 *Pentru orice spaţiu Finsler* F^n *cu* (α,β)*-metrică, câmpul de covectori* $\dot\sigma_k = \dfrac{\partial\sigma}{\partial y^k}$ *nu se anulează.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, presupunem că $\dfrac{\partial\sigma}{\partial y^i} = 0$, ceea ce implică

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial y^i} = \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial y^i} \Leftrightarrow \rho_0 b_i + \rho_{-1}Y_i = \sigma(\rho_{-1}b_i + \rho_{-2}Y_i).$$

Dar Lema 3.1 ne asigură că $\{b_i, Y_i\}$ sunt liniar independenţi. Astfel, $\rho_0 = \sigma\rho_{-1}$, $\rho_{-1} = \sigma\rho_{-2}$ sau

$$L_{\beta\beta} = \frac{\sigma}{\alpha}L_{\alpha\beta},\ L_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{\alpha}(L_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\alpha}L_\beta).$$

Dar

$$\begin{aligned} L_\beta = \alpha L_{\alpha\beta} + \beta L_{\beta\beta} &= \sigma(L_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\alpha}L_\beta) + \frac{\sigma}{\alpha}\beta L_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\sigma}{\alpha}(\alpha L_{\alpha\alpha} + \beta L_{\alpha\beta} - L_\beta) = \frac{\sigma}{\alpha}(L_\alpha - L_\beta). \end{aligned}$$

Atunci

$$L_\beta(1 + \frac{\sigma}{\alpha}) = \frac{\sigma}{\alpha}L_\alpha \implies \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{L_\beta}{L_\alpha}.$$

Astfel, $L_\beta(1 + \dfrac{L_\beta}{L_\alpha}) = L_\beta$ implică $L_\beta = 0$, ceea ce vine în contradicţie cu $L_\beta \neq 0$. **q.e.d.**

<u>Aplicaţii.</u>

1°. Pentru spaţiile Randers, $L(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^2$, avem $\rho = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$, $\rho_1 = \alpha+\beta$ ecuaţiile (2.4) au loc cu $\sigma = \dfrac{\rho_1}{\rho} = \alpha$, fiind identice cu cele obţinute de Prof. R.Miron în [51].

2°. Pentru spaţiile Kropina, $L(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha^4}{\beta^2}$, se obţine $\rho = 2(\dfrac{\alpha}{\beta})^2$, $\rho_1 = -\dfrac{\alpha^4}{\beta^3}$, $\sigma = \dfrac{\rho_1}{\rho} = -\dfrac{\alpha^2}{2\beta}$.

3°. Spaţiile Matsumoto, $L(\alpha,\beta) = (\dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta})^2$, au $\rho = \dfrac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3}$, $\rho_1 = \dfrac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)^3}$, şi $\sigma = \dfrac{\rho_1}{\rho} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha-2\beta}$.

4°. Pentru spaţiile Riemann, $L(\alpha,\beta) = \alpha^2+\beta^2$, avem $\rho = 1$, $\rho_1 = \beta$ şi $\sigma = \dfrac{\rho_1}{\rho} = \beta$.

Pentru aceste spaţii ecuaţiile Lorentz sunt (3.26) cu exprimarea invariantului $\dfrac{\rho_1}{\rho}$ de mai sus.

Conexiunea neliniară canonică şi N-conexiunea liniară metrică.

Ecuaţiile Lorentz (3.26) pot fi scrise în forma

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + N^i_j(x,y)\frac{dx^j}{ds} = 0,\ y^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{3.27}$$

unde

$$N^i_j(x,y) = \gamma^i_{jk}(x)y^k - \sigma(x,y)F^i_j(x) \tag{3.28}$$

şi unde $\gamma^i_{jk}(x)$ sunt simbolii lui Christoffel corespunzători metricii Riemann α^2. Invariantul $\sigma = \dfrac{\rho_1}{\rho}$ depinde de (x^i, y^i) prin intermediul lui $\alpha(x,y)$ şi $\beta(x,y)$ şi după cum arată Lema 3.2, covectorul $\dot{\sigma}_k = \dfrac{\partial \sigma}{\partial y^k}$ nu se anulează.

Sistemul de funcţi N^i_j din (3.28) determină o conexiune neliniară N, care depinde numai de funcţia fundamentală $F(x,y)$ a spaţiului Finsler cu (α,β)-metrică, [50]. N se numeşte *conexiunea neliniară canonică Lorentz a lui* F^n.

Rezultă că (3.27) ne dau curbele autoparalele ale conexiunii neliniare N.

Tensorul de torsiune al lui N este

$$t^i_{jk} = (\delta^s_j F^i_k - \delta^s_k F^i_j)\dot{\sigma}_s. \tag{3.29}$$

Conform Lemei 3.2, următoarea proprietate este imediată:

Propoziţia 3.11 *Tensorul t^i_{jk} se anulează dacă şi numai dacă covectorul electromagnetic $b_i(x)$ este un gradient.*

Conexiunea Berwald a conexiunii neliniare canonice N are coeficienţii

$$B^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x) - F^i_j(x)\dot{\sigma}_k. \tag{3.30}$$

Tensorul t^i_{jk} este tensorul de torsiune al conexiunii Berwald B^i_{jk}. Conexiunea neliniară canonică N determină o distribuţie diferenţiabilă, notată cu N, suplementară distribuţiei verticale V pe varietatea TM :

$$T_u(TM) = N_u \oplus V_u, \quad \forall u \in TM. \tag{3.31}$$

Fie $\left(\dfrac{\delta}{\delta x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)$ baza locală adaptată lui N şi lui V, iar $(dx^i, \delta y^i)$ baza sa duală, [49]:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}, \delta y^i = dy^i + N^i_j(x,y)dx^j. \tag{3.32}$$

În timp ce distribuţia verticală V este integrabilă, distribuţia (orizontală) N nu are această proprietate.

Tensorul de integrabilitate al lui N, [56] este:

$$R^i_{jk} = \frac{\delta N^i_j}{\delta x^k} - \frac{\delta N^i_k}{\delta x^j}. \tag{3.33}$$

Fie $F^i_{j|k}$ deriavata covariantă a lui F^i_j în raport cu conexiunea Levi-Civita γ^i_{jk} şi $\dfrac{\delta\sigma}{\delta x^k} = \sigma_k$. Avem

Propoziţia 3.12 *Tensorul de integrabilitate R^i_{jk} al conexiunii neliniare N este dat de*

$$R^i_{jk} = -\rho_j{}^i{}_{km} y^m + 2\sigma(F^i_{j|k} - F^i_{k|j}) + 2(F^i_j \sigma_k - F^i_k \sigma_j) \tag{3.33'}$$

unde $\rho_j{}^i{}_{km}$ este tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita.

Propoziţia 3.13 *Dacă următoarele condiţii au loc, atunci distribuţia orizontală N este integrabilă:*

$$\rho_j{}^i{}_{km} = 0, \quad F^i_{j|k} = 0, \quad \sigma_k = 0. \tag{3.34}$$

Caracterul geometric al condiţiei precedente este evident.

Considerăm N-conexiunea liniară $D\Gamma(N)$ având coeficienţii (L^i_{jk}, C^i_{jk}) şi tensorul fundamental $g_{ij}(x,y)$ din (3.11)' a spaţiului Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ cu (α,β)-metrică.

h-derivata covariantă a lui g_{ij} se exprimă prin

$$\begin{aligned} \overset{H}{\nabla}_k\, g_{ij} &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - L^s_{ik} g_{sj} - L^s_{jk} g_{is} \\ \overset{V}{\nabla}_k\, g_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - C^s_{ik} g_{sj} - C^s_{jk} g_{is}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Se poate demonstra, [56]:

Teorema 3.4 1°. *Există o unică N-conexiune liniară $D\Gamma(N) = (L^i_{jk}, C^i_{jk})$ având proprietăţile*

$$\begin{aligned} &\overset{H}{\nabla}_k\, g_{ij} = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_k\, g_{ij} = 0 \\ &T^i_{jk} = L^i_{jk} - L^i_{kj} = 0, \quad S^i_{jk} = C^i_{jk} - C^i_{kj} = 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

2°. *Coeficienţii lui $D\Gamma(N)$ sunt daţi de simbolii lui Christoffel generalizaţi:*

$$(3.37)\qquad \begin{cases} L^i_{jk} = \dfrac{1}{2}g^{is}(\dfrac{\delta g_{sk}}{\delta x^j} + \dfrac{\delta g_{js}}{\delta x^k} - \dfrac{\delta g_{jk}}{\delta x^s}) \\ C^i_{jk} = \dfrac{1}{2}g^{is}(\dfrac{\partial g_{sk}}{\partial y^j} + \dfrac{\partial g_{js}}{\partial y^k} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial y^s}) \end{cases}$$

3°. *Conexiunea $D\Gamma(N)$ depinde numai de funcţia fundamentală $F(x,y)$ a spaţiului Finsler F^n cu (α,β)-metrică.*

$D\Gamma(N)$ se numeşte conexiunea metrică şi canonică a lui F^n.

Bazându-ne pe conexiunea neliniară Lorentz N şi pe conexiunea metricăşi canonică $D\Gamma(N)$ putem construi geometria spaţiilor Finsler cu (α,β)-metrică urmând metodele din cărtile [49],[50].

4 Problema variaţională pentru Lagrangieni de ordinul 2.

Condiţii Zermelo

Un Lagrangian de ordinul 2 este o aplicaţie $L : E = \mathrm{Osc}^2 M \longrightarrow R$. Lagrangianul este diferenţiabil dacă L este de clasă C^∞ pe varietatea $\widetilde{E}$ şi L este continuu în punctele $(x,0,0)$ ale lui E, care se identifică cu punctele varietăţii bază M.

Fie Hessiana Lagrangianului diferenţiabil $L(x,y^{(1)},y^{(2)})$ în raport cu $y^{(2)}$, având elementele date de $2g_{ij}(x,y^{(1)},y^{(2)})$, unde

$$g_{ij}(x,y^{(1)},y^{(2)}) = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}}.$$

g_{ij} este un d–câmp de tensori diferenţiabil pe $\tilde{E}$, simetric, covariant de ordin 2.

Pentru un Lagrangian diferenţiabil $L(x,y^{(1)},y^{(2)})$ vom considera derivata Lie în raport cu un câmp vectorial X pe $\tilde{E}$, notat prin

$$X(L(x,y^{(1)},y^{(2)})) = \pounds_X L(x,y^{(1)},y^{(2)}).$$

În raport cu câmpurile de vectori Liouville $\overset{1}{\Gamma}$ şi $\overset{2}{\Gamma}$:

$$\overset{1}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\quad \overset{2}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}$$

obţinem câmpurile de scalari pe $\tilde{E}$

$$\overset{1}{I}(L) = \pounds_{\overset{1}{\Gamma}} L, \ \overset{2}{I}(L) = \pounds_{\overset{2}{\Gamma}} L.$$

Acestea se vor numi invarianţii principali ai Lagrangianului L.

Invarianţii se exprimă astfel:

$$\overset{1}{I}(L) = y^{(1)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}, \ \overset{2}{I}(L) = y^{(1)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}.$$

Să considerăm $c : [0,1] \longrightarrow M$ o curbă netedă parametrizată, reprezentată într-un domeniu U al unei hărţi locale prin $c(t) = (x^i(t))$, $t \in [0,1]$. Extensia acesteia, $\tilde{c} : [0,1] \longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$ este reprezentată de

$$x^i = x^i(t), \ y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}(t), \ y^{(2)i} = \frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{dt^2}(t), \quad t \in [0,1].$$

Integrala acţiunii Lagrangianului L în lungul curbei c este definită de

$$I(c) = \int_0^1 L\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\right) dt.$$

Se poate demonstra teorema:

Teorema 4.1 *Condiţia necesară ca integrala acţiunii $I(c)$ să nu depindă de parametrizarea curbei c este dată de:*

$$\overset{1}{I}(L) = 0, \quad \overset{2}{I}(L) = L. \tag{4.1}$$

Demonstraţie. Fie difeomorfismul diferenţiabil $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$, $t \in [0,1]$. Pentru ca integrala acţiunii să nu depindă de parametrizarea curbei c este necesar ca:

$$\tilde{L}\left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{x}^i}{d\tilde{t}^2}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt} = L\left(x, \frac{dx}{d\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)\right).$$

Derivând în relaţia precedentă în raport cu $\frac{d\tilde{t}}{dt}$ şi luând $\tilde{t} = t$ obţinem $L = y^{(1)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}$ sau $L = \overset{2}{I}(L)$. Derivând încă odată în raport cu $\frac{d^2\tilde{t}}{dt^2}$ şi luând $\tilde{t} = t$ se obţine $\overset{1}{I}(L) = 0$. **q.e.d.**

A.Kawaguchi şi K.Kondo au numit ecuaţiile (4.1) condiţiile Zermelo.

Teorema 4.2 *Spaţiile Lagrange de ordinul al doilea care satisfac condiţiile Zermelo (4.1) sunt spaţii singulare, adică $rang||g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)})|| < n$.*

Demonstraţie. Condiţia $\overset{1}{I}(L) = 0$ conduce la $y^{(1)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = 0$, care prin derivare în raport cu $y^{(2)j}$, ne dă: $y^{(1)i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} = 0$, echivalentă cu $y^{(1)i}g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = 0$ care arată că $rang||g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)})|| < n$. **q.e.d.**

Rezultatul este cunoscut. A fost demonstrat prima dată de T.Kawaguchi. El a fost utilizat de Kazuo Kondo, [42], în teoria câmpurilor fizice.

În cazul spaţiilor Finsler de ordinul doi (şi chiar de ordinul k), vom demonstra un rezultat nou, care surprinde.

Teorema 4.3 *Nu există spaţii Finsler de ordin $k \geq 2$ care să satisfacă condiţiile Zermelo.*

Demonstraţie. Vom justifica rezultatul pentru ordinul $k = 2$ dar demonstraţia rămâne aceeaşi şi în cazul general.

Admitem prin absurd că există spaţii Finsler de ordinul al doilea $F^{(2)n} = (M, F(x, y^{(1)}, y^{(2)}))$ care satisfac condiţiile Zermelo (4.1)

$$\overset{1}{I}(F) = 0, \quad \overset{2}{I}(F) = F.$$

Din condiţia de omogenitate a lui F avem $\mathcal{L}_{\overset{2}{\Gamma}} F = \overset{2}{\Gamma} F = 2F$, (pentru $k > 2$ se obţine kF) iar din a doua condiţie Zermelo $\overset{2}{I}(F) = \mathcal{L}_{\overset{2}{\Gamma}} F = F$. Urmează $2F = F$, (în cazul $k > 2$, $kF = F$) deci $F = 0$. În contradicţie cu $F > 0$. **q.e.d.**

Problema variaţională

Pe un deschis U vom considera curbele

$$c_\varepsilon : t \in [0, 1] \longrightarrow (x^i(t) + \varepsilon V^i(t)) \in M,$$

unde ε este un număr real, suficient de mic în valoare absolută aşa încât $Im\, c_\varepsilon \subset U$ şi $V^i(x(t))$, notat cu $V^i(t)$, să fie un câmp de vectori regulat pe U, restricţionat la curba c. Presupunem că c_ε au aceleaşi extremităţi $c(0)$ şi $c(1)$, ca ale curbei c şi în aceste puncte ele au aceiaşi vectori tangenţi. Rezultă că $V^i(t)$ satisface condiţile:

$$V^i(0) = V^i(1) = 0, \quad \frac{dV^i}{dt}(0) = \frac{dV^i}{dt}(1) = 0. \tag{4.2}$$

Extensia la $\tilde{E}$ a curbelor c_ε este

$$\tilde{c}_\varepsilon : t \in [0,1] \to \left(x^i(t) + \varepsilon V^i(t), \frac{dx^i}{dt} + \varepsilon \frac{dV^i}{dt}, \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2V^i}{dt^2} \right) \right) \in \pi^{-1}(U).$$

Integrala acţiunii Lagrangianului diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ în lungul curbelor c_ε este

$$I(c_\varepsilon) = \int_0^1 L\left(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}, \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2V}{dt^2} \right) \right) dt. \tag{4.3}$$

Condiţia necesară ca $I(c)$ să fie extremală pentru $I(c_\varepsilon)$ este

$$\left. \frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

În condiţiile noastre de diferenţiabilitate, operatorul $\dfrac{d}{d\varepsilon}$ permută cu operatorul de integrare. Din (4.3) se obţine:

$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} L\left(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}, \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2V}{dt^2} \right) \right) dt.$$

Calculând se ajunge la:

$$\left. \frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} \frac{dV^i}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} \frac{d^2V^i}{dt^2} \right] dt.$$

Înlocuind

$$\overset{1}{I}_V(L) = V^i \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}, \quad \overset{2}{I}_V(L) = V^i \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}$$

şi

$$\overset{0}{E}_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}, \tag{4.4}$$

se deduce identitatea:

$$\begin{aligned} & V^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2} \frac{d^2V^i}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = \\ & = \overset{0}{E}_i(L) V^i + \frac{d}{dt} \overset{2}{I}_V(L) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overset{1}{I}_V(L). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Condiţiile (4.2) implică pentru $\overset{1}{I}_V(L)$ şi $\overset{2}{I}_V(L)$ proprietăţile:

$$\overset{\alpha}{I}_V(L)(c(0)) = \overset{\alpha}{I}_V(L)(c(1)) = 0, \ (\alpha = 1, 2).$$

Obţinem atunci:

$$\left. \frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \overset{0}{E}_i(L) V^i dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ \overset{2}{I}_V(L) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overset{1}{I}_V(L) \right\} dt.$$

Cel de-al doilea termen din partea dreaptă este 0 ceea ce conduce la

$$\left.\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \overset{0}{E}_i(L)V^i\, dt.$$

Deoarece câmpul vectorial V^i pe curba c este arbitrar, ţinând cont de condiţia de extremum şi de ultima egalitate, putem enunţa teorema:

Teorema 4.4 *Pentru ca integrala acţiunii $I(c)$ să aibă valoare extremală pentru $I(c_\varepsilon)$, este necesar să aibă loc ecuaţiile Euler–Lagrange:*

$$\overset{0}{E}_i(L) \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = 0,$$
$$y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}, \quad y^{(2)i} = \frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{dt^2}.$$

Curbele $c : [0,1]\longrightarrow M$, soluţii ale ecuaţiilor E–L se numesc curbe extremale pentru integrala acţiunii $I(c)$.

Teorema 4.5 *$\overset{0}{E}_i(L)$, din (4.4), este un d–câmp de covectori.*

Demonstraţie. O transformare de coordonate pe E implică

$$\int_0^1 \left[\overset{0}{\tilde{E}}_i(\tilde{L})\tilde{V}^i - \overset{0}{E}_i(L)V^i\right] dt = \int_0^1 \left[\overset{0}{\tilde{E}}_i(\tilde{L})\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} - \overset{0}{E}_j(L)\right] V^j\, dt = 0.$$

Dar V^i este un câmp arbitrar de vectori.

Din acest motiv ultima ecuaţie implică $\overset{0}{\tilde{E}}_i(\tilde{L})\dfrac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \overset{0}{E}_j(L)$. **q.e.d.**

Operatorii $\overset{1}{I}_V,\ \overset{2}{I}_V,\ \dfrac{d_V}{dt}$

Fie $c : t \in [0,1]\longrightarrow(x^i(t)) \in M$ o curbă netedă, $\tilde{c}$ extensia sa pe E şi $V^i(x(t))$ un câmp de vectori diferenţiabil în lungul curbei c.

Avem următoarea lemă:

Lema 4.1 *Aplicaţia $S_V : c\longrightarrow \mathrm{Osc}^2 M$, definită prin*

$$x^i = x^i(t)$$
$$y^{(1)i} = V^i(x(t)), \quad 2y^{(2)i} = \frac{dV^i(x(t))}{dt}, \quad t \in [0,1]$$

este o secţiune a proiecţiei $\pi : \mathrm{Osc}^2 M\longrightarrow M$ de-a lungul curbei c.

Într-adevăr, se obţine:

$$\tilde{y}^{(1)i} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} y^{(1)j} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} V^j = \tilde{V}^i, \; 2\tilde{y}^{(2)i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} V^j\right) = \frac{d\tilde{V}^i}{dt}.$$

q.e.d.

Dacă $V^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, atunci $S_{\frac{dx}{dt}}(c) = \tilde{c}$.

Profesorul R.Miron a avut ideea introducerii următorului operator de-a lungul curbei c:

$$\frac{d_V}{dt} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2} \frac{d^2V^i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}.$$

Importanţa acestui operator rezulă din:

Teorema 4.6 *Operatorul* $\dfrac{d_V}{dt}$ *are următoarele proprietăţi:*

1° *Este invariant în raport cu schimbările de coordonate pe E.*

2° *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil* $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$, $\dfrac{d_V L}{dt}$ *este un câmp de scalari de-a lungul lui c.*

3° *Este un operator de derivare, adică,*

$$\begin{aligned}
&\frac{d_V}{dt}(L + L') = \frac{d_V L}{dt} + \frac{d_V L'}{dt},\\
&\frac{d_V}{dt}(aL) = a\,\frac{d_V L}{dt}, \quad a \in R, \qquad (4.6)\\
&\frac{d_V}{dt}(L \cdot L') = \frac{d_V L}{dt} \cdot L' + L \cdot \frac{d_V L'}{dt}.
\end{aligned}$$

4° $\dfrac{d_V L}{dt} = \dfrac{dL}{dt}$, *pentru* $V^i = \dfrac{dx^i}{dt}$.

Demonstraţie.1° Utilizând transformările de coordonate locale, avem:

$$\frac{d_V}{dt} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dy^{(2)i}}{dt}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = \tilde{y}^{(1)i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} + 2\tilde{y}^{(1)i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(1)i}} + \frac{d\tilde{y}^{(2)i}}{dt}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^{(2)i}}.$$

Deci, $\dfrac{d_V}{dt}$ este invariant în raport cu o transformare de coordonate pe E.

2° Din 1° deducem $\dfrac{d_V \tilde{L}}{dt} = \dfrac{d_V L}{dt}$, pentru orice Lagrangian diferenţiabil de ordin 2.

3° Din forma lui $\dfrac{d_V}{dt}$ obţinem (4.6).

4° Dacă $V^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ şi cum în lungul curbei c avem

$$y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}, \quad y^{(2)i} = \frac{1}{2}\,\frac{d^2x^i}{dt^2},$$
$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\, y^{(1)i} + 2\,\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}}\, y^{(2)i} + \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}\,\frac{dy^{(2)i}}{dt},$$

rezultă $\dfrac{d_V L}{dt} = \dfrac{dL}{dt}$, pentru $V^i = \dfrac{dx^i}{dt}$. **q.e.d.**

Teorema precedentă ne îndreptăţeşte să numim operatorul $\dfrac{d_V}{dt}$ derivata totală în direcţia vectorului V^i.

Vom considera operatorii:

$$\overset{1}{I}_V = V^i\,\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}, \quad \overset{2}{I}_V = V^i\,\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dV^i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}.$$

Se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 4.7 *Operatorii de mai sus au următoarele proprietăţi:*

1° $\overset{1}{I}_V, \overset{2}{I}_V$ *sunt câmpuri vectoriale de-a lungul curbei c.*

2° $\overset{1}{I}_V(L), \overset{2}{I}_V(L)$ *sunt câmpuri scalare.*

3° $\overset{2}{I}_V = J\left(\dfrac{d_V}{dt}\right), \ \overset{1}{I}_V = J^2\left(\dfrac{d_V}{dt}\right).$

4° *Dacă* $V^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, *atunci* $\overset{1}{I}_V, \overset{2}{I}_V$ *sunt câmpurile vectoriale Liouville* $\overset{1}{\Gamma}$ *şi* $\overset{2}{\Gamma}$*,în lungul curbei c.*

Identitatea (4.5) conduce la următoarea teoremă:

Teorema 4.8 *În lungul oricărei curbe c în M, avem*

$$\frac{d_V L}{dt} = V^i\,\overset{0}{E}_i(L) + \frac{d}{dt}\,\overset{2}{I}_V(L) - \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dt^2}\,\overset{1}{I}_V(L). \tag{4.7}$$

Teorema 4.9 *Are loc* $\dfrac{d_V L}{dt} = 0$, *în lungul curbelor extremale a integralei acţiunii* $I(c)$, *dacă, şi numai dacă,* $\overset{2}{I}_V(L) - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\,\overset{1}{I}_V(L) = const.$ *în lungul curbei c.*

Utilizând (4.7), ultimul rezultat este imediat.

Corolar 4.1 *Pentru orice Lagrangian $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$, în lungul curbei netede c, avem*

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \overset{0}{E_i}(L) + \frac{d}{dt} \overset{2}{I}(L) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overset{1}{I}(L).$$

Corolar 4.2 *Dacă c este o soluţie a ecuaţiei Euler–Lagrange $\overset{0}{E_i}(L) = 0$, atunci L este constant în lungul curbei c dacă, şi numai dacă, $\overset{2}{I}(L) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overset{1}{I}(L) = const.$*

Covectori Craig–Synge

Pe lângă câmpul de covectori $\overset{0}{E_i}(L)$ există alte două câmpuri de covectori $\overset{1}{E_i}(L), \overset{2}{E_i}(L)$ asociaţi unui Lagrangian L diferenţiabil de ordinul 2. Ele au fost introduse de H.Craig şi J.Synge. Aceste câmpuri sunt frecvent utilizate în geometria Lagrangienilor regulaţi de ordin 2.

Să considerăm o curbă netedă $c : [0,1] \longrightarrow M$ şi în lungul extensiei ei $\tilde{c}$ următorii operatori, (de tip Euler-Lagrange):

$$\begin{aligned} &\overset{0}{E_i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}; \\ &\overset{1}{E_i} = -\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}; \ \overset{2}{E_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}. \end{aligned}$$

Principala proprietate a acestor operatori este dată de teorema:

Teorema 4.10 $\overset{\alpha}{E_i}(L)$, $(\alpha = 0, 1, 2)$ *sunt d–câmpuri de covectori.*

Într-adevăr, ţinând cont de teorema 4.5, $\overset{0}{E_i}(L)$ este un d–câmp de vectori. Evident, $\overset{2}{E_i}(L)$ are aceeaşi proprietate. Pentru $\overset{1}{E_i}(L)$, pe curba c, avem

$$\begin{aligned} &\overset{1}{E_i}(L) = -\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = -\frac{\partial \tilde{y}^{(1)j}}{\partial y^{(1)i}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(1)j}} - \frac{\partial \tilde{y}^{(2)j}}{\partial y^{(1)i}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(2)j}} + \\ &+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y^{(2)j}}\right) = -\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(1)j}} - \frac{\partial \tilde{y}^{(1)j}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(2)j}} + \frac{\partial \tilde{y}^{(1)j}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(2)j}} + \\ &+ \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(2)j}} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\left(-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(1)j}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{y}^{(2)j}}\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \overset{1}{\tilde{E}_j}(\tilde{L}). \end{aligned}$$

q.e.d.

În cazul general al Lagrangienilor diferenţiabili de ordin superior, teorema anterioară poate fi demonstrată, folosind următoarea lema:

Lema 4.2 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ şi orice funcţie diferenţiabilă $\phi(t), t \in [0,1]$, de-a lungul curbei c avem*

$$\overset{0}{E}_i(\phi L) = \phi \overset{0}{E}_i(L) + \frac{d\phi}{dt}\overset{1}{E}_i(L) + \frac{d^2\phi}{dt^2}\overset{2}{E}_i(L).$$

Demonstraţia este imediată, dacă remarcăm că

$$\frac{\partial(\phi L)}{\partial x^i} = \phi \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial(\phi L)}{\partial y^{(\alpha)i}} = \phi \frac{\partial(L)}{\partial y^{(\alpha)i}}, \quad (\alpha = 1, 2),$$

şi apoi aplicăm regula lui Leibniz.

Un alt rezultat este dat de:

Lema 4.3 *Dacă F este un Lagrangian diferenţiabil de ordin 2 având proprietatea $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(2)i}} = 0$, atunci au loc următoarele ecuaţii, de-a lungul curbei c:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^i},\\ &\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^{(1)i}}, \qquad (4.8)\\ &\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\frac{dF}{dt} = 2\frac{\partial F}{\partial y^{(1)i}}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, se obţine

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i}y^{(1)i} + 2\frac{\partial F}{\partial y^{(1)i}}y^{(2)i}, \; \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}y^{(1)j} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial y^{(1)j}}y^{(2)j}.$$

Deci, prima egalitate (4.8) rezultă imediat. În mod asemănător se arată şi celelalte două.

Teorema 4.11 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ şi orice funcţie $F(x, y^{(1)})$, de-a lungul curbei c avem*

$$\overset{0}{E}_i\left(L + \frac{dF}{dt}\right) = \overset{0}{E}_i(L).$$

Demonstraţie. Utilizând proprietatea $\overset{0}{E}_i\left(L + \dfrac{dF}{dt}\right) = \overset{0}{E}_i(L) + \overset{0}{E}_i\left(\dfrac{dF}{dt}\right)$ şi din lema precedentă, obţinem $\overset{0}{E}_i\left(\dfrac{dF}{dt}\right) = 0$.

Ultima teoremă poate fi formulată şi astfel:

Teorema 4.12 *Integralele* $I(c)=\int_0^1 L\,dt$ *şi* $I'(c)=\int_0^1\left(L+\frac{dF}{dt}\right)dt$ *au aceleaşi curbe extremale, pentru orice Lagrangian diferenţiabil F care are proprietatea* $\frac{\partial F}{\partial y^{(2)i}}=0$.

Bazându-ne pe lema 4.2, putem demonstra teorema:

Teorema 4.13 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil F, având proprietatea* $\frac{\partial F}{\partial y^{(2)i}}=0$, *au loc următoarele ecuaţii:*

$$\overset{0}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right)=0,\ \overset{1}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right)=-\overset{0}{E}_i(F),\ \overset{2}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right)=-\overset{1}{E}_i(F).$$

În consecinţă, are loc:

Corolar 4.3

a. *Dacă Lagrangianul F are proprietăţile* $\frac{\partial F}{\partial y^{(2)i}}=0,\ \overset{1}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right)=0$,

atunci: $\overset{0}{E}_i(F)=0$.

b. *Dacă Lagrangianul F are proprietatea* $\overset{2}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right)=0$, *atunci avem*

$\frac{\partial F}{\partial y^{(1)i}}=0$.

Energiile $\overset{1}{\mathcal{E}}_c(L),\ \overset{2}{\mathcal{E}}_c(L)$

Funcţia

$$\overset{2}{I}(L)-L=y^{(1)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}}+2y^{(2)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}-L$$

este un câmp scalar pe varietatea $E=\mathrm{Osc}^2M$ (nu numai în lungul curbei c). Aceasta extinde noţiunea clasică de energie. Totuşi nu este convenabilă pentru Lagrangieni $L(x,y^{(1)},y^{(2)})$ deoarece nu satisface legea de conservare.

Plecând de la problema variaţională, vom defini noţiunea de energie de ordin superior în lungul curbei $c:[0,1]\longrightarrow M$. Fie $\tilde{c}$ extensia la $\tilde{E}$ a curbei c.

Definiţia 4.1 Vom numi *energie de ordinul doi* pentru Lagrangianul diferenţiabil $L(x,y^{(1)},y^{(2)})$, de-a lungul curbei c, funcţia definită prin:

$$\overset{2}{\mathcal{E}}_c(L)=\overset{2}{I}(L)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overset{1}{I}(L)-L. \tag{4.9}$$

Această noţiune a fost introdusă şi studiată de M.de Leon, D.Krupka şi alţii. Ei au demonstrat legile de conservare pentru energia $\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)$.

Problema variaţională ne conduce la introducerea funcţiei:

$$\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L) = -\frac{1}{2}\overset{1}{I}(L), \tag{4.10}$$

numită energia de ordin 1 pentru Lagrangianul L. Bineînţeles, aceasta nu depinde de curba c. Această proprietate este foarte importantă în geometria Lagrangienilor de ordin 2.

Teorema 4.14 *Dacă Lagrangianul diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ satisface condiţiile Zermelo, atunci energiile $\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)$ şi $\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)$ sunt zero.*

Variaţia energiei de ordin doi este dată de teorema:

Teorema 4.15 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ de-a lungul unei curbe netede $c: [0,1] \to (x^i(t)) \in M$ variaţia energiei de ordin doi $\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)$ este dată de*

$$\frac{d\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)}{dt} = -\frac{dx^i}{dt}\overset{0}{E_i}(L). \tag{4.11}$$

Demonstraţie. Din (4.9) deducem

$$\frac{d\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)}{dt} = \frac{d\overset{2}{I}(L)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2\overset{1}{I}(L)}{dt^2} - \frac{dL}{dt} = -\frac{dx^i}{dt}\overset{0}{E_i}(L). \tag{4.12}$$

q.e.d.

Această teoremă are o consecinţă importantă:

Teorema 4.16 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$, energia de ordin doi, $\overset{2}{\mathcal{E}_c}(L)$, se conservă în lungul oricărei soluţii c a ecuaţiilor Euler–Lagrange $\overset{0}{E_i}(L) = 0$.*

Un rezultat asemănător poate fi stabilit pentru energia de ordin 1, $\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)$.

Teorema 4.17 *În lungul unei curbe c avem următoarea exprimare a variaţiei energiei de ordinul 1:*

$$\frac{d\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)}{dt} + \frac{1}{2}\overset{2}{I}(L) = -\frac{1}{2}\frac{dx^i}{dt}\overset{1}{E_i}(L). \tag{4.13}$$

Demonstraţie. Variaţia pe c a energiei $\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)$, se obţine din:

$$\begin{aligned}\frac{d\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)}{dt} &= -\frac{1}{2}\left\{2y^{(2)i}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} + y^{(1)i}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}\right\} = \\ &= -\frac{1}{2}\overset{2}{I}(L) - \frac{1}{2}\frac{dx^i}{dt}\overset{1}{E_i}(L).\end{aligned}$$

q.e.d.

În continuare putem enunţa corolarul:

Corolar 4.4 *În lungul curbelor c, soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale* $\overset{1}{E_i}(L) = 0$, *are loc ecuaţia:*

$$\frac{d\overset{1}{\mathcal{E}_c}(L)}{dt} = -\frac{1}{2}\overset{2}{I}(L).$$

5 Problema variaţională pentru Lagrangieni de ordin k.

Problema variaţională pentru mecanica Lagrangiană de ordin superior a fost studiată de R.Miron, M. Crampin, M. de Léon, D. Krupka, D. Grigore, K.Kondo şi alţii.

Vom studia în continuare Lagrangieni de tipul $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ utilizând teoria geometrică a fibratului k–osculator. Pentru aceasta vom urmări problema variaţională, covectorii Craig–Synge, energiile de ordin superior şi legile de conservare ale acestora.

Lagrangieni de ordin k. Condiţii Zermello

Un Lagrangian de ordin k, $(k \in N^*)$, este o aplicaţie $L : E = \mathrm{Osc}^k M \to R$. L se numeşte diferenţiabil dacă este de clasă C^∞ pe $\widetilde{E}$ şi continuu în punctele $(x, 0, y^{(2)}, ..., y^{(k)})$ ale varietăţii E.

Hessiana Lagrangianului diferenţiabil L, în raport cu $y^{(k)i}$, pe $\widetilde{E}$ are elementele $2g_{ij}$:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(k)i}\partial y^{(k)j}}.$$

$g_{ij}(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ este un d–câmp tensorial, covariant de ordin 2, simetric.

Derivatele Lie ale Lagrangianului diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ în raport cu câmpurile de vectori Liouville $\overset{1}{\Gamma}, ..., \overset{k}{\Gamma}$ ne dau scalarii

$$I^1(L) = \pounds_{\overset{1}{\Gamma}} L, ..., I^k(L) = \pounds_{\overset{k}{\Gamma}} L.$$

Datorită importanţei lor în această teorie, aceştia se vor numi invarianţi principali ai Lagrangianului L şi se exprimă astfel:

$$\begin{cases} I^1(L) = y^{(1)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(k)i}}, I^2(L) = y^{(1)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(k-1)i}} + 2y^{(2)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(k)i}}, ..., \\ I^k(L) = y^{(1)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} + \cdots + ky^{(k)i}\dfrac{\partial L}{\partial y^{(k)i}} \end{cases}$$

Să considerăm curba netedă parametrizată $c : [0,1] \longrightarrow M$ reprezentată pe un domeniu de hartă locală prin $x^i = x^i(t), t \in [0,1]$. Extensia acesteia $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{E}$ este dată de:

$$x^i = x^i(t),\ y^{(1)i} = \frac{1}{1!}\frac{dx^i}{dt}(t), \cdots, y^{(k)i} = \frac{1}{k!}\frac{d^k x^i}{dt^k}(t),\ t \in [0,1].$$

Integrala acţiunii pentru $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ este

$$I(c) = \int_0^1 L(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, ..., \frac{1}{k!}\ \frac{d^k x(t)}{dt^k})dt. \tag{5.1}$$

Se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 5.1 *Pentru ca integrala acţiunii $I(c)$ să nu depindă de parametrizarea curbei c este necesar să fie satisfăcute*

$$I^1(L) = \cdots = I^{k-1}(L) = 0,\ I^k(L) = L. \tag{5.2}$$

Condiţiile (5.2) se numesc condiţiile Zermello.

Exact ca în paragraful precedent avem:

Teorema 5.2 *Spaţiile Lagrange $L^{(k)n}$, $k > 2$, care satisfac condiţiile Zermelo sunt singulare.*

Teorema 5.3 *Nu există spaţii Finsler $F^{(k)n}$, $k > 2$, care satisfac condiţiile Zermelo.*

Problema variaţională

Vom studia problema variaţională ca o extindere naturală a teoriei din capitolul precedent.

Fie $c : [0,1] \longrightarrow M$ o curbă şi $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow E$ extensia acesteia la $\mathrm{Osc}^k M$. Pe un deschis U considerăm curbele

$$c_\varepsilon : t \in [0,1] \longrightarrow (x^i(t) + \varepsilon V^i(t)) \in M,$$

unde ε este un număr real, suficient de mic în valoare absolută pentru ca $\operatorname{Im} c_\varepsilon \subset U$, $V^i(t) = V^i(x(t))$ fiind un câmp de vectori regulaţi pe U, restricţionat la curba c. Presupunem că toate curbele c_ε au aceleaşi extremităţi $c(0)$ şi $c(1)$ ca şi curbele c şi că spaţiile lor osculatoare de ordin $1, ..., k-1$ coincid în $c(0)$ şi $c(1)$. Aceasta înseamnă:

$$V^i(0) = V^i(1),\ \frac{d^\alpha V^i}{dt^\alpha}(0) = \frac{d^\alpha V^i}{dt^\alpha}(1),\ (\alpha = 1, ..., k-1).$$

Integrala acţiunii $I(c_\varepsilon)$ pentru Lagrangianul $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ este următoarea:

$$I(c_\varepsilon) = \int_0^1 L(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}, ..., \frac{1}{k!}(\frac{d^k x}{dt^k} + \varepsilon \frac{d^k V}{dt^k}))dt.$$

O condiţie necesară pentru ca $I(c)$ să fie a o valoare extremală a lui $I(c_\varepsilon)$ este ca:

$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{5.3}$$

Avem
$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon}[L(x + \varepsilon V, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}, ..., \frac{1}{k!}(\frac{d^k x}{dt^k} + \varepsilon \frac{d^k V}{dt^k}))]dt$$
iar dezvoltarea Taylor a lui L în punctul $\varepsilon = 0$ conduce la

$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 (\frac{\partial L}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} \frac{dV^i}{dt} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}} \frac{d^k V^i}{dt^k})dt.$$

Înlocuind

$$I_V^1(L) = V^i \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}},\ I_V^2(L) = V^i \frac{\partial L}{\partial y^{(k-1)i}} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}}, ...,$$
$$I_V^k(L) = V^i \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} V^i}{dt^{k-1}} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}}$$

şi

$$\overset{\circ}{E}_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}}$$

obţinem o identitate foarte importantă:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} \frac{dV^i}{dt} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}} \frac{d^k V^i}{dt^k} = \\ &= \overset{\circ}{E}_i(L) V^i + \frac{d}{dt} I_V^k(L) - \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} I_V^{k-1}(L) + \cdots + \\ &+ (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} I_V^1(L). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Din presupunerile făcute avem:

$$I_V^\alpha(L)(c(0)) = I_V^\alpha(L)(c(1)) = 0, \ (\alpha = 1, ..., k).$$

În consecinţă putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} &= \int_0^1 \overset{\circ}{E}_i (L)V^i dt + \int_0^1 \frac{d}{dt}\{I_V^k(L) - \\ &-\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}I_V^{k-1}(L) + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}I_V^1(L)\}dt \end{aligned}$$

şi din relaţia anterioară ne rezultă

$$\frac{dI(c_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \overset{\circ}{E}_i (L)V^i dt.$$

Ţinând cont că V^i este un câmp arbitrar de vectori, ultima relaţie conduce la teorema:

Teorema 5.4 *Pentru ca integrala acţiunii $I(c)$ să fie valoare extremală pentru funcţionalele $I(c_\varepsilon)$ este necesar să aibă loc următoarele ecuaţii Euler–Lagrange:*

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{E}_i (L) := \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + (-1)\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}} = 0 \\ &y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}, ..., y^{(k)i} = \frac{1}{k!}\frac{d^k x^i}{dt^k}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Curbele $c : [0,1] \longrightarrow M$, soluţii ale ecuaţiilor (5.5) se numesc curbe extremale pentru integrala acţiunii $I(c)$.

Teorema 5.5 $\overset{\circ}{E}_i (L)$ *este un d–câmp de covectori.*

Operatorii $\frac{d_V}{dt}, I_V^1, ..., I_V^k$.

Fie $c : t \in [0,1] \to M$ o curbă netedă, $\tilde{c}$ extensia la $\mathrm{Osc}^k M$ şi $V^i(x^i(t))$ un câmp vectorial diferenţiabil în lungul curbei c.

Se poate demonstra lema:

Lema 5.1 *Transformarea $S_V : c \longrightarrow \mathrm{Osc}^k M$, definită prin*

$$\begin{aligned} &x^i = x^i(t), \ t \in [0,1] \\ &y^{(1)i} = V^i(x(t)), 2y^{(2)i} = \frac{dV^i}{dt}, ..., ky^{(k)i} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}V^i}{dt^{k-1}} \end{aligned}$$

este o secţiune a proiecţiei $\pi : \mathrm{Osc}^k M \longrightarrow M$ de-a lungul curbei c.

Egalitatea (5.4) sugerează introducerea următorului operator în lungul curbei c:

$$\frac{d_V}{dt} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{d^k V^i}{dt^k} \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}. \tag{5.6}$$

Importanţa acestui operator rezultă din:

Teorema 5.6 *Operatorul* $\frac{d_V}{dt}$ *are următoarele proprietăţi:*

1° *Este invariant la transformările de coordonate.*

2° *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil* $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$, $\frac{d_V L}{dt}$ *este un câmp scalar.*

3° $\frac{d_V}{dt}$ *se comportă ca un operator de derivare, adică*

$$\frac{d_V(L+L')}{dt} = \frac{d_V L}{dt} + \frac{d_V L'}{dt}, \ \frac{d_V}{dt}(aL) = a\frac{d_V L}{dt}, \ a \in R,$$
$$\frac{d_V}{dt}(L \cdot L') = \frac{d_V L}{dt} \cdot L' + L \cdot \frac{d_V L'}{dt}.$$

4° *Dacă* $V^i = \frac{dx^i}{dt}$, *atunci*

$$\frac{d_V L}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i} y^{(1)i} + 2\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} y^{(2)i} + \cdots + $$
$$+k\frac{\partial L}{\partial y^{(k-1)i}} y^{(k)i} + \frac{\partial L}{\partial y^{(k)i}} \frac{dy^{(k)i}}{dt}$$
$$y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}, ..., y^{(k)i} = \frac{1}{k!} \frac{d^k x^i}{dt^k}.$$

În continuare, $\frac{d_V}{dt}$ se va numi derivata totală în direcţia câmpului vectorial V^i.

Să considerăm operatorii:

$$\begin{aligned} I_V^1 &= V^i \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}, I_V^2 = V^i \frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}, ..., \\ I_V^k &= V^i \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} V^i}{dt^{k-1}} \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Teorema 5.7 *Au loc următoarele proprietăţi:*

1° $I_V^1, ..., I_V^k$ *sunt câmpuri vectoriale în lungul curbei* c.

2° $I_V^k = J(\frac{d_V}{dt}), I_V^{k-1} = J(I_V^k), ..., I_V^1 = J(I_V^2), 0 = J(I_V^1)$.

3° $I_V^1(L), ..., I_V^k(L)$ *sunt scalari.*

4° *Dacă* $V^i = \frac{dx^i}{dt}$, *atunci* $I_V^1, ..., I_V^k$ *sunt câmpurile vectoriale Liouville* $\overset{1}{\Gamma}, ..., \overset{k}{\Gamma}$ *de-a lungul curbei c.*

În final, identitatea (5.4) capătă o nouă formă:

Teorema 5.8 *În lungul unei curbe c pe varietatea M vom avea:*

1°
$$\frac{d_V L}{dt} = V^i \overset{\circ}{E}_i (L) + \frac{d}{dt} I_V^k(L) - \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2} I_V^{k-1}(L) + \cdots + +(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} I_V^1(L).$$

2° *Dacă* $V^i = \frac{dx^i}{dt}$ *atunci:*

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \overset{\circ}{E}_i (L) + \frac{d}{dt} I^k(L) - \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2} I_V^{k-1}(L) + \cdots + +(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} I^1(L).$$

Corolar 5.1 *Lagrangianul* $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ *este constant în lungul curbelor extremale c ale integralei acţiunii* $I(c)$ *dacă, şi numai dacă, în lungul acestei curbe avem*

$$I^k(L) - \frac{1}{2!}\frac{dI^{k-1}(L)}{dt} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}I^1(L)}{dt^{k-1}} = const.$$

Covectori Craig–Synge

Câmpului de covectori $\overset{\circ}{E}_i (L)$ îi vom asocia, în lungul curbei netede c, alte câmpuri de covectori $\overset{1}{E}_i (L), ..., \overset{k}{E}_i (L)$ introduse de Craig şi Synge.

Vom considera curba netedă $c : [0, 1] \longrightarrow M$ şi în lungul lui c operatorii

$$\overset{\circ}{E}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}},$$
$$\overset{1}{E}_i = \sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\binom{\alpha}{\alpha-1}\frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}}\frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}},$$
$$\overset{2}{E}_i = \sum_{\alpha=2}^{k}(-1)^{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\binom{\alpha}{\alpha-2}\frac{d^{\alpha-2}}{dt^{\alpha-2}}\frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}},$$
....
$$\overset{k}{E}_i = (-1)^{\alpha}\frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}},$$

Vom arăta că $\overset{1}{E}_i(L), ..., \overset{k}{E}_i(L)$ sunt d–câmpuri de covectori.

Pentru aceasta, vom da mai întâi lema:

Lema 5.2 *Pentru orice Lagrangian diferenţiabil $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ şi orice funcţie diferenţiabilă $\phi(t)$ în lungul curbei c avem*

$$\overset{\circ}{E}_i(\phi L) = \phi \overset{\circ}{E}_i(L) + \frac{d\phi}{dt}\overset{1}{E}_i(L) + \cdots + \frac{d^k\phi}{dt^k}\overset{k}{E}_i(L).$$

Ca în capitolul precedent, se demonstrează teoremele:

Teorema 5.9 *Pentru orice Lagrangian $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$, diferenţiabil în lungul unei curbe netede c, $\overset{1}{E}_i(L), ..., \overset{k}{E}_i(L)$ sunt d–câmpuri de covectori.*

Teorema 5.10 *Pentru orice Lagrangiani diferenţiabili $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ şi $F(x, y^{(1)}, ..., y^{(k-1)})$, în lungul unei curbe netede c, avem*

$$\overset{\circ}{E}_i\left(L + \frac{dF}{dt}\right) = \overset{\circ}{E}_i(L), \ \overset{\circ}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0,$$
$$\overset{1}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\overset{\circ}{E}_i(F), ..., \overset{k}{E}_i\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\overset{k-1}{E}_i(F).$$

Teorema 5.11 *Integralele acţiunii*

$$\begin{aligned} I(c) &= \int_0^1 L\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{1}{k!}\frac{d^kx}{dt^k}\right)dt \\ I'(c) &= \int_0^1 \left[L\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{1}{k!}\frac{d^kx}{dt^k}\right) + \right. \\ &+ \left.\frac{dF}{dt}\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right)\right]dt \end{aligned}$$

au aceleaşi curbe extremale, pentru orice Lagrangian diferenţiabil F cu proprietatea $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(k)i}} = 0$.

Energii de ordin superior

Am introdus în capitolul anterior, energiile de ordin superior pentru Lagrangieni de ordinul 2 şi vom extinde această teorie la Lagrangieni de ordin $k > 2$.

Definiţia 5.1 Vom numi energii de ordin $k, k-1, ..., 1$ ale Lagrangianului $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$, în raport cu curba c, următorii invarianţi:

$$
(5.8)\quad
\begin{aligned}
\mathcal{E}_c^k(L) &= I^k(L) - \frac{1}{2!}\frac{dI^{k-1}(L)}{dt} + \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}I^1(L)}{dt^{k-1}} - L, \\
\mathcal{E}_c^{k-1}(L) &= -\frac{1}{2!}I^{k-1}(L) + \frac{1}{3!}\frac{dI^{k-2}(L)}{dt} + \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-2}I^1(L)}{dt^{k-2}}, \\
\mathcal{E}_c^{k-2}(L) &= \frac{1}{3!}I^{k-2}(L) - \frac{1}{4!}\frac{d}{dt}I^{k-3}(L) + \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-3}I^1(L)}{dt^{k-3}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}_c^1(L) &= (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}I^1(L).
\end{aligned}
$$

Evident, aceşti invarianţi depind de curba c. Avem un prim rezultat:

Propoziţia 5.1 *Au loc identităţile:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_c^k(L) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c^{k-1}(L) &= I^k(L) - L \\
\mathcal{E}_c^{k-1}(L) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c^{k-2}(L) &= -\frac{1}{2}I^{k-1}(L) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}_c^2(L) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c^1(L) &= (-1)^{k-2}\frac{1}{(k-1)!}I^2(L).
\end{aligned}
$$

Un rezultat important a fost obţinut de Andreas şi M. de Léon :

Teorema 5.12 *Pentru orice Lagrangian $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$ de-a lungul unei curbe netede $c : [0,1] \longrightarrow (x^i(t)) \in M$ avem*

$$\frac{d\mathcal{E}_c^k(L)}{dt} = -\overset{\circ}{E}_i(L)\frac{dx^i}{dt}.$$

Demonstraţie.Într-adevăr, din (5.7), obţinem

$$\frac{d\mathcal{E}_c^k(L)}{dt} = \frac{d}{dt}\{I^k(L) - \frac{1}{2!}\frac{dI^{k-1}(L)}{dt} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}I^1(L)}{dt^{k-1}}\} - \frac{dL}{dt}.$$

Înlocuind $\dfrac{dL}{dt}$ din teorema 5.6 şi efectuând calculele obţinem relaţia din enunţ.

O consecinţă imediată a ultimei teoreme este următoarea lege de conservare:

Teorema 5.13 *Pentru orice Lagrangian $L(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)})$, energia de ordin k, $\mathcal{E}_c^k(L)$ se conservă în lungul fiecărei curbe care este soluţie a ecuaţiilor Euler–Lagrange $\overset{\circ}{E}_i(L) = 0$.*

6 Problema variaţională în cazul spaţiilor Finsler de ordinul k.

Considerând un spaţiu Finsler de ordin $k \geq 1$, $F^{(k)n} = (M, F)$ să notăm faptul că F^2 este un Lagrangian regulat de ordin k. Prin urmare putem să aplicăm teoria spaţiilor Lagrange de ordin superior $L^{(k)n} = (M, F^2)$. Astfel, pentru o curbă $c : [0,1] \to M$, $Im\ c\ \subset U$, considerăm funcţionala:

$$I(c) = \int_0^1 F^2(x(t), .., \frac{1}{k!}\frac{d^k x}{dt^k})dt. \tag{6.1}$$

şi ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{E}_i (F^2) \overset{def}{=} \dfrac{\partial F^2}{\partial x^i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F^2}{\partial y^{(1)i}} + (-1)^k \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k}{dt^k}\dfrac{\partial F^2}{\partial y^{(k)i}} = 0 \\ y^{(1)i} = \dfrac{dx^i}{dt}, ..., y^{(k)i} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k x^i}{dt^k} \end{cases} \tag{6.2}$$

$\overset{\circ}{E}_i (F^2)$ este un d-câmp vectorial. Dacă luăm $L = \Phi(t)F^2$ unde $\Phi(t)$ este o funcţie arbitrară, atunci pentru Lagrangianul L avem

$$\overset{\circ}{E}_i (\Phi F^2) = \Phi \overset{\circ}{E}_i (F^2) + \frac{d\Phi}{dt} \overset{1}{E}_i (F^2) + ... + \frac{d^k\Phi}{dt^k} \overset{k}{E}_i (F^2). \tag{6.3}$$

Aici $\overset{1}{E}_i (F^2), .., \overset{k}{E}_i (F^2)$ sunt covectorii Craig-Synge. Ecuaţia diferenţială $\overset{k-1}{E}_i (F^2) = 0$ este foarte importantă pentru geometria lui $F^{(k)n}$.

Teorema 6.1 *Ecuaţia* $\overset{k-1}{E}_i (F^2) = 0$ *determină un k-semispray S având coeficienţii, dependenţi doar de funcţia fundamentală F :*

$$(k+1)G^i = \frac{1}{2}g^{ij}[\Gamma\frac{\partial F^2}{\partial y^{(k)j}} - \frac{\partial F^2}{\partial y^{(k-1)j}}] \tag{6.4}$$

Γ *fiind operatorul (2.8), Cap.I.*

S se va numi k-semisprayul canonic. El conduce la determinarea "conexiunii neliniare Cartan" pentru spaţiul $F^{(k)n}$.

Teorema 6.2 *În spaţiul Finsler de ordin superior $F^{(k)n}$ există conexiuni neliniare determinate numai de funcţia fundamentală F. Una din acestea coeficienţii duali (7.6)(Cap.I.) în care S este k-semisprayul canonic al lui $F^{(k)n}$.*

Această conexiune neliniară N, se va numi conexiunea neliniară Cartan a spaţiului $F^{(k)n}$.

Pentru $k = 1$, N este exact conexiunea neliniară Cartan a spaţiului $F^{(1)n}$.

Teorema 6.3 *Curbele autoparalele ale conexiunii neliniare Cartan N ale spaţiului $F^{(k)n}$ sunt date de următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:*

$$\frac{dx^i}{dt} = y^{(1)i}, .., \frac{1}{k!}\frac{d^k x^i}{dt^k} = y^{(k)i}$$

$$\frac{\delta y^{(1)i}}{dt} = ... = \frac{\delta y^{(k)i}}{dt} = 0.$$

CAPITOLUL 3

N-conexiunea liniară. Conexiuni Vrănceanu şi Berwald.

1 Conexiuni liniare pe $Osc^k M$. Caracterizări ale N-conexiunii liniare.

Un rol deosebit în geometria fibratului k-osculator îl au conexiunile liniare care păstrează prin paralelism suma directă (5.2), Cap.1. Acestea au fos introduse şi studiate de R.Miron în [49] şi se numesc N-conexiuni liniare. În această secţiune vom introduce noţiunea de N-conexiune liniară pe spaţiul total E=$Osc^k M$ al fibratului k-osculator.

Vom da o nouă caracterizare a N-conexiunii liniare utilizând k-structura tangentă şi k-structura aproape de contact ale conexiunii neliniare N.

Avantajul considerării acestei conexiuni liniare rezultă din faptul că, în baza adaptată, coeficienţii acestei conexiuni sunt obiecte geometrice destul de simple, uşor de găsit în majoritatea cazurilor.

Definiţia 1.1 *O conexiune liniară D pe $Osc^k M$ se numeşte N–conexiune liniară dacă satisface proprietăţile:*

1. D păstrează prin paralelism distribuţia orizontală N;

2. k-structura tangentă J este absolut paralelă în raport cu D.

Deoarece $J(N_\alpha) = N_{\alpha+1}$ $\forall \alpha \in \{0, ..., k-2\}$ şi $J(N_{k-1}) = V_k$, se obţine imediat că o N-conexiune liniară D pe $Osc^k M$ păstrează prin paralelism toate distribuţiile n-dimensionale $N_0, N_1, ..., N_{k-1}, V_k$. Ţinând cont că un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(E)$

poate fi scris în mod unic, în raport cu descompunerea (5.2) Cap.1, sub forma

$$X = X^H + X^{V_1} + \cdots X^{V_k},$$

în care $X^H = hX$, $X^{V_\alpha} = v_\alpha X$, h şi v_α fiind proiectorii determinaţi de distribuţiile suplementare $N_0, N_1, ..., V_k$, putem afirma:

Teorema 1.1 *O conexiune liniară D de pe varietatea E este o N–conexiune liniară dacă şi numai dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi:*

$$(D_X Y^H)^{V_\alpha} = 0, \ (D_X Y^{V_\alpha})^H = 0, \ (D_X Y^{V_\alpha})^{V_\beta} = 0, \quad (\alpha \neq \beta, \ \alpha, \beta = 1, ..., k) \tag{1.1}$$

$$D_X(JY^H) = J(D_X Y^H), \ D_X(JY^{V_\alpha}) = JD_X Y^{V_\alpha}, \ (\alpha = 1, ..., k) \tag{1.2}$$

pentru orice câmpuri vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(E)$.

Demonstraţie. Dacă D este o N–conexiune liniară, atunci avem

$$(D_X J)(Y) = D_X(JY) - J(D_X Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(E).$$

Punând în ultima ecuaţie $Y = Y^H$ sau $Y = Y^{V_\alpha}$, $(\alpha = 1, .., k)$ obţinem (1.2). Deasemeni, din faptul că $D_X Y^H \in N_0$ pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}(E)$ rezultă $(D_X Y^H)^{V_\alpha} = 0$, $(\alpha = 1, .., k)$. Dacă luăm $Y^{V_1} = J(Y^H)$, deducem că $D_X Y^{V_1} = J(D_X Y^H) \in N_1$. Aceasta implică $(D_X Y^{V_1})^H = 0$ şi $(D_X Y^{V_1})^{V_\alpha} = 0$, $(\alpha = 1, .., k)$. Analog, obţinem $(D_X Y^{V_\alpha})^H = (D_X Y^{V_\alpha})^{V_\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, .., k)$. Invers, ecuaţiile (1.2) ne dau $(D_X J)(Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{X}(E)$ şi prima relaţie din (1.1) implică $D_X Y^H \in N_0$ pentru orice câmpuri vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(E)$. **q.e.d.**

În continuare vom da o caracterizare a unei N–conexiuni liniare cu ajutorul k-structurii tangente şi a aproape k-structurii de contact.

O aplicaţie $\mathcal{F}(Osc^k M)$-liniară, $\mathbf{F}_\alpha : \mathcal{X}(Osc^k M) \longrightarrow \mathcal{X}(Osc^k M)$ dată prin:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\delta}{\delta x^i}) = -\dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} \\ \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}}) = \dfrac{\delta}{\delta x^i} \\ \cdots \\ \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\delta}{\delta y^{(1)i}}) = \cdots = \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha-1)i}}) = \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha+1)i}}) = \cdots = \mathbf{F}_\alpha(\dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}}) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

se numeşte *structură aproape de k-contact*, pentru $\forall \alpha \in \{1, ..., k\}$.

Teorema 1.2 1°. *Fiecare structură de aproape k-contact* $\mathbf{F}_\alpha$ *este un câmp tensorial de tip (1,1) global definit pe* $E = Osc^k M$ *şi avem*

$$\mathbf{F}_\alpha = -\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} \otimes dx^i + \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^{(\alpha)i}, \quad (\alpha = 1, .., n). \tag{1.3)'$$

2°. *Fiecare structură* $\mathbf{F}_\alpha$ *depinde numai de conexiunea neliniară N.*

Demonstraţie.1°. Evident $\mathbf{F}_\alpha$ din (1.3)' este câmp tensorial de tip (1,1) pe E. 2°. Cum baza adaptată $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}})$ şi baza adaptată $(dx^i, \delta y^{(\alpha)i})$ depind numai de N, rezultă din (1.3)' că aceeaşi proprietate o are şi $\mathbf{F}_\alpha$, $\alpha = 1, .., n$. **q.e.d.**

Dacă exprimăm N–conexiunea liniară în baza adaptată (5.4), Cap.1, şi ţinem cont de proprietăţile 1. şi 2. din definiţie, obţinem că D este perfect determinată de un set de $k+1$ coeficienţi $(L^i_{jh}, \underset{(1)}{C^i_{jh}}, \cdots, \underset{(k)}{C^i_{jh}})$, după cum urmează:

$$\begin{cases} D_{\frac{\delta}{\delta x^h}} \dfrac{\delta}{\delta x^j} = L^i_{jh} \dfrac{\delta}{\delta x^i} \\ D_{\frac{\delta}{\delta x^h}} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}} = L^i_{jh} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} \\ D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}}} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}} = \underset{(\alpha)}{C^i_{jh}} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}}, \quad (\alpha = 1, .., k, \quad \beta = 0, .., k) \end{cases} \tag{1.4}$$

unde $\dfrac{\delta}{\delta y^{(0)i}} = \dfrac{\delta}{\delta x^i}$ şi $\dfrac{\delta}{\delta y^{(k)i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^{(k)i}}$.

Se remarcă faptul că L^i_{jh} au aceeaşi lege de transformare în raport cu schimbarea de coordonate locale (1.5) Cap.1, ca şi coeficienţii locali ai unei conexiuni liniare pe varietatea bază M. Coeficienţii verticali $(\underset{(\alpha)}{C^i_{jh}})_{\alpha=\overline{1,..,k}}$ sunt câmpuri tensoriale distinse de tip (1,2) de pe E.

Teorema 1.3 *În raport cu o schimbare de coordonate locale (1.5), coeficienţii unei N–conexiuni liniare se transformă după regulile:*

$$\begin{aligned} &\widetilde{L}^i{}_{rs} \frac{\partial \widetilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \widetilde{x}^s}{\partial x^h} = L^r{}_{jh} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^h}, \\ &\underset{(\alpha)}{\widetilde{C}^i}{}_{rs} \frac{\partial \widetilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \widetilde{x}^s}{\partial x^h} = \underset{(\alpha)}{\widetilde{C}^r}{}_{jh} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^r}, \quad (\alpha = 1, ..., k). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Avem următoarea propoziţie, importantă în aplicaţii:

Propoziţia 1.1 *Dacă conexiunea liniară D pe Osc^kM este o N–conexiune liniară, adică D are proprietăţile:*

1. D păstrează prin paralelism distribuţia orizontală N;

2. k-structura tangentă J este paralelă în raport cu D,

atunci fiecare din structurile aproape de k-contact $\mathbf{F}_1, .., \mathbf{F}_k$ sunt absolut paralele în raport cu D, adică

3. $D\mathbf{F}_1 = D\mathbf{F}_2 = \cdots = D\mathbf{F}_{k-1} = 0$ şi

4. $D\mathbf{F}_k = 0$.

Demonstraţie.

Demonstraţia se bazează pe calcul direct în baza adaptată.

$$(D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}\mathbf{F}_\alpha)\frac{\delta}{\delta x^j} = D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}(\mathbf{F}_\alpha \frac{\delta}{\delta x^j}) - \mathbf{F}_\alpha(D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}\frac{\delta}{\delta x^j}) =$$

$$= D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}(-\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}) - \mathbf{F}_\alpha(\underset{(\beta)}{C^i_{jh}}\frac{\delta}{\delta x^i}) = = -\underset{(\beta)}{C^i_{jh}}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} + \underset{(\beta)}{C^i_{jh}}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} = 0.$$

Analog, se arată

$$(D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}\mathbf{F}_\alpha)\frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)j}} = 0, \quad \forall \alpha, \beta = 1, .., k; \quad \gamma = 0, .., k$$

unde $\dfrac{\delta}{\delta y^{(0)i}} = \dfrac{\delta}{\delta x^i}$.

Astfel, $D\mathbf{F}_\alpha = 0, \quad \forall \alpha = 1, .., k$. **q.e.d.**

Observaţie. Teorema mai poate fi demonstrată arătând direct că fiecare câmp tensorial $\mathbf{F}_\alpha$ din (1.3)' este absolut paralel.

Vom arăta acum că au loc şi reciprocele acestei propoziţii, ceea ce pune în evidenţă noi caracterizări pentru N-conexiunea liniară.

O primă reciprocă:

Teorema 1.4 *Fie conexiunea liniară D pe Osc^kM. Dacă aceasta satisface proprietăţile:*

2. k-structura tangentă J este paralelă în raport cu D;

3. $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_{k-1}$ sunt paralele în raport cu D;

atunci

1. D păstrează prin paralelism distribuţia orizontală N.

Demonstraţie. Fie conexiunea liniară D dată de

$$(1.6)\quad \begin{cases} D_{\frac{\delta}{\delta x^h}} \dfrac{\delta}{\delta x^j} = \overset{(00)}{L}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta x^i} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{k} \overset{(0\beta)}{L}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}} \\ D_{\frac{\delta}{\delta x^h}} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}} = \overset{(\alpha 0)}{L}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta x^i} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{k} \overset{(\alpha\beta)}{L}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}}, \quad \alpha = 1,..,k \end{cases}$$

$$(1.6)'\quad \begin{cases} D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)h}}} \dfrac{\delta}{\delta x^j} = \underset{(\gamma)}{\overset{(00)}{C}}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta x^i} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{k} \underset{(\gamma)}{\overset{(1\beta)}{C}}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}} \\ D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)h}}} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}} = \underset{(\gamma)}{\overset{(\alpha 0)}{C}}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta x^i} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{k} \underset{(\gamma)}{\overset{(\alpha\beta)}{C}}{}^{i}_{jh} \dfrac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}}, \quad \alpha, \gamma = 1,..,k. \end{cases}$$

Folosind relaţia $D\mathbf{F}_\alpha = 0$ obţinem

$$-[\overset{(\alpha 0)}{L}{}^{i}_{jh} \frac{\delta}{\delta x^i} + \overset{(\alpha 1)}{L}{}^{i}_{jh} \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \cdots + \overset{(\alpha k)}{L}{}^{i}_{jh} \frac{\delta}{\delta y^{(k)i}}] = \overset{(0\alpha)}{L}{}^{i}_{jh} \frac{\delta}{\delta x^i} - \overset{(00)}{L}{}^{i}_{jh} \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}}.$$

Avem

$$\begin{cases} \overset{(00)}{L}{}^{i}_{jh} = \overset{(\alpha\alpha)}{L}{}^{i}_{jh}, \\ \overset{(0\alpha)}{L}{}^{i}_{jh} = -\overset{(\alpha 0)}{L}{}^{i}_{jh}, \\ \overset{(\alpha\beta)}{L}{}^{i}_{jh} = 0, \quad \forall \alpha = 1,..,k-1,\ \forall \beta = 2,..,k-1,\ j \neq \alpha. \end{cases}$$

Condiţiile $\overset{(kk)}{L}{}^{i}_{jh} = \overset{(\alpha\alpha)}{L}{}^{i}_{jh}$ şi $\overset{(\alpha k)}{L}{}^{i}_{jh} = \overset{(k\alpha)}{L}{}^{i}_{jh} = 0$, $\forall \alpha = 1,..,k-1$ conduc la $DJ = 0$.

Astfel am obţinut forma dată în formula (1.4). Analog, din (1.6)', se obţine formula (1.4)'. **q.e.d.**

Pentru cea de-a doua reciprocă, vom vedea că nu este suficient să avem $D\mathbf{F}_1 = = D\mathbf{F}_2 = D\mathbf{F}_{k-1} = 0$. Este necesară o condiţie în plus, $D\mathbf{F}_k = 0$, pentru a obţine paralelismul k-structurii tangente J în raport cu D.

Un nou rezultat este determinat de teorema următoare:

Teorema 1.5 *Dacă o conexiune liniară D pe $Osc^k M$ are proprietăţile:*

1. D păstrează prin paralelism distribuţia orizontală N;

3. Aproape k-structura de contact $\mathbf{F}_\alpha$, $(\alpha = 1,..,k-1)$, este paralelă în raport cu D;

4. $D\mathbf{F}_k = 0$,

atunci:

2. k-structura tangentă J este paralelă în raport cu D.

Demonstraţie. Dacă pornim cu conexiunea liniară D din (1.6) şi (1.6)' şi ţinem cont de condiţia 1. atunci se obţine: $\overset{(\alpha\beta)}{L}{}^{i}_{jh} = 0, \forall\alpha,\ \beta = 1, .., k, \alpha \neq \beta$. Condiţiile 3. şi 4. implică $\overset{(00)}{L}{}^{i}_{jh} = \overset{(\alpha\alpha)}{L}{}^{i}_{jh}, \forall\alpha = 2, .., k$. Analog, se obţine $\underset{(\gamma)}{\overset{(\alpha\beta)}{C}}{}^{i}_{jh} = 0$ şi $\underset{(\gamma)}{\overset{(00)}{C}}{}^{i}_{jh} = \underset{(\gamma)}{\overset{(\alpha\ \alpha)}{C}}{}^{i}_{jh}, \forall\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, .., k.$

q.e.d.

2 Conexiuni liniare induse de o conexiune neliniară în geometria de ordin doi.

Noţiunea de varietate neolonomă (distribuţie, conexiune) a fost introdusă de Gh.Vrănceanu în 1926, [88], în ideea de a geometriza sistemele mecanice neolonome. Acest concept a fost folosit în teoria fibratelor de jeturi de către Ch. Ehresman, [31]. După aceea, noţiunea a fost utilizată de G.Catz, M.Crampin, M. de Leon, W.Sarlet, J.F.Carinena şi alţii. R.Miron şi colaboratorii acestuia au dat o atenţie deosebită acestui concept, identificându-l cu cel de conexiune neliniară pe $E = Osc^k M$. O primă motivaţie pentru a studia noţiunea de varietate neolonomă este dată de ecuaţiile diferenţiale. După cum ştim, o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea (SODE) sau un semispray determină o conexiune neliniară pe fibratul tangent a unei varietăţi. Unei astfel de conexiuni neliniare i se poate asocia o conexiune liniară pe fibratul tangent, numită conexiunea Berwald. Această conexiune este des folosită în geometria Finsler,[50]. E.Martinez şi J.F.Carinena, [46], au folosit conexiunea Berwald în studiul liniarizării SODE. Condiţiile Helmotz pentru Problema Inversă a mecanicii Lagrangiene a fost studiată de Santilli, Crampin, [25], şi alţii, în manieră geometrică, utilizând conexiunea Berwald. În acest paragraf vom defini conexiunea Berwald în cazul fibratului osculator $Osc^2 M$.

Având un semispray pe $Osc^2 M$ (sau o ecuaţie diferenţială de ordin trei), se poate obţine o conexiune neliniară. Pentru această conexiune neliniară vom construi conexiunea Berwald şi vom vedea că aceasta păstrează prin paralelism distribuţiile orizontale şi verticale, deci este o d-conexiune liniară.

Pentru o conexiune liniară arbitrară pe $Osc^2 M$ şi o conexiune neliniară N, vom da o d-conexiune liniară specială, numită *conexiunea Vrănceanu.* Deasemeni, vom stabili condiţiile în care conexiunea Berwald coincide cu conexiunea Vrănceanu. Ca aplicaţie, vom determina conexiunea Berwald a unui 2-semispray particular.

Exprimarea locală a 2-structurii tangente pe Osc^2M este:

$$J = \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} \otimes dx^i + \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} \otimes dy^{(1)i}.$$

Dar, cum se ştie J are caracter global. După cum am văzut în Cap.1.,§2., câmpurile Liouville $\overset{1}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}$, $\overset{2}{\Gamma} = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}$, sunt câmpuri vectoriale global definite pe Osc^2M.

Un câmp de vectori $S \in \chi(Osc^2M)$ se numeşte semispray sau 2-semispray pe Osc^2M dacă $JS = \overset{2}{\Gamma}$. Expresia locală a unui semispray este, (Cap.1.,§3):

$$S = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - 3G^i\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}, \tag{2.1}$$

unde funcţiile G^i sunt definite pe fiecare domeniu de hartă locală.

O conexiune neliniară pe varietatea Osc^2M se defineşte ca în Cap.1, §5.

Definiţia 2.1 *Se numeşte conexiune neliniară pe Osc^2M o distribuţie regulată N, suplementară distribuţiei verticale V_1, adică*

$$T_uE = N(u) \oplus V_1(u), \ \forall u \ Osc^2M.$$

Fie $N_0 = N, N_1 = J(N_0), V_2 = J(N_1)$. Avem atunci următoarea descompunere directă

$$T_uOsc^2M = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus V_2(u), \ \forall u \ Osc^2M. \tag{2.2}$$

Baza locală adaptată acestei descompuneri este dată de

$$\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\}, \ (i = 1, ..., n) \tag{2.3}$$

în care

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} - \underset{(1)}{N_i^j}\frac{\partial}{\partial y^{(1)j}} - \underset{(2)}{N_i^j}\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}, \\ \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} &= \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - \underset{(1)}{N_i^j}\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}. \end{aligned} \tag{2.3}'$$

Sistemele de funţii $\underset{(1)}{N_i^j}, \underset{(2)}{N_i^j}$ dau *coeficienţii conexiunii neliniare* $N = N_0$. Dacă vom considera proiectorii h, v_1, v_2 determinaţi de (2.2), putem scrie în mod unic:

$$X = X^H + X^{v_1} + X^{v_2}, \ \ \forall X \in \chi(Osc^2M)$$

unde $X^H = hX, X^{v_\alpha} = v_\alpha X, \alpha = 1,2$. Bineînţeles, proiectorii h, v_1, v_2 au proprietăţile:

$$h + v_1 + v_2 = Id,\ h^2 = h,\ v_1 v_1 = v_1,\ v_2 v_2 = v_2,$$
$$v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0,\ h v_\alpha = v_\alpha h = 0,\ (\alpha = 1,2)$$

Baza duală bazei (2.3) se va nota cu

$$\{dx^i, \delta y^{(1)i}, \delta y^{(2)i}\},\ (i = 1, ..., n).$$

în care

$$\begin{aligned} \delta y^{(1)i} &= dy^{(1)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dx^j \\ \delta y^{(2)i} &= dy^{(2)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dy^{(1)j} + \underset{(2)}{M^i_j}\, dx^j. \end{aligned} \tag{2.3)''}$$

Între coeficienţii $\underset{(1)}{N^i_j}, \underset{(2)}{N^i_j}$ şi coeficienţii duali $\underset{(1)}{M^i_j}, \underset{(2)}{M^i_j}$ ai conexiunii neliniare N avem relaţiile

$$\underset{(1)}{N^i_j} = \underset{(1)}{M^i_j},\quad \underset{(2)}{N^i_j} = \underset{(2)}{M^i_j} - \underset{(1)}{M^i_m} \underset{(1)}{M^m_j}.$$

echivalente cu:

$$\underset{(1)}{M^i_j} = \underset{(1)}{N^i_j}, \underset{(2)}{M^i_j} = \underset{(2)}{N^i_j} + \underset{(1)}{N^i_m} \underset{(1)}{N^m_j}.$$

În baza adaptată, 2-structura tangentă este dată de

$$J = \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} \otimes dx^i + \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} \otimes \delta y^{(1)i}.$$

Proiectorii h, v_1, v_2 pot fi scrişi în forma

$$h = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^i,\quad v_1 = \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} \otimes \delta y^{(1)i},\quad v_2 = \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} \otimes \delta y^{(2)i}.$$

Pentru o conexiune neliniară N, vom defini structura

$$\theta = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^{(1)i} + \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} \otimes \delta y^{(2)i}. \tag{2.4}$$

Teorema 2.1 *Structura θ are următoarele proprietăţi:*

1. $\theta^2 \circ J^2 = h,$
2. $\theta \circ J^2 \circ \theta = v_1,$
3. $J^2 \circ \theta^2 = v_2,$
4. $I_d = \theta^2 \circ J^2 + \theta \circ J^2 \circ \theta + J^2 \circ \theta^2,$
5. $\theta(\frac{\delta}{\delta x^i}) = 0,\ \theta(\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}) = \frac{\delta}{\delta x^i},\ \theta(\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}) = \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}.$

Propoziţia 2.1 *Structura θ este integrabilă dacă şi numai dacă tensorul de curbură de tip (1,2) al conexiunii neliniare se anulează, aceasta în semnând că şi conexiunea neliniară este integrabilă.*

Demonstraţie. Tensorul Nijenhuis al lui θ este $\mathcal{N}_\theta(X,Y) = \theta^2[X,Y]+[\theta X,\theta Y]-\theta[\theta X,Y]-\theta[X,\theta Y]$. Calculându-l în componentele bazei adaptate rezultă concluzia cerută. **q.e.d.**

Avem următoarea exprimare a coeficienţilor duali ai conexiunii neliniare, dată de I.Bucataru,[19]:

Teorema 2.2 *Fie un 2-semispray pe Osc^2M dat de*

$$S = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - 3G^i\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}.$$

Atunci coeficienţii duali ai conexiunii neliniare pe Osc^2M sunt daţi de formulele

$$\underset{(1)}{M^i_j}= \frac{\partial G^i}{\partial y^{(2)j}},\quad \underset{(2)}{M^i_j}= \frac{\partial G^i}{\partial y^{(2)j}}. \tag{2.5}$$

Definiţia 2.2 *O conexiune liniară D pe Osc^2M se numeşte d(distinsă)-conexiune liniară dacă păstrează prin paralelism distribuţiile orizontale şi verticale.*

Observăm că pentru o d-conexiune D, proiectorii h, v_1, v_2 sunt absolut paraleli în raport cu D, adică, $Dh = Dv_1 = Dv_2 = 0$.

Este cunoscut de la Vrănceanu, [88], că pe orice varietate înzestrată cu o pereche de distribuţii suplementare se poate introduce o d–conexiune liniară. Vom extinde acest rezultat în cazul fibratului 2-osculator, pe care avem trei distribuţii suplementare.

În acest scop dovedim:

Teorema 2.3 *Fie ∇ o conexiune liniară arbitrară pe Osc^2M. Atunci $\widetilde{\nabla} : \chi(Osc^2M)\times \chi(Osc^2M) \to \chi(Osc^2M)$ definită prin*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nabla}_X Y = h\nabla_{hX}hY + v_1\nabla_{v_1X}v_1Y + v_2\nabla_{v_2X}v_2Y+ \\ &h[v_2X, hY] + v_1[hX, v_1Y] + v_2[v_1X, v_2Y]+ \\ &\theta^2[v_1X, J^2Y] + (J\circ h)[v_2X, (\theta\circ v_1)Y] + (J\circ v_1)[hx, (\theta\circ v_2)Y] \end{aligned} \tag{2.6}$$

este 0 d-conexiune liniară.

Demonstraţie. Prin calcul direct arătăm că $\widetilde{\nabla}_{X+Y} = \widetilde{\nabla}_X + \widetilde{\nabla}_Y$, $\widetilde{\nabla}_{fX}Y = f\widetilde{\nabla}_X Y, \widetilde{\nabla}_X fY = X(f)Y + f\widetilde{\nabla}_X Y$ şi cum $\widetilde{\nabla}$ este aditivă în raport cu ambele argumente ne rezultă că este o conexiune liniară. Avem $\widetilde{\nabla}_X hY = h\nabla_{hX}hY + h[vX, hY] = h\widetilde{\nabla}_X Y$, deci $\widetilde{\nabla}h = 0$. Într-o manieră similară obţinem că $\widetilde{\nabla}v_1 = \widetilde{\nabla}v_2 = 0$, şi astfel $\widetilde{\nabla}$ este o d-conexiune liniară pe Osc^2M. **q.e.d.**

d-conexiunea liniară $\widetilde{\nabla}$ se numeşte *conexiunea Vrănceanu* asociată conexiunii liniare ∇ şi conexiunii neliniare N.

Definiţia 2.3 *O conexiune liniară D pe Osc^2M se numeşte N-conexiune liniară dacă D păstrează prin paralelism distribuţia orizontală N iar 2-structura tangentă J este absolut paralelă în raport cu D.*

Este uşor de verificat că o N-conexiune liniară este o d-conexiune liniară, adică păstrează prin paralelism şi distribuţiile verticale N_1 ş V_2.

Câteva caracterizări ale N-conexiunii liniare au fost date în Cap.1. Vom da în continuare o altă caracterizare pentru o N-conexiune liniară D pe Osc^2M utilizând structura θ.

Teorema 2.4 *Fie D o conexiune liniară pe Osc^2M. D este o N-conexiune liniară dacă şi numai dacă D păstrează prin paralelism distribuţia verticală V_2 şi θ este absolut paralelă în raport cu D.*

Demonstraţie. Trebuie să dovedim că $Dh = 0$ şi $DJ = 0$ sunt echivalente cu $Dv_2 = 0$ şi $D\theta = 0$. Ambele seturi de condiţii sunt echivalente cu faptul că D se exprimă în baza $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\}$ adaptată distribuţiilor N_0, N_1 şi V_2 după cum urmează

(2.7)

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\delta}{\delta x^i} = F^k_{ij}\frac{\delta}{\delta x^k}, \quad D_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = F^k_{ij}\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \quad D_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = F^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}}\frac{\delta}{\delta x^i} = \underset{(1)}{C^k_{ij}}\frac{\delta}{\delta x^k}, \quad D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \underset{(1)}{C^k_{ij}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \quad D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = \underset{(1)}{C^k_{ij}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}},$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}}\frac{\delta}{\delta x^i} = \underset{(2)}{C^k_{ij}}\frac{\delta}{\delta x^k}, \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \underset{(2)}{C^k_{ij}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = \underset{(2)}{C^k_{ij}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}.$$

q.e.d.

În continuare, vom ataşa unei N-conexiuni liniare mulţimile de funcţii $D\Gamma(N) = (F^k_{ij}, \underset{(1)}{C_{ij}}{}^k, \underset{(2)}{C_{ij}}{}^k)$, numite coeficienţii locali ai N-conexiunii liniare D.

Vom asocia unei conexiuni neliniare N o N-conexiune liniară, care depinde numai de N, numită conexiunea Berwald. Această N-conexiune liniară apare,în coordonate locale pentru $k = 1$, în lucrarea [49].

O exprimare globală a acestei conexiuni a fost dată de I.Bucataru în [19].

Teorema 2.5 *Aplicaţia* $D : \chi(Osc^2M) \times \chi(Osc^2M) \to \chi(Osc^2M)$ *dată de:*

$$\begin{aligned} D_X Y = & h[v_2X, hY] + v_1[hX, v_1Y] + v_2[v_1X, v_2Y] + \\ & (\theta\circ v_1)[hX, (J\circ h)Y] + (\theta\circ v_2)[v_1X, (J\circ v_1)Y] + J^2[v_2X, \theta^2Y] + \\ & \theta^2[v_1X, J^2Y] + (J\circ h)[v_2X, (\theta\circ v_1)Y] + (J\circ v_1)[hX, (\theta\circ v_2)Y] \end{aligned} \tag{2.8}$$

este o N*-conexiune liniară pe* Osc^2M*, care depinde numai de conexiunea neliniară* N.

Demonstraţie. Toţi operatorii care apar în exprimarea lui D sunt aditivi şi astfel D este aditiv în raport cu ambele argumente.

Cum $h\circ v_1 = h\circ v_2 = v_1\circ h = v_1\circ v_2 = v_2\circ h = v_2\circ v_1 = 0$ avem $D_{fX}Y = fD_XY$. Utilizând faptul că $\theta\circ v_1\circ J\circ h = h$, $\theta\circ v_2\circ J\circ v_1 = v_1$, $J^2\circ\theta^2 = v_2$, $\theta^2\circ v_2\circ J^2 = h$, $J\circ h\circ\theta\circ v_1 = v_1$ şi $J\circ v_1\circ\theta\circ v_2 = v_2$ obţinem $D_X fY = X(f)Y + fD_XY$. Astfel, D ieste conexiune liniară. Pentru a demonstra că D este o N-conexiune liniară vom folosi exprimare locală a lui D în baza (2.3). Vom obţine

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j} = (\theta\circ v_1)[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}] = \frac{\delta \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\delta y^{(1)j}}\frac{\delta}{\delta x^p},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}} = v_1[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}] = \frac{\delta \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\delta y^{(1)j}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)p}},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}} = (J\circ v_1)[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}] = \frac{\delta \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\delta y^{(1)j}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)p}},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}}\frac{\delta}{\delta x^j} = (\theta^2\circ v_2)[\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}] = \frac{\partial \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\partial y^{(2)j}}\frac{\delta}{\delta x^p},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}} = (\theta\circ v_2)[\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}] = \frac{\partial \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\partial y^{(2)j}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)p}},$$

$$D_{\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)j}} = v_2[\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}] = \frac{\partial \underset{(1)}{N}{}^p_i}{\partial y^{(2)j}}\frac{\partial}{\partial y^{(2)p}},$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}}\frac{\delta}{\delta x^j} = h[\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\frac{\delta}{\delta x^j}] = 0,$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}} = (J\circ h)[\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\frac{\delta}{\delta x^j}] = 0,$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}}\frac{\partial}{\partial x^j} = J^2[\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\frac{\delta}{\delta x^j}] = 0.$$

Astfel, avem următorii coeficienţi locali ai conexiunii Berwald

$$F^k_{ij} = \frac{\delta \underset{(1)}{N^k_j}}{\delta y^{(1)i}},\quad \underset{(1)}{C^k_{ij}} = \frac{\partial \underset{(1)}{N^k_j}}{\partial y^{(2)i}},\quad \underset{(2)}{C^k_{ij}} = 0 \tag{2.9}$$

q.e.d.

Observaţie.

Am prezentat aici conexiunea Berwald, utilizând un caz particular de conexiune Vrănceanu. Coeficienţii (2.9) diferă de coeficienţii conexiunii Berwald daţi de către prof. R.Miron în cartea "The geometry of higher order Lagrange spaces. Applications to Mechanics and Physics.", editată în Kluwer Academic Publ., FTPH 59, (1997).

Teorema 2.6 *Dacă o conexiune neliniară N provine dintr-un 2-semispray, adică $\underset{(1)}{N^i_j} = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^{(2)j}}$ atunci coeficienţii locali ai conexiunii Berwald sunt daţi de:*

$$\begin{aligned} F^k_{ij} &= \frac{\partial^2 G^k}{\partial y^{(1)i}\partial y^{(2)j}} - \frac{\partial G^p}{\partial y^{(2)i}}\frac{\partial^2 G^k}{\partial y^{(2)p}\partial y^{(2)j}} \\ \underset{(1)}{C^k_{ij}} &= \frac{\partial^2 G^k}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}},\quad \underset{(2)}{C^k_{ij}} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Avem următorul rezultat nou în cazul fibratelor osculatoare de ordinul 2:

Teorema 2.7 *Fie ∇ o conexiune liniară pe Osc^2M, $\widetilde{\nabla}$ conexiunea Vrănceanu asociată acesteia şi D conexiunea Berwald. Atunci $\widetilde{\nabla} = D$ dacă şi numai dacă $\widetilde{\nabla}\circ J = 0$.*

Demonstraţie.În baza (2.3) avem

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma^k_{ji}\frac{\delta}{\delta x^k},\quad \widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}} = F^k_{ji}\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}},\quad \widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta y^{(2)j}} = F^k_{ji}\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}.$$

Condiţia $\widetilde{\nabla} J = 0$ este echivalentă cu $\Gamma^k_{ji} = F^k_{ji}$, unde Γ^k_{ji} sunt primii din coeficienţii locali ai lui ∇ exprimaţi în baza naturală şi F^k_{ji} sunt daţi de (2.9). Aceasta înseamnă că $\widetilde{\nabla}$ şi D coincid pe distribuţia orizontală. Într-un mod similar se arată că $\widetilde{\nabla}$ şi D coincid pe distribuţiile verticale. **q.e.d.**

Propoziţia 2.2 *În cazul spaţiilor $Prol^2\mathcal{R}^n$ a prelungirii la Osc^2M a structurii Riemann g, coeficienţii locali ai conexiunii Berwald sunt cei stabiliţi de R.Miron, [49].*

Într-adevăr, fie $\mathcal{R}^n = (M, g)$ o varietate Riemann iar γ^i_{jk} simbolii Christoffel asociaţi metricii $g = g_{ij}$. Funcţiile

$$3G^m = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma^m_{jk}}{\partial x^i} + \gamma^m_{pj}\gamma^p_{ki}\right) y^{(1)j} y^{(1)k} y^{(1)i} + 3\gamma^m_{ji} y^{(1)j} y^{(2)i}$$

definite pe fiecare domeniu de hartă, sunt coeficienţii locali ai unui 2-semispray S pe Osc^2M.

Conexiunea neliniară canonică determinată de S are primii coeficienţi daţi de

$$\underset{(1)}{N^i_j}(x, y^{(1)}) = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(2)j}} = \gamma^i_{jk}(x) y^{(1)k}.$$

Ţinând cont de Teorema 2.5, coeficienţii locali ai conexiunii Berwald sunt

$$F^k_{ji} = \gamma^k_{ji}; \quad \underset{(1)}{C^k_{ji}} = 0; \quad \underset{(2)}{C^k_{ji}} = 0,$$

adică tocmai cei determinaţi de R.Miron, [49].

3 d-tensorii de torsiune şi de curbură ai unei N–conexiuni liniare D.

Vom studia torsiunea şi curbura unei N-conexiuni liniare pe Osc^kM, raportate la descompunerea directă (5.5), Cap.1.

Fie $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}\}$, $i = 1, .., n$, baza adaptată conexiunii neliniare canonice N, şi D o N-conexiune liniară dată pe Osc^kM prin coeficienţi săi $D\Gamma(N) = (L^i_{jh}, \underset{(1)}{C}{}^i_{jh}, ..., \underset{(k)}{C}{}^i_{jh})$.

Torsiunea $\mathbb{T}$ corespunzătoare N-conexiunii liniare $D\Gamma(N)$ este dată de

$$\mathbb{T}(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y], \quad X, Y\ \chi(Osc^kM). \tag{3.1}$$

Ţinând cont că un câmp vectorial X $\mathcal{X}(Osc^k M)$ poate fi scris unic, în raport cu descompunerea (5.2),Cap.1, ca $X = X^H + X^{V_1} + \cdots X^{V_k}$, obţinem din (3.1) următoarele câmpuri de vectori:

$$\mathbb{T}(X^H, Y^H), \mathbb{T}(X^H, Y^{V_\alpha}),\ \mathbb{T}(X^\alpha, Y^\beta),\ (\alpha, \beta = 1, ..., k).$$

Atunci are loc, [49]:

Propoziţia 3.1 *Tensorul de torsiune $\mathbb{T}$ al N-conexiunii liniare D este complet determinat de următoarele d-câmpuri tensoriale de tip $(1,2)$:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{T}(X^H, Y^H) = h\mathbb{T}(X^H, Y^H) + \sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha \mathbb{T}(X^H, Y^H),\\
&\mathbb{T}(X^H, Y^{v_\beta}) = h\mathbb{T}(X^H, Y^{v_\beta}) + \sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha \mathbb{T}(X^H, Y^{v_\beta}),\\
&\mathbb{T}(X^{v_\alpha}, Y^{v_\beta}) = \sum_{\gamma=1}^{k} v_\gamma \mathbb{T}(X^{v_\alpha}, Y^{v_\beta}),\ (\alpha, \beta = 1, ...k).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Coeficienţii locali ai torsiunii $\mathbb{T}$ sunt daţi de:

$$\begin{aligned}
&h\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = T^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i}, && v_\alpha\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = \overset{(\alpha)}{T}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}},\\
&h\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = \underset{(\beta)}{P}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i}, && v_\alpha\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = \underset{(\beta)}{\overset{(\alpha)}{P}}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}},\\
&h\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)j}}) = \underset{(\gamma\beta)}{P}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i}, && v_\alpha\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)j}}) = \underset{(\gamma\beta)}{\overset{(\alpha)}{P}}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}},\\
&h\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}}) = \underset{(\beta)}{S}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i}, && v_\alpha\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}}) = \underset{(\beta)}{\overset{(\alpha)}{S}}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, .., k$, iar $\beta > \gamma$.

Are loc teorema:

Teorema 3.1 *Componentele locale ale torsiunii $\mathbb{T}$ a N-conexiunii liniare $D\Gamma(N)$*

sunt

$$(i)\ T^i{}_{jh} = L^i_{jh} - L^i_{hj},\ \overset{(1)}{T}{}^i{}_{jh} = \underset{(0)}{\overset{(1)}{R}}{}^i{}_{jh} = r_m{}^i{}_{jh} y^{(1)m},\ \overset{(\varphi)}{T}{}^i{}_{jh} = \underset{(0)}{\overset{(\varphi)}{R}}{}^i{}_{jh},\ \varphi \in \{2,3,..,k\},$$

$$(ii)\ \underset{(\alpha)}{P}{}^i{}_{jh} = \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{jh},\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\varphi)}{P}}{}^i{}_{jh} = 0,\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\alpha)}{P}}{}^i{}_{jh} = \gamma^i_{jh} - L^i_{jh},\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\psi)}{P}}{}^i{}_{jh},$$
$$\alpha \in \{1,2,..,k\}, \varphi \in \{1,2,..,\alpha-1\}, \psi \in \{\alpha+1,..,k\},$$

$$(iii)\ \underset{(\alpha\beta)}{P}{}^i{}_{jh} = 0,\ \underset{(\alpha\beta)}{\overset{\alpha}{P}}{}^i{}_{jh} = \underset{\beta}{C}{}^i{}_{jh},\ \underset{(\alpha\beta)}{\overset{\beta}{P}}{}^i{}_{jh} = -\underset{\alpha}{C}{}^i{}_{jh},\ \underset{(\alpha\beta)}{\overset{\varphi}{P}}{}^i{}_{jh} = 0,\ \underset{(\alpha\beta)}{\overset{\psi}{P}}{}^i{}_{jh},$$
$$\alpha, \beta \in \{1,2,..,k\}, \varphi \in \{1,2,..,\beta-1\} \setminus \{\alpha\},$$
$$\psi \in \{\beta+1,..,k\},\ \alpha < \beta,$$

$$(iv)\ \underset{(\alpha)}{S}{}^i{}_{jh} = 0,\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\varphi)}{S}}{}^i{}_{jh} = 0,\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\alpha)}{S}}{}^i{}_{jh} = \underset{\alpha}{C}{}^i{}_{jh} - \underset{\alpha}{C}{}^i{}_{hj},\ \underset{(\alpha)}{\overset{(\psi)}{S}}{}^i{}_{jh},$$
$$\alpha \in \{1,2,..,k\}, \varphi \in \{1,2,..,\alpha-1\}, \psi \in \{\alpha+1,..,k\},$$

unde $r_m{}^i{}_{jh}$ *este tensorul de curbură Riemann al tensorului metric* g_{ij}*, Cap.1, §6.*

Demonstraţie.(i) Din (3.1) avem:

$$\mathbb{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = D_{\frac{\delta}{\delta x^h}} \frac{\delta}{\delta x^j} - D_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^h} - \left[\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] =$$
$$(L^i_{jh} - L^i_{hj}) \frac{\delta}{\delta x^i} - \left[\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right], \tag{3.4}$$

şi pe de altă parte avem

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] = \sum_{\varphi=1}^{k} \left(\frac{\delta \underset{(\varphi)}{N^i_h}}{\delta x^j} - \frac{\delta \underset{(\varphi)}{N^i_j}}{\delta x^h}\right) \frac{\partial}{\partial y^{(\varphi)i}}. \tag{3.5}$$

Din (3.4) şi (3.5), ţinând cont de exprimarea d-vectorilor bazei adaptate, rezultă:

$$h\mathbb{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = T^i{}_{jh} \frac{\delta}{\delta x^i} = (L^i_{jh} - L^i_{hj}) \frac{\delta}{\delta x^i},$$

respectiv,

$$v_1\mathbb{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = \overset{(1)}{T}{}^i{}_{jh} \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \left(\frac{\delta \underset{(1)}{N^i_j}}{\delta x^h} - \frac{\delta \underset{(1)}{N^i_h}}{\delta x^j}\right) \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}.$$

De unde rezultă cu uşurinţă (i).

(ii) Din (3.1) rezultă:

$$\mathbb{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}} \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}} - D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}}} \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}} - \left[\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] =$$
$$= \underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{jh} \frac{\delta}{\delta x^i} - L^i_{jh} \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}} - \left[\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right],$$

iar croşetul este dat de

$$\begin{aligned}[\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}},\frac{\delta}{\delta x^j}] &= -(\frac{\delta \underset{(1)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}+\cdots+\frac{\delta \underset{(k)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}})+\\ &+\frac{\delta \underset{(1)}{N^i_h}}{\delta x^j}\frac{\partial}{\partial y^{(\beta+1)i}}+\frac{\delta \underset{(2)}{N^i_h}}{\delta x^j}\frac{\partial}{\partial y^{(\beta+2)i}}+\cdots+\frac{\delta \underset{(k-\beta)}{N^i_h}}{\delta x^j}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}},\end{aligned}$$

de unde obţinem $\frac{\delta \underset{(\varphi)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}} = 0$ şi $\frac{\delta \underset{(\beta)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}} = \gamma^i_{jh}(x)$, pentru $\beta \in \{1,2,..,k\}$, $\varphi \in \{1,2,..,\beta-1\}$.

(*iii*) Din (3.1) rezultă

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}) &= D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}} - D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}}\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}} - [\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}] =\\ &= \underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} - \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hj}\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}} - [\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}],\end{aligned}$$

unde $\alpha,\beta \in \{1,2,..,k\}$, $\alpha < \beta$.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}[\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}] &= \frac{\delta \underset{(1)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}}\frac{\partial}{\partial y^{(\alpha+1)i}}+\cdots+\frac{\delta \underset{(k-\alpha)}{N^i_j}}{\delta y^{(\beta)h}}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}}-\\ &-\frac{\delta \underset{(1)}{N^i_h}}{\delta y^{(\alpha)j}}\frac{\partial}{\partial y^{(\beta+1)i}}-\cdots-\frac{\delta \underset{(k-\beta)}{N^i_h}}{\delta y^{(\alpha)j}}\frac{\partial}{\partial y^{(k)i}},\end{aligned}$$

de unde se obţine (*iii*).

(*iv*) Tot din (3.1) avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}) &= D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}}}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}} - D_{\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}} - [\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}] =\\ &= (\underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{jh} - \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hj})\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} - [\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}],\end{aligned}$$

care împreună cu

$$[\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)h}},\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}] = \sum_{\varphi=1}^{k-\alpha}(\frac{\delta \underset{(\varphi)}{N^i_h}}{\delta y^{(\alpha)j}} - \frac{\delta \underset{(\varphi)}{N^i_j}}{\delta y^{(\alpha)h}})\frac{\partial}{\partial y^{(\alpha+\varphi)i}},$$

ne conduc la (*iv*). **q.e.d.**

Obţinem următoarele corolare:

Corolar 3.1 *Dacă* $\alpha \geq [k/2]$, *atunci* $\underset{(\alpha)}{\overset{(\varphi)}{S}}{}^{i}{}_{jh} = 0$ *pentru* $\varphi \in \{\alpha+1, ..., k\}$.

Corolar 3.2 *În repere adaptate, torsiunea* $\mathbb{T}$ *a unei N-conexiuni liniare* $D\Gamma(N)$ *se scrie sub forma:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{T}\Big(\frac{\delta}{\delta x^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\Big) = T^i{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i} + \sum_{\varphi=1}^{k} \overset{(\varphi)}{T}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\varphi)i}},\\
&\mathbb{T}\Big(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta x^j}\Big) = \underset{(\beta)}{P}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i} + \sum_{\varphi=\beta}^{k} \underset{(\beta)}{\overset{(\varphi)}{P}}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\varphi)i}},\\
(3.6)\qquad &\mathbb{T}\Big(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\gamma)j}}\Big) = \underset{(\gamma\beta)}{P}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta x^i} + \sum_{\varphi=\beta}^{k} + \underset{(\alpha\beta)}{\overset{(\varphi)}{P}}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\varphi)i}},\\
&\mathbb{T}\Big(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)h}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}}\Big) = \sum_{\varphi=\beta}^{k} \underset{(\varphi)}{\overset{(\alpha)}{S}}{}^{i}{}_{jh}\frac{\delta}{\delta y^{(\varphi)i}}.
\end{aligned}
$$

Ne vom ocupa acum de d-tensorii de curbură ai N-conexiunii liniare D.

Tensorul de curbură $\mathbb{R}$ al N-conexiunii liniare D este dat de

$$\mathbb{R}(X,Y)Z = (D_X D_Y - D_Y D_X)Z - D_{[X,Y]}Z,\ \forall X, Y, Z\ \mathcal{X}(E). \tag{3.7}$$

Propoziţia 3.2 *Pentru orice N-conexiune liniară* D, *tensorul de curbură* $\mathbb{R}$ *satisface următoarele identităţi*

$$J[R(X,Y)Z] = R(X,Y)(JZ), ..., J^k[R(X,Y)Z] = \mathbb{R}(X,Y)(J^k Z), \tag{3.8}$$

unde $J^\alpha = \underbrace{J \circ \cdots \circ J}_{\alpha\ ori}$, *unde* J *este* k*-structura tangentă.*

Avem următorul rezultat, [49]:

Propoziţia 3.3

1° *Pentru orice câmpuri vectoriale* $X, Y, Z\ \mathcal{X}(E)$ *cu* $Z^{V_\alpha} = J^\alpha Z^H$, *avem*

$$\mathbb{R}(X,Y)Z^{V_\alpha} = J^\alpha(\mathbb{R}(X,Y)Z^H),\ (\alpha = 1, ..., k). \tag{3.9}$$

2° *Componentele esenţiale ale tensorului de curbură* $\mathbb{R}$ *sunt* $\mathbb{R}(X,Y)Z^H$.

3° *Câmpul vectorial* $\mathbb{R}(X,Y)Z^H$ *este orizontal.*

4° *Au loc următoarele proprietăţi:*

$$
\begin{aligned}
&v_\beta[I\!R(X,Y)Z^H] = 0,\ h[I\!R(X,Y)Z^\beta] = 0\\
&v_\alpha[I\!R(X,Y)Z^{v_\beta}] = 0,\ (\alpha \neq \beta),\ (\alpha,\beta = 1,...,k).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Astfel, determinarea tensorului de curbură $I\!R$ al N-conexiunii liniare ne conduce la d-câmpurile de vectori

$$
\begin{gathered}
R(X^H,Y^H)Z^H, I\!R(X^{V_\alpha},Y^H)Z^H, I\!R(X^{V_\beta},Y^{V_\alpha})Z^H,\\
(\alpha,\beta = 1,...,k;\ \beta \leq \alpha)
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

din care se pot obţine şi celelalte aplicând operatorul J :

$$
\begin{aligned}
&J^\gamma\{[I\!R(X^H,Y^H]Z^H\} = I\!R(X^H,Y^H)Z^{V_\gamma};\\
&J^\gamma\{[I\!R(X^{V_\alpha},Y^H]Z^H\} = I\!R(X^{V_\alpha},Y^H)Z^{V_\gamma};\\
&J^\gamma\{I\!R(X^{V_\beta},Y^{V_\alpha}\}Z^H = I\!R(X^{V_\beta},Y^{V_\alpha}\}Z^{V_\gamma},\\
&(\alpha,\beta,\gamma = 1,...,k;\ \beta \leq \alpha).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

d–câmpurile tensoriale din (3.11) şi (3.12) reprezintă d–tensorii de curbură ai N-conexiunii liniare D.

Au loc următoarele proprietăţi:

Teorema 3.2 1° *d–tensorii de curbură din (3.11) au expresiile*

$$
\begin{aligned}
I\!R(X^H,Y^H)Z^H &= [D^H_X, D^H_Y]Z^H - D^H_{[X^H,Y^H]}Z^H - \sum_{\gamma=1}^k D^{V_\gamma}_{[X^H,Y^H]}Z^H,\\
I\!R(X^{V_\alpha},Y^H)Z^H &= [D^{V_\alpha}_X, D^H_Y]Z^H - D^H_{[X^{V_\alpha},Y^H]}Z^H - \sum_{\gamma=1}^k D^{V_\gamma}_{[X^{V_\alpha},Y^H]}Z^H,\\
I\!R(X^{V_\beta},Y^{V_\alpha})Z^H &= [D^{V_\beta}_X, D^{V_\alpha}_Y]Z^H - \sum_{\gamma=1}^k D^{V_\gamma}_{[X^{V_\beta},Y^{V_\alpha}]}Z^H,\\
&\qquad (\alpha,\beta = 1,...,k;\ \beta \leq \alpha).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

2° *d–câmpurile tensoriale* (3.12) *sunt obţinute din d–tensorii de mai sus prin aplicarea operatorilor* $J, J^2,...,J^k$ *şi punând* $J^\gamma Z^H = Z^{V_\gamma}$,

$(\gamma = 1,...,k)$.

În baza adaptată $\left(\dfrac{\delta}{\delta x^i}, \dfrac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}},\ \alpha = 1, ..., k\right)$ d–tensorii (3.11) au forma:

$$
\begin{aligned}
&I\!\!R\left(\frac{\delta}{\delta x^m}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = R_h{}^i{}_{jm}\frac{\delta}{\delta x^i},\\
&I\!\!R\left(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)m}}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
&I\!\!R\left(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)m}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)m}}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(\beta\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
&I\!\!R\left(\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)m}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)m}}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(\beta)}{S}{}_h{}^i{}_{jm}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha, \beta = 1, ..., k;\ \beta < \alpha).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Să remarcăm că ceilalţi d–tensori (3.12) au aceeaşi coeficienţi

$$
R_h{}^i{}_{jm},\ \underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm},\ \underset{(\beta\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm},\ \underset{(\beta)}{S}{}_h{}^i{}_{jm}(\alpha, \beta = 1, ..., k;\ \beta < \alpha).
\tag{3.15}
$$

Deci, d–câmpurile tensoriale (3.15) caracterizează toţi d–tensorii de curbură ai N-conexiunii liniare D..

Prin urmare, (3.15) se vor numi d–tensorii de curbură.

Din teorema precedentă rezultă

Teorema 3.3 *Pentru orice N-conexiune liniară D având coeficienţii $D\Gamma(N) = (L^i{}_{jk}, \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{jk}), (\alpha = 1, ..., k)$, d–tensorii de curbură (3.15) au expresiile:*

$$
\begin{aligned}
R_h{}^i{}_{jm} &= \frac{\delta L^i{}_{hj}}{\delta x^m} - \frac{\delta L^i{}_{hm}}{\delta x^j} + L^p{}_{hj}L^i{}_{pm} - L^p{}_{hm}L^i{}_{pj} + \sum_{\varphi=1}^{k}\underset{(\varphi)}{C}{}^i{}_{hp}\underset{(0)}{\overset{(\varphi)}{R}}{}^p{}_{jm}\\
\underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm} &= \frac{\delta L^i{}_{hj}}{\delta y^{(\alpha)m}} - \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hm|j} + \sum_{\varphi=\gamma}^{k}\underset{(\varphi)}{C}{}^i{}_{hp}\underset{(\alpha)}{\overset{(\varphi)}{P}}{}^p{}_{jm}\\
\underset{(\alpha\beta)}{P}{}_h{}^i{}_{jm} &= \frac{\delta \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hj}}{\delta y^{(\beta)m}} - \underset{(\alpha)}{C}{}^i{}_{hm}\overset{(\alpha)}{\Big|}_j + \sum_{\varphi=\beta}^{k}\underset{(\varphi)}{C}{}^i{}_{hp}\underset{(\alpha\beta)}{\overset{(\varphi)}{P}}{}^p{}_{jm}\\
\underset{(\beta)}{S}{}_h{}^i{}_{jm} &= \frac{\delta \underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{hj}}{\delta y^{(\beta)m}} - \frac{\delta \underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{hm}}{\delta y^{(\alpha)j}} + \underset{(\beta)}{C}{}^p{}_{hj}\underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{pm} - \underset{(\beta)}{C}{}^p{}_{hm}\underset{(\beta)}{C}{}^i{}_{pj} +\\
&\qquad + \sum_{\varphi=\beta+1}^{k}\underset{(\varphi)}{C}{}^i{}_{hp}\underset{(\beta)}{\overset{(\varphi-\alpha)}{R}}{}^p{}_{jm}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

unde $\alpha, \beta \in \{1, 2, .., k\}$ şi $\alpha < \beta$ iar $_|$ şi $\overset{(\alpha)}{|}$ sunt h- şi respectiv, v_α-derivatele covariante.

Teorema 3.4 *Conexiunea Berwald* $B\Gamma(N) = (F^i{}_{jh}, 0, .., 0)$, *determinată de conexiunea neliniară* N *are tensorii de torsiune şi de curbură daţi de:*

$$R_h{}^i{}_{jm} = \frac{\delta F^i{}_{hj}}{\delta x^m} - \frac{\delta F^i{}_{hm}}{\delta x^j} + F^p{}_{hj} F^i{}_{pm} - F^p{}_{hm} F^i{}_{pj}$$

$$\underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jm} = \frac{\delta F^i{}_{hj}}{\delta y^{(\alpha)m}}$$

$$\underset{(\alpha\beta)}{P}{}_h{}^i{}_{jm} = \underset{(\beta)}{S}{}_h{}^i{}_{jm} = 0,$$

unde $\alpha, \beta \in \{1, 2, .., k\}$.

CAPITOLUL 4

Spaţii Lagrange de ordin superior de tip Randers şi aplicaţii.

1 Spaţii Randers generale şi conexiunea neliniară omogenă asociată.

Cum am văzut în Cap.2, spaţiile Randers sunt cazuri particulare de spaţii Finsler cu (α, β)-metrică. Vom extinde noţiunea la spaţiile Randers generale studiate de Prof. R.Miron în [51]. Un spaţiu Randers general este un spaţiu Finsler având funcţia metrica $L(x,y)$ de forma $L(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$ unde $\alpha(x,y)$ este funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler şi $\beta = b_i(x)y^i$ este o funcţie 1-formă pe fibratul tangent al varietăţii bază M.

Perechea $GR^n = (M, L(x,y))$ a fost denumită de Prof.R.Miron, în lucrarea [51], spaţiu Randers general.

Geometria spaţiilor GR^n este importantă pentru modelele geometrice din teoria câmpurilor fizice.

O problemă importantă este determinarea prin metode geometrice a unei conexiuni neliniare canonice, mai simplă decât conexiunea neliniară Cartan a funcţiei metrice $L(x,y)$, deoarece aceasta este extrem de complicată.

În lucrarea [51] această problemă este rezolvată folosind ecuaţiile Lorentz ale spaţiului GR^n. Se obţine o conexiune neliniară canonică având coeficienţii $N^i{}_j(x,y) = \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - F^i_j$ unde $\overset{\circ}{N}{}^i{}_j$ este conexiunea neliniară Cartan a spaţiului Finsler $F^n = (M, \alpha(x,y))$ asociat lui GR^n iar $F^i_j(x,y) = a^{ik}(x,y)F_{kj}(x)$ este forma mixtă a tensorului electromagnetic $F_{ij}(x) = \dfrac{\partial b_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial b_i}{\partial x^j}$.

Se remarcă faptul că această conexiune neliniară nu are caracter Finslerian, deoarece coeficienţii $N^i{}_j$ nu sunt omogeni în raport cu y^i. Într-adevăr, $\overset{\circ}{N}{}^i{}_j$ este 1-omogen iar F^i_j este 0-omogen.

În cele ce urmează vom elimina acest inconvenient. Ca urmare rezultatele acestui capitol aparţin autorului tezei.

Vom considera o nouă conexiune neliniară care să fie omogenă, având coeficienţii

$$N^i{}_j(x,y) = \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - f(x,y)F^i_j$$

unde f este o funcţie 1-omogenă în raport cu y^i. Pentru aceasta vom determina conexiunea metrică şi canonică, curbura d-conexiunii metrice canonice şi vom scrie ecuaţiile Einstein ale spaţiului Randers general GR^n, corespunzătoare d-conexiunii metrice canonice $C\Gamma(N)$, unde N este conexiunea neliniară considerată de noi mai sus.

Definiţia 1.1 *Un spaţiu Randers general este o pereche $GR^n = (M, L(x,y))$, în care*

(1.1) $$L(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$$

unde $\alpha(x,y)$ este funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler $F^n = (M, \alpha(x,y))$ şi $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ este funcţie 1-formă.

Spaţiul $F^n = (M, \alpha(x,y))$ se numeşte spaţiul Finsler asociat lui GR^n şi a_{ij} tensorul fundamental al acestuia este dat de:

(1.2) $$a_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha^2}{\partial y^i \partial y^j}.$$

Conexiunea neliniară Cartan $\overset{\circ}{N}$ a spaţiului F^n are coeficienţii:

(1.3) $$\overset{\circ}{N}{}^i{}_j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^j}(\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{hk}\, y^h y^k),$$

în care $\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{hk}\,(x,y)$ sunt simbolii Christoffel ai tensorului $a_{ij}(x,y)$ adică

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{jk} = \frac{1}{2}a^{is}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{js}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial x^s}\right).$$

Menţionăm că $\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{jk}\,(x,y)$ nu sunt coeficienţi de conexiune.

Baza adaptată distribuţiei orizontale $\overset{\circ}{N}$ este

$$\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \overset{\circ}{N}{}^j{}_i \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{1.4}$$

iar conexiunea Cartan metrică a lui F^n are coeficienţii $C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N}) = (\overset{\circ}{F}{}^i_{jk}, \overset{\circ}{C}{}^i_{jk})$ daţi de:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} &= \frac{1}{2} a^{is} \left\{ \frac{\overset{\circ}{\delta} a_{sk}}{\overset{\circ}{\delta} x^j} + \frac{\overset{\circ}{\delta} a_{sj}}{\overset{\circ}{\delta} x^k} - \frac{\overset{\circ}{\delta} a_{jk}}{\overset{\circ}{\delta} x^s} \right\}, \\ \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} &= \frac{1}{2} a^{is} \left\{ \frac{\partial a_{sk}}{\partial y^j} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial y^k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial y^s} \right\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Câmpul tensorial fundamental g_{ij} al spaţiului Randers general GR^n a fost obţinut de R.Miron, [51]. El este dat de:

$$g_{ij} = (pa_{ij} + l_i l_j) - p\, \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j \tag{1.6}$$

unde $\overset{\circ}{l}_i = \frac{\partial \alpha}{\partial y^i}$, $l_i = \overset{\circ}{l}_i + b_i$, $p = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$.

Se demonstrează că avem $det\, |g_{ij}| = p^{n+1}\, det\, |a_{ij}|$.

O primă remarcă:

Observaţia 1.1 *Câmpul tensorial fundamental g_{ij} este 0-omogen în raport cu y^i.*

Într-adevăr, $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i \partial y^j}$ dovedeşte această afirmaţie.

Contravariantul g^{ij} este de asemenea omogen de grad 0 în y^i şi este dat de

$$g^{ij} = \frac{1}{p} a^{ij} - \frac{1}{p^2} [\overset{\circ}{l}{}^i \overset{\circ}{l}{}^j (1 - \tilde{l}^2) + \overset{\circ}{l}{}^i b^j + \overset{\circ}{l}{}^j b^i] \tag{1.7}$$

unde $\tilde{l}^2 = \frac{1}{p} \gamma^{ij} l_i l_j$.

Considerăm conexiunea neliniară dată prin coeficienţii săi:

$$N^i{}_j(x, y) = \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - f(x, y) F^i_j \tag{1.8}$$

în care

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha & -\text{de tip gravitaţional} \\ \beta & -\text{de tip electromagnetic} \\ \alpha + \beta & -\text{de tip Randers.} \end{cases} \tag{1.8'}$$

Să remarcăm că această conexiune neliniară N, (1.8), depinde numai de metrica Randers $L(x,y) = \alpha + \beta$, când $f(x,y)$ este dat de (1.8)'.

De aceea o vom numi *conexiunea neliniară f–canonică 1-omogenă* a spaţiului Randers general. Baza adaptată conexiunii neliniare N este dată de

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i} + f F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{1.9}$$

unde $\dfrac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i}$ este dat în formula (1.4) şi reprezintă baza adaptată conexiunii neliniare a spaţiului Finsler asociat.

Propoziţia 1.1 *Conexiunea Berwald determinată de conexiunea neliniară N are coeficienţii $B\Gamma(N) = ({B^i}_{jk}, 0)$ cu ${B^i}_{jk} = {\overset{\circ}{B}{}^i}_{jk} - \dfrac{\partial}{\partial y^k}(fF_j^i)$, unde $B\Gamma(\overset{\circ}{N}) = ({\overset{\circ}{B}{}^i}_{jk}, 0)$ este conexiunea Berwald a spaţiului Finsler asociat $F^n = (M, \alpha(x,y))$.*

Propoziţia 1.2 *Torsiunea slabă a conexiunii neliniare N este dată de*

$$ {t^i}_{jk} = \begin{cases} \overset{\circ}{l}_j F_k^i - \overset{\circ}{l}_k F_j^i + \alpha(\dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^j} F_{mk} - \dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^k} F_{mj}) & \text{pentru } f = \alpha \\[2ex] b_j F_k^i - b_k F_j^i + \beta(\dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^j} F_{mk} - \dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^k} F_{mj}) & \text{pentru } f = \beta \\[2ex] l_j F_k^i - l_k F_j^i + (\alpha+\beta)(\dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^j} F_{mk} - \dfrac{\partial a^{im}}{\partial y^k} F_{mj}) & \text{pentru } f = \alpha + \beta. \end{cases} \tag{1.10}$$

Obţinem:

Propoziţia 1.3 *Conexiunea Berwald $B\Gamma(N) = ({B^i}_{jk}, 0)$ este o conexiune simetrică dacă şi numai dacă torsiunea slabă ${t^i}_{jk}$ a conexiunii neliniare N se anulează.*

Tensorul de integrabilitate a distribuţiei orizontale N este dat de

$$ {R^i}_{jk} = {\overset{\circ}{R}{}^i}_{jk} - \{(fF_j^i)_{||k} - (fF_k^i)_{||j} + (fF_k^m)(fF_j^i)||_m - (fF_j^m)(fF_k^i)||_m\} \tag{1.11}$$

unde $_{||}$ şi $||$ sunt h- şi v-derivatele covariante în raport cu conexiunea Berwald $B\Gamma(\overset{\circ}{N})$.

Avem:

Propoziţia 1.4 *Tensorul de integrabilitate al distribuţiei orizontale N are expresia*
(1.12)

$$\begin{aligned}
R^i{}_{jk} = \; & \overset{\circ}{R^i}{}_{jk} - \{(\alpha F^i_j)_{||k} - (\alpha F^i_k)_{||j} + \\
& +\alpha(\overset{\circ}{l}_m a^{ih} + \alpha \frac{\partial a^{ih}}{\partial y^m})(F^m_k F_{hj} - F^m_j F_{hk})\} && \text{pentru } f = \alpha, \\
R^i{}_{jk} = \; & \overset{\circ}{R^i}{}_{jk} - \{(\beta F^i_j)_{||k} - (\beta F^i_k)_{||j} + \\
& +\beta(b_m a^{ih} + \beta \frac{\partial a^{ih}}{\partial y^m})(F^m_k F_{hj} - F^m_j F_{hk})\} && \text{pentru } f = \beta, \\
R^i{}_{jk} = \; & \overset{\circ}{R^i}{}_{jk} - \{(\alpha+\beta) F^i_j)_{||k} - (\alpha+\beta) F^i_k)_{||j} + \\
& +(\alpha+\beta)\left(l_m a^{ih} + (\alpha+\beta) \frac{\partial a^{ih}}{\partial y^m}\right)(F^m_k F_{hj} - F^m_j F_{hk})\} \text{pentru } f = \alpha+\beta
\end{aligned}$$

unde $_{||}$ *este h-derivata covariantă în raport cu conexiunea Berwald* $B\Gamma(\overset{\circ}{N})$.

Obţinem teorema:

Teorema 1.1 *Conexiunea neliniară f-canonică 1-omogenă N este integrabilă dacă şi numai dacă tensorul $R^i{}_{jk}$ se anulează.*

Observaţia 1.2 Dacă $\overset{\circ}{R^i}{}_{jk} = 0$ şi $F_{ij} = 0$, N este integabilă în fiecare caz din Propoziţia 1.4.

Teorema 1.2 *În parametrizarea canonică, curbele autoparalele ale conexiunii neliniare $N^i{}_j(x,y)$ sunt date de următoarele ecuaţii Lorentz:*

$$\frac{dx^i}{ds} = y^i, \quad \frac{d^2x^i}{ds^2} + \overset{\circ}{\gamma^i}{}_{jk}\,(x, \frac{dx}{ds})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = fF^i_j(x, \frac{dx}{ds})\frac{dx^j}{ds}. \tag{1.13}$$

Observaţie. Curbele date de (1.13) în parametrizarea canonică pot fi numite geodezice ale spaţiului GR^n.

Se observă că pentru $f = 1$ ecuaţiile (1.13) sunt chiar ecuaţiile Lorentz din [51].

Vom determina d-conexiunea metrică şi canonică $C\Gamma(N)$ a spaţiului Randers general $GR^n = (M, \alpha + \beta)$ considerând transformarea de d-conexiuni $t : C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N}) \longrightarrow C\Gamma(N)$ unde $C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N}) = (\overset{\circ}{F^i}{}_{jk}, \overset{\circ}{C^i}{}_{jk})$ este conexiunea Cartan asociată spaţiului Finsler $F^n = (M, \alpha)$.

Avem următoarea teoremă,[49]:

Teorema 1.3 *Coeficienţii d-conexiunii metrice canonice* $C\Gamma(N) = ({L^i}_{jk}, {C^i}_{jk})$ *depind numai de funcţia fundamentală* $L = \alpha + \beta$ *a spaţiului Randers general* GR^n *şi sunt daţi de simbolii lui Christoffel generalizaţi:*

$$(1.14)\qquad \begin{cases} L^i_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{is}\left(\dfrac{\delta g_{sk}}{\delta x^j} + \dfrac{\delta g_{js}}{\delta x^k} - \dfrac{\delta g_{jk}}{\delta x^s}\right), \\ C^i_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{is}\left(\dfrac{\partial g_{sk}}{\partial y^j} + \dfrac{\partial g_{js}}{\partial y^k} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial y^s}\right). \end{cases}$$

Ţinând cont de teorema precedentă, obţinem următorul rezultat nou:

Teorema 1.4 *d-conexiunea metrică şi canonică* $C\Gamma(N)$ *a spaţiului Randers general* $GR^n = (M, \alpha + \beta)$ *se obţine din* $C \overset{\circ}{\Gamma} (\overset{\circ}{N})$ *prin transformarea* $C \overset{\circ}{\Gamma} (\overset{\circ}{N}) \overset{t}{\longmapsto} C\Gamma(N)$ *dată de:*

$$(1.15)\qquad t : \begin{cases} {N^i}_j &= \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - f{F^i}_j, \\ {L^i}_{jk} &= \overset{\circ}{F}{}^i{}_{jk} + \mathcal{H}^i{}_{jk} + f{\Theta^i}_{jk}, \\ {C^i}_{jk} &= \overset{\circ}{C}{}^i{}_{jk} + \mathcal{V}^i{}_{jk}, \end{cases}$$

unde

$$(1.16)\qquad \begin{cases} \mathcal{H}^i{}_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{im}(\overset{\circ}{\nabla}{}^H_k g_{jm} + \overset{\circ}{\nabla}{}^H_j g_{mk} - \overset{\circ}{\nabla}{}^H_m g_{jk}) \\ \mathcal{V}^i{}_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{im}(\overset{\circ}{\nabla}{}^V_k g_{jm} + \overset{\circ}{\nabla}{}^V_j g_{mk} - \overset{\circ}{\nabla}{}^V_m g_{jk}) \\ \Theta^i{}_{jk} = g^{im}(F^s_k C_{jms} + F^s_j C_{mks} - F^s_m C_{kjs}) \end{cases}$$

$\overset{\circ}{\nabla}{}^H$ *şi* $\overset{\circ}{\nabla}{}^V$ *fiind h- şi v-derivatele covariante în raport cu* $C \overset{\circ}{\Gamma} (\overset{\circ}{N})$.

Demonstraţie. Folosind faptul că $C_{ijk} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ obţinem

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} = \overset{\circ}{\nabla}{}^H_k g_{ij} + \overset{\circ}{F}{}^m{}_{ik}\, g_{mj} + \overset{\circ}{F}{}^m{}_{jk}\, g_{im} + 2fF^m_k C_{ijm}.$$

Aplicând procedeul Christoffel, avem

$$\begin{aligned} {L^i}_{jk} \;=\; \overset{\circ}{F}{}^i{}_{jk} &+ \frac{1}{2} g^{im}(\overset{\circ}{\nabla}{}^H_k g_{jm} + \overset{\circ}{\nabla}{}^H_j g_{mk} - \overset{\circ}{\nabla}{}^H_m g_{jk}) + \\ &+ f g^{im}(F^s_k C_{jms} + F^s_j C_{mks} - F^s_m C_{kjs}). \end{aligned}$$

Pentru a demonstra a doua relaţie din (1.15), vom porni cu:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \overset{\circ}{\nabla}{}^V_k g_{ij} + \overset{\circ}{C}{}^m{}_{ik}\, g_{mj} + \overset{\circ}{C}{}^m{}_{jk}\, g_{im}.$$

Rezultă

$$C^i{}_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i{}_{jk} + \frac{1}{2} g^{im} (\overset{\circ}{\nabla}{}^V_k g_{jm} + \overset{\circ}{\nabla}{}^V_j g_{mk} - \overset{\circ}{\nabla}{}^V_m g_{jk}).$$

q.e.d.

În cele ce urmează, calculăm tensorii de curbură ai d-conexiunii metrice canonice $C\Gamma(N)$ a spaţiului Randers general GR^n cu ajutorul transformării de mai sus. Pentru aceasta, vom considera transformarea $t : C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N}) \longrightarrow C\Gamma(N)$ ca produs a două transformări de d-conexiuni:

$$C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N}) \overset{t_0}{\longmapsto} C\overline{\Gamma}(\overline{N}) \overset{t_1}{\longmapsto} C\Gamma(N)$$

unde

$$(1.17) \qquad t_0 : \begin{cases} \overline{N}{}^i{}_j &= \overset{\circ}{N}{}^i{}_j - fF^i_j \\ \overline{L}{}^i{}_{jk} &= \overset{\circ}{F}{}^i{}_{jk} + f\Theta^i{}_{jk} \\ \overline{C}{}^i{}_{jk} &= \overset{\circ}{C}{}^i{}_{jk} \end{cases}$$

and

$$(1.18) \qquad t_1 : \begin{cases} N^i{}_j &= \overline{N}{}^i{}_j \\ L^i{}_{jk} &= \overline{L}{}^i{}_{jk} + \mathcal{H}^i{}_{jk} \\ C^i{}_{jk} &= \overline{C}{}^i{}_{jk} + \mathcal{V}^i{}_{jk}. \end{cases}$$

Folosind transformarea t_0 se obţine:

$$(1.19) \qquad \begin{cases} \overline{R_h}{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{R}_h{}^i{}_{jk} + \overset{\circ}{\rho}_h{}^i{}_{jk} \\ \overline{P_h}{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{P}_h{}^i{}_{jk} + \overset{\circ}{\pi}_h{}^i{}_{jk} \\ \overline{S_h}{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{S}_h{}^i{}_{jk}, \end{cases}$$

unde

(1.20)

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\rho}_h{}^i{}_{jk} = & \overset{\circ}{\nabla}{}^H_k (f\Theta^i{}_{hj}) - \overset{\circ}{\nabla}{}^H_j (f\Theta^i{}_{hk}) + f\{F^s_k \dfrac{\partial \overset{\circ}{F}{}^i{}_{hj}}{\partial y^s} + F^s_k \dfrac{\partial (f\Theta^i{}_{hj})}{\partial y^s} - \\ & -F^s_j \dfrac{\partial \overset{\circ}{F}{}^i{}_{hk}}{\partial y^s} + F^s_j \dfrac{\partial (f\Theta^i{}_{hk})}{\partial y^s} + f\Theta^s{}_{hj}\Theta^i{}_{sk} - f\Theta^s{}_{hk}\Theta^i{}_{sj}\} - \\ & - \overset{\circ}{C}{}^i{}_{hs}\, ((fF^s_j)_{||k} - (fF^s_k)_{||j} + (fF^m_k)(fF^s_j)||_m - (fF^m_j)(fF^s_k)||_m) \\ \overset{\circ}{\pi}_h{}^i{}_{jk} = & \overset{\circ}{\nabla}{}^V_k (f\Theta^i{}_{hj}) + \overset{\circ}{C}{}^m{}_{jk}\, f\Theta^i{}_{hm} - \overset{\circ}{C}{}^i{}_{hm}\, (fF^m_j)||_k. \end{cases}$$

Din transformarea t_1 avem:

$$\begin{cases} R_h{}^i{}_{jk} = \overline{R_h}^i{}_{jk} + \overline{\rho}_h{}^i{}_{jk} \\ P_h{}^i{}_{jk} = \overline{P_h}^i{}_{jk} + \overline{\pi}_h{}^i{}_{jk} \\ S_h{}^i{}_{jk} = \overline{S_h}^i{}_{jk} + \overline{\sigma}_h{}^i{}_{jk}, \end{cases} \tag{1.21}$$

unde

(1.22)
$$\begin{cases} \overline{\rho}_h{}^i{}_{jk} = \overline{\nabla}^H_k \mathcal{H}^i{}_{jh} - \overline{\nabla}^H_j \mathcal{H}^i{}_{hk} + \mathcal{H}^s{}_{hj}\mathcal{H}^i{}_{sk} - \mathcal{H}^s{}_{hk}\mathcal{H}^i{}_{sj} + \mathcal{V}^i{}_{hs} \overset{\circ}{R}{}^s{}_{jk} \\ \overline{\pi}_h{}^i{}_{jk} = \overline{\nabla}^V_k \mathcal{H}^i{}_{hj} - \overline{\nabla}^H_j \mathcal{V}^i{}_{hk} + \mathcal{H}^i{}_{hs}\overline{C}^s{}_{jk} + \mathcal{H}^s{}_{kj}\overline{C}^i{}_{hs} + \mathcal{H}^s{}_{hj}\mathcal{V}^i{}_{sk} - \mathcal{H}^i{}_{sj}\mathcal{V}^s{}_{hk} \\ \overline{\sigma}_h{}^i{}_{jk} = \overline{\nabla}^V_k \mathcal{V}^i{}_{hj} - \overline{\nabla}^V_j \mathcal{V}^i{}_{hk} + \mathcal{V}^s{}_{hj}\mathcal{V}^i{}_{sk} - \mathcal{V}^i{}_{sj}\mathcal{V}^s{}_{hk}, \end{cases}$$

în care $\overline{\nabla}^H$ şi $\overline{\nabla}^V$ sunt h- şi v-derivatele covariante în raport cu conexiunea $C\overline{\Gamma}(\overline{N})$.

Teorema 1.5 *Tensorii de curbură ai d-conexiunii metrice canonice $C\Gamma(N)$ a spaţiului Randers general GR^n sunt daţi de formulele:*

$$\begin{cases} R_h{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{R}_h{}^i{}_{jk} + \rho_h{}^i{}_{jk} \\ P_h{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{P}_h{}^i{}_{jk} + \pi_h{}^i{}_{jk} \\ S_h{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{S}_h{}^i{}_{jk} + \sigma_h{}^i{}_{jk}, \end{cases} \tag{1.23}$$

unde

$$\rho_h{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{\rho}_h{}^i{}_{jk} + \overline{\rho}_h{}^i{}_{jk},\ \ \pi_h{}^i{}_{jk} = \overset{\circ}{\pi}_h{}^i{}_{jk} + \overline{\pi}_h{}^i{}_{jk},\ \ \sigma_h{}^i{}_{jk} = \overline{\sigma}_h{}^i{}_{jk}. \tag{1.24}$$

Ţinând cont de teorema de mai sus, putem scrie acum ecuaţiile Einstein ale spaţiilor Randers generale GR^n în raport cu d-conexiunea metrică şi canonică dată de noi în (1.15).

Teorema 1.6 *Ecuaţiile Einstein ale spaţiilor Randers generale GR^n, corespunzătoare d-conexiunii metrice canonice $C\Gamma(N)$ sunt date de*

$$\begin{cases} \overset{\circ}{R}_{ij} - \dfrac{1}{2}\overset{\circ}{R} a_{ij} + \overset{H}{t}_{ij} = \aleph \overset{H}{T}_{ij}, \quad \overset{\circ 1}{P}_{ij} + \overset{1}{\pi}_{ij} = \aleph \overset{1}{T}_{ij}, \\ \overset{\circ}{S}_{ij} - \dfrac{1}{2}\overset{\circ}{S} a_{ij} + \overset{V}{t}_{ij} = \aleph \overset{V}{T}_{ij}, \quad \overset{\circ 2}{P}_{ij} + \overset{2}{\pi}_{ij} = -\aleph \overset{2}{T}_{ij}, \end{cases} \tag{1.25}$$

în care $\overset{\circ}{R}_{ij}, \overset{\circ}{S}_{ij}, \overset{\circ 1}{P}_{ij}$ şi $\overset{\circ 2}{P}_{ij}$ sunt tensorii Ricci ai conexiunii Cartan $C\overset{\circ}{\Gamma}(\overset{\circ}{N})$ a spaţiului Finsler asociat $F^n = (M, \alpha)$, $\overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{S}$ fiind curburile sale scalare, $\overset{H}{T}_{ij}, \overset{V}{T}_{ij}, \overset{1}{T}_{ij}$

şi $\overset{2}{T}_{ij}$ *sunt componenetele câmpului tensorial energie-impuls,* $\aleph$ *este o constantă şi d-câmpurile tensoriale complementare* $\overset{H}{t}_{ij}$ *şi* $\overset{V}{t}_{ij}$ *sunt exprimate de*

$$\text{(1.26)} \qquad \begin{cases} \overset{H}{t}_{ij} = \rho_{ij} - \frac{1}{2}\{\rho_1 g_{ij} + \frac{1}{p} \overset{\circ}{R}\, l_i l_j - \overset{\circ}{R} \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j\} \\ \overset{V}{t}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2}\{\sigma_1 g_{ij} + \frac{1}{p} \overset{\circ}{S}\, l_i l_j - \overset{\circ}{S} \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j\} \end{cases}$$

unde

$$\text{(1.27)} \qquad \begin{cases} \rho_1 = g^{ij}\rho_{ij} - \frac{1}{p^2}\{\overset{\circ}{l}{}^i \overset{\circ}{l}{}^j (1 - \widetilde{l}^2) + \overset{\circ}{l}{}^i b^j + \overset{\circ}{l}{}^j b^i\} \overset{\circ}{R}_{ij}, \\ \sigma_1 = g^{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{p^2}\{\overset{\circ}{l}{}^i \overset{\circ}{l}{}^j (1 - \widetilde{l}^2) + \overset{\circ}{l}{}^i b^j + \overset{\circ}{l}{}^j b^i\} \overset{\circ}{S}_{ij}\,. \end{cases}$$

Demonstraţie. Ecuaţiile Einstein ale spaţiului GR^n în raport cu d-conexiunea $C\Gamma(N)$ au forma, [56],

$$\text{(1.28)} \qquad R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij} = \aleph \overset{H}{T}_{ij},\ S_{ij} - \frac{1}{2}S g_{ij} = \aleph \overset{V}{T}_{ij},\ P^1_{ij} = \aleph \overset{1}{T}_{ij},\ P^2_{ij} = -\aleph \overset{2}{T}_{ij}\,.$$

Luând în considerare $\rho_{ij} = \rho_i{}^h{}_{jh}, \sigma_{ij} = \sigma_i{}^h{}_{jh}, \overset{1}{\pi}_{ij} = \pi_i{}^h{}_{jh}, \overset{2}{\pi}_{ij} = \pi_i{}^h{}_{hj}$ şi formulele (1.23) avem

$$\text{(1.29)} \qquad R_{ij} = \overset{\circ}{R}_{ij} + \rho_{ij}, S_{ij} = \overset{\circ}{S}_{ij} + \sigma_{ij}, \overset{1}{P}_{ij} = \overset{\circ}{P}{}^1_{ij} + \overset{1}{\pi}_{ij}, \overset{2}{P}_{ij} = \overset{\circ}{P}{}^2_{ij} + \overset{2}{\pi}_{ij}$$

şi $R = \frac{1}{p}\overset{\circ}{R} + \rho_1,\ S = \frac{1}{p}\overset{\circ}{S} + \sigma_1$. Rezultă din (1.28), (1.29) şi din exprimarea lui g^{ij} că ecuaţiile Einstein sunt cele din (1.25). **q.e.d.**

2 Spaţii Randers de ordinul al doilea.

Fie M o varietate diferenţiabilă reală de dimensiune n. Notăm spaţiul Riemann $\mathcal{R}^n = (M, \gamma_{ij}(x))$ şi cu $Prol^2\mathcal{R}^n = (\widetilde{Osc^2}M, G)$ prelungirea sa la ordinul 2, conform Cap.2.

Conexiunea neliniară $\overset{\circ}{N}$ a spaţiului $Prol^2R^n$, are coeficienţii duali:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M^i_j} = \gamma^i_{jh} y^{(1)h}, \\ \underset{(2)}{M^i_j} = \frac{1}{2}(\Gamma \underset{(1)}{M^i_j} + \underset{(1)}{M^i_m} \underset{(1)}{M^m_j}) \end{cases}$$

unde

$$\Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}}.$$

Între coeficienţii conexiunii neliniare $\underset{(1)}{N^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{N^i_j}$ şi coeficienţii duali $\underset{(1)}{M^i_j}, \ldots, \underset{(k)}{M^i_j}$ au loc următorele relaţii:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M^i_j} = \underset{(1)}{N^i_j}, \\ \underset{(2)}{M^i_j} = \underset{(2)}{N^i_j} + \underset{(1)}{N^i_m}\underset{(1)}{N^m_j} \end{cases}$$

sau echivalentle lor

$$(2.2)' \qquad \begin{cases} \underset{(1)}{N^i_j} = \underset{(1)}{M^i_j}, \\ \underset{(2)}{N^i_j} = \underset{(2)}{M^i_j} - \underset{(1)}{M^i_m}\underset{(1)}{M^m_j}. \end{cases}$$

Baza adaptată conexiunii neliniare este $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\}$ în care

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \underset{(1)}{N^j_i}\dfrac{\partial}{\partial y^{(1)j}} - \underset{(2)}{N^j_i}\dfrac{\partial}{\partial y^{(2)j}}, \\ \dfrac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - \underset{(1)}{N^j_i}\dfrac{\partial}{\partial y^{(2)j}}. \end{cases}$$

Baza duală a bazei adaptate conexiunii neliniare este $\{dx^i, \delta y^{(1)i}, \delta y^{(2)i}\}$ unde:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \delta y^{(1)i} = dy^{(1)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dx^j, \\ \delta y^{(2)i} = dy^{(2)i} + \underset{(1)}{M^i_j}\, dy^{(1)j} + \underset{(2)}{M^i_j}\, dx^j. \end{cases}$$

Conform Cap.1, d-câmpurile vectoriale Liouville sunt date de:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} z^{(1)m} &= y^{(1)m}, \\ z^{(2)m} &= y^{(2)m} + \frac{1}{2}\gamma^m_{ij}y^{(1)i}y^{(1)j}. \end{aligned}$$

Fie "metrica" Riemann definită pe varietatea $\widetilde{E} = \widetilde{Osc^2 M}$:

$$\alpha^2(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \gamma_{ij}(x)z^{(2)i}z^{(2)j}.$$

Teorema 2.1 *Aceasta are proprietăţile:*

1) α^2 *este un Lagrangian regulat de ordinul doi;*

2) α^2 *depinde numai de metrica* $\gamma_{ij}(x)$ *a spaţiului Riemann* $\mathcal{R}^n$*;*

3) Tensorul fundamental al lui α^2 *este dat de*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha^2}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} = \gamma_{ij}(x).$$

Definim

$$\beta(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = b_i(x) z^{(2)i}(x, y^{(1)}, y^{(2)})$$

unde $b_i(x)$ este potenţialul electromagnetic definit pe M, în cât $b_i(x) = b_i(\pi(u))$ cu $u \in \widetilde{E},\ \pi(u) = x$.

Definiţia 2.1 *Funcţia* $L : Osc^2M \to I\!R$ *dată de* $L = \alpha + \beta$ *sau*

$$L(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \sqrt{\gamma_{ij}(x) z^{(2)i} z^{(2)j}} + b_i(x) z^{(2)i} \tag{2.6}$$

se numeşte metrică Randers de ordinul doi.

Spaţiile Randers de ordinul al doilea le vom nota cu $R^{(2)n} = (M, \alpha + \beta)$.

Vom dovedi că aceste spaţii sunt spaţii Finsler de ordinul al doilea.

Avem următoarea teoremă importantă, care ne dă:

Teorema 2.2 *Câmpul tensorial fundamental al Lagrangianului* $L^2 = (\alpha + \beta)^2$ *este dat de*

$$g_{ij} = (p\gamma_{ij} + l_i l_j) - p\overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j \tag{2.7}$$

unde $\overset{\circ}{l}_i = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}},\ l_i = \overset{\circ}{l}_i + b_i,\ p = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}.$

Demonstraţie. Cum $\overset{\circ}{l}_i = \dfrac{1}{\alpha}\gamma_{ij} z^{(2)j}$ atunci avem $\gamma^{ij}\overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j = 1$.

Vom nota: $\overset{\circ}{l}^i = \dfrac{1}{\alpha} z^{(2)i}$ şi $z_i^{(2)} = \gamma_{ij} z^{(2)j}$. În aceste notaţii obţinem:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} = (\alpha + \beta)\frac{\partial^2(\alpha + \beta)}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} + \frac{\partial(\alpha + \beta)}{\partial y^{(2)i}}\frac{\partial(\alpha + \beta)}{\partial y^{(2)j}} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha}[\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}}] + l_i l_j = p[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha^2}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} - \frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)j}}] + l_i l_j =$$

$$= p(\gamma_{ij} - \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j) + l_i l_j$$

Pentru a demonstra că spaţiile $R^{(2)n}$ sunt spaţii Finsler avem nevoie de următoarele doua leme, a căror demonstraţie nu este dificilă:

Lema 2.1 *Fie* $||A_{ij}||$, $(i, j = 1, .., n)$ *o matrice reală nesingulară, pentru care* $||A_{ij}||^{-1} = ||A^{ij}||$. *Atunci matricea* $||B_{ij}||$ *ce are elementele* $B_{ij} = A_{ij} + c_i c_j$, *astfel încât* $1 + c^2 \neq 0$, $c^2 = A^{ij} c_i c_j$, *este nesingulară. Determinantul acesteia este* $det||B^{ij}|| = (1 + c^2) det||A_{ij}||$ *iar* $||B_{ij}||^{-1}$ *are elementele* $B^{ij} = A^{ij} - \frac{1}{1 + c^2} c^i c^j$, $(c^i = A^{ij} c_j)$.

Lema 2.2 *Dacă* $||A_{ij}||$, $(i, j = 1, .., n)$ *este o matrice reală nesingulară, având ca elemente ale inversei pe* A^{ij} *iar* d_i $(i = 1, .., n)$ *sunt numere reale pentru care* $1 - d^2 \neq 0$, $d^2 = A^{ij} d_i d_j$, *atunci matricea cu elementele* $B_{ij} = A_{ij} - d_i d_j$ *este inversabilă. Ea are determinantul* $det||B^{ij}|| = (1 - d^2) det||A_{ij}||$ *şi inversa sa are elementele* $B^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{1 - d^2} d^i d^j$, $(d^i = A^{ij} d_j)$.

Vom demonstra acum următoarea teoremă:

Teorema 2.3 *Spaţiul* $(M, \alpha + \beta)$ *este un spaţiu Finsler de ordinul doi.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm următoarele proprietăţi:

1. L este de clasă C^∞ pe $Osc^2 M \setminus \{0\}$ şi continuă pe secţiunea nulă;
2. L este pozitiv pe un deschis, unde $\beta \geq 0$;
3. L este 2-omogen pe fibrele lui $Osc^2 M$;
4. Hessiana având elementele:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial y^{(2)i} \partial y^{(2)j}} \tag{2.8}$$

este pozitiv definită.

L este de clasă C^∞ pe $Osc^2 M \setminus \{0\}$ şi continuă pe secţiunea nulă a surjecţiei canonice $\pi : Osc^2 M \to M$ deoarece α şi β au aceste proprietăţi. Este cunoscut că $z^{(2)i}$ este 2-omogen pe fibrele lui $Osc^2 M$, adică $h_t z^{(2)i} = t^2 z^{(2)i}$. Pentru a arăta proprietatea 4. aplicâm Lema 1.1 tensorului

$$B_{ij} = p\gamma_{ij} + l_i l_j$$

şi luând $\tilde{l^2} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} l_i l_j \geq 0$ obţinem $1 + \tilde{l^2} > 0$.

Urmează că $||B_{ij}||$ este nesingulară şi

$$det||B_{ij}|| = (1 + \tilde{l^2}) p^n det||\gamma_{ij}||$$

cu

$$B^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+\widetilde{l^2}}\widetilde{l^i}\widetilde{l^j}$$

unde $\widetilde{l^i} = \frac{1}{p}\gamma^{mi}l_m$.

Aplicând Lema 1.2 lui g_{ij} obţinem

$$g^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+\widetilde{l^2}}\widetilde{l^i}\widetilde{l^j} + \frac{1}{1-\widetilde{d^2}}\widetilde{d^i}\widetilde{d^j}$$

unde $\widetilde{d^i} = B^{ij}\sqrt{p}\overset{\circ}{l_j}$. Cum $1-\widetilde{d^2} = \dfrac{p}{1+\widetilde{l^2}}$ obţinem că

$$det||g_{ij}|| = (1-\widetilde{d^2})det||B_{ij}|| = (1-\widetilde{d^2})(1+\tilde{l}^2)p^n det||\gamma_{ij}|| = p^{n+1}det||\gamma_{ij}||$$

unde $p > 0$ şi γ_{ij} este pozitiv definit. **q.e.d.**

Se demonstrează prin calcul direct:

Propoziţia 2.1 g^{ij}*contravariant este dat de:*

$$g^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{p^2}[\overset{\circ}{l^i}\overset{\circ}{l^j}(1-\tilde{l}^2) + \overset{\circ}{l^i}b^j + \overset{\circ}{l^j}b^i] \tag{2.9}$$

unde $\tilde{l}^2 = \frac{1}{p}\gamma^{ij}l_il_j$.

Vom determina acum *2*-spray canonic şi conexiunea neliniară canonică.

Fie $\overset{\circ}{G^i}$ coeficienţii 2-sprayului canonic determinat de I.Bucataru [19] , în cazul $L^{(2)n} = (M, L(x, y^{(1)}, y^{(2)})$.

Acesta are coeficienţii:

$$3\overset{\circ}{G^i} = y^{(1)j}\underset{(2)}{\overset{\circ}{M^i_j}} + 2y^{(2)j}\underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_j}}. \tag{2.10}$$

Considerăm coeficienţii:

$$G^i(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \overset{\circ}{G^i}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) - F^i_j(x)z^{(2)j} \tag{2.11}$$

unde $F_{mj}(x) = \dfrac{\partial b_j}{\partial x^m} - \dfrac{\partial b_m}{\partial x^j}$ este tensorul electromagnetic şi $F^i_j(x) = \gamma^{im}(x)F_{mj}(x)$.

Teorema 2.4 G^i *din (2.2) sunt coeficienţii locali ai unui 2-spray, care depinde numai de metrica spaţiului Riemann* $\mathcal{R}^n = (M, \gamma_{ij}(x))$ *şi de câmpul electromagnetic* β.

Având un 2-spray, putem determina coeficienţii unei conexiuni liniare.

Propoziţia 2.2 *Coeficienţii duali ai conexiunii neliniare N, determinate numai de un 2-spray ce are coeficienţii G^i, sunt daţi de:*

$$(2.12)\qquad \begin{cases} \underset{(1)}{M^i_j} = \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} - F^i_j, \\ \underset{(2)}{M^i_j} = \underset{(2)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} - F^i_m \gamma^m_{jk} y^{(1)k} + \frac{1}{2} F^i_m F^m_j. \end{cases}$$

În consecinţă, obţinem:

Propoziţia 2.3 *Coeficienţii conexiunii neliniare sunt de forma:*

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \underset{(1)}{N^i_j} = \underset{(1)}{\overset{\circ}{N}{}^i_j} - F^i_j, \\ \underset{(2)}{N^i_j} = \underset{(2)}{\overset{\circ}{N}{}^i_j} + F^m_j \gamma^i_{mk} y^{(1)k} - \frac{1}{2} F^i_m F^m_j. \end{cases}$$

Baza adaptată conexiunii neliniare N se exprimă într-o formă foarte simplă:

Propoziţia 2.4 *Dacă* $\{\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i}, \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\}$ *este baza adaptată conexiunii neliniare* $\overset{\circ}{N}$, *atunci baza adaptată conexiunii neliniare N este dată de:*

$$(2.14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i} + F^j_i \dfrac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)j}} + \dfrac{1}{2} F^j_m F^m_i \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)j}} \\ \dfrac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \dfrac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}} + F^j_i \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)j}} \\ \dfrac{\delta}{\delta y^{(2)i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)i}}. \end{cases}$$

Vom determina în continuare d-tensorii de torsiune şi de curbură ai conexiunii Berwald. Pentru aceasta, îi vom raporta descompunerii directe corespunzătoare bazei adaptate (2.14).

Propoziţia 2.5 *Conexiunea Berwald* $B\Gamma(N) = (B^i_{jk}, 0, 0)$ *determinată de conexiunea neliniară N coincide cu conexiunea Berwald* $B\Gamma(\overset{\circ}{N})$ *determinată de conexiunea neliniară* $\overset{\circ}{N}$.

Demonstraţie.Într-adevăr, $B^i_{jk} = \dfrac{\delta \underset{(1)}{N^i_j}}{\delta y^{(1)k}} = \dfrac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N^i_j}}}{\delta y^{(1)k}} = \overset{\circ}{B^i_{jk}}$. **q.e.d.**

Fie **T** tensorul de torsiune al conexiunii Berwald:

$$\mathbf{T}(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]. \tag{2.15}$$

Tensorul **T** din (2.15) poate fi evaluat prin $h-$, v_1-, şi v_2- componentele câmpurilor vectoriale $\mathbf{T}(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j})$, $\mathbf{T}(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}})$, $\mathbf{T}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)j}})$, $(\alpha,\ \beta = 1,2)$.

Avem, [49], următoarea teoremă:

Teorema 2.5 *Croşetele Lie ale câmpurilor vectoriale din baza adaptată* $\{\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^i}, \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\}$ *sunt date de:*

$$\begin{aligned}
&[\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^j}, \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^k}] = \underset{(01)}{R}{}^i{}_{jk} \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(02)}{R}{}^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\\
&[\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^j}, \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)k}}] = \underset{(11)}{B}{}^i{}_{jk} \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(12)}{B}{}^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\\
&[\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}] = \underset{(21)}{B}{}^i{}_{jk} \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(22)}{B}{}^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\\
&[\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)j}}, \frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)k}}] = \underset{(12)}{R}{}^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},\\
&[\frac{\overset{\circ}{\delta}}{\delta y^{(1)j}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}] = \underset{(21)}{B}{}^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\underset{(01)}{R}{}^i{}_{jk} = \frac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N^i_j}}}{\delta x^k} - \frac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N^i_k}}}{\delta x^j},\\
&\underset{(02)}{R}{}^i{}_{jk} = \underset{(1)}{N^i_m} \underset{(01)}{R}{}^m{}_{jk} + \frac{\delta \underset{(2)}{\overset{\circ}{N^i_j}}}{\delta x^k} - \frac{\delta \underset{(2)}{\overset{\circ}{N^i_k}}}{\delta x^j},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$
(2.17)' \qquad
\begin{aligned}
&\underset{(11)}{B}{}^{i}_{\ jk} = \frac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{j}}{\delta y^{(1)k}} = B^{i}_{jk}, \quad \underset{(12)}{B}{}^{i}_{\ jk} = \underset{(1)}{N}{}^{i}_{m} \underset{(11)}{B}{}^{m}_{\ jk} + \frac{\delta \underset{(2)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{j}}{\delta y^{(1)k}} - \frac{\delta \underset{(2)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{k}}{\delta y^{(1)j}},\\
&\underset{(21)}{B}{}^{i}_{\ jk} = \frac{\partial \underset{(1)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{j}}{\partial y^{(2)k}}, \quad \underset{(22)}{B}{}^{i}_{\ jk} = \underset{(1)}{N}{}^{i}_{m} \underset{(21)}{B}{}^{m}_{\ jk} + \frac{\partial \underset{(2)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{j}}{\partial y^{(2)k}},\\
&\underset{(12)}{R}{}^{i}_{\ jk} = \frac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{j}}{\delta y^{(1)k}} - \frac{\delta \underset{(1)}{\overset{\circ}{N}}{}^{i}_{k}}{\delta y^{(1)j}}.
\end{aligned}
$$

Din descompunerea tensorului $\mathbf{T}$ în baza adaptată obţinem:

$$
(2.18) \qquad
\begin{aligned}
&\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta x^{j}}\right) = T^{i}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^{i}} + \underset{(1)}{R}{}^{i}_{jk}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(2)}{R}{}^{i}_{jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}\right) = \underset{(11)}{P}{}^{i}_{\ jk}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(12)}{P}{}^{i}_{\ jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}\right) = \underset{(21)}{P}{}^{i}_{\ jk}\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \underset{(22)}{P}{}^{i}_{\ jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}\right) = \underset{(1)}{Q}{}^{i}_{jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}\right) = \underset{(2)}{Q}{}^{i}_{jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&\mathbf{T}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Utilizând teorema precedentă, putem să dăm expresiile locale ale d-tensorilor de torsiune:

Teorema 2.6 *d-tensorii de torsiune ai conexiunii Berwald $B\Gamma(N)$ au în baza adaptată (2.6) următoarele expresii :*

(2.19)

$$
\begin{aligned}
&h\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta x^{j}}\right) = T^{i}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^{i}}, \quad v_{\alpha}\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta x^{j}}\right) = \underset{(\alpha)}{R}{}^{i}_{jk}\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)i}} \quad (\alpha = 1, 2)\\
&h\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}\right) = 0, \quad v_{\beta}\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^{k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}\right) = \underset{(\alpha\beta)}{P}{}^{i}_{\ jk}\frac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)\\
&h\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}\right) = v_{1}\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}\right) = 0, \quad v_{2}\mathbf{T}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}}\right) = \underset{(\alpha)}{Q}{}^{i}_{jk}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}\\
&h\mathbf{T}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}\right) = v_{\alpha}\mathbf{T}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}, \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2),
\end{aligned}
$$

unde

(2.20)

$$T^i_{jk} = B^i_{jk} - B^i_{kj},$$

$$\underset{(1)}{R}{}^i_{jk} = \underset{(01)}{R}{}^i_{kj} + F^t_j \underset{(11)}{B}{}^i_{kt} - F^t_k \underset{(11)}{B}{}^i_{jt} + \frac{\partial F^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial F^i_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} F^t_m (F^m_j \underset{(21)}{B}{}^i_{kt} - F^m_k \underset{(21)}{B}{}^i_{jt}),$$

$$\underset{(2)}{R}{}^i_{jk} = \underset{(02)}{R}{}^i_{kj} + F^i_m \underset{(1)}{R}{}^m_{jk} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial (F^m_t F^t_j)}{\partial x^k} - \frac{\partial (F^m_t F^t_k)}{\partial x^j}\Big) + F^t_j \underset{(12)}{B}{}^i_{kt} - F^t_k \underset{(12)}{B}{}^i_{jt} +$$

$$\frac{1}{2} F^m_s (F^t_k F^s_j \underset{(21)}{B}{}^i_{tm} - F^t_j F^s_k \underset{(21)}{B}{}^i_{mt}) + \frac{1}{2} F^t_m (F^m_j \underset{(22)}{B}{}^i_{kt} - F^m_k \underset{(22)}{B}{}^i_{jt}) - F^m_j F^t_k \underset{(12)}{R}{}^i_{mt}$$

$$\underset{(11)}{P}{}^i_{jk} = B^i_{jk} - \underset{(11)}{B}{}^i_{kj} - F^t_j \underset{(21)}{B}{}^i_{kt}\ \underset{(12)}{P}{}^i_{jk} = - \underset{(12)}{B}{}^i_{kj} + F^i_m \underset{(11)}{B}{}^m_{kj} + F^i_m F^t_j - F^m_k F^t_j \underset{(21)}{B}{}^i_{mt} -$$

$$F^m_j \underset{(22)}{B}{}^i_{km} - \frac{\partial F^i_j}{\partial x^k} - F^m_k \underset{(12)}{R}{}^i_{mj}$$

$$\underset{(21)}{P}{}^i_{jk} = - \underset{(21)}{B}{}^i_{kj},\ \underset{(22)}{P}{}^i_{jk} = B^i_{jk} - F^i_m \underset{(21)}{B}{}^m_{kj} - F^m_k \underset{(21)}{B}{}^i_{mj} - \underset{(22)}{B}{}^i_{kj}$$

$$\underset{(1)}{Q}{}^i_{jk} = \underset{(12)}{R}{}^i_{jk} + F^m_k \underset{(21)}{B}{}^i_{jm} - F^m_j \underset{(21)}{B}{}^i_{km},\ \underset{(2)}{Q}{}^i_{jk} = - \underset{(21)}{B}{}^i_{kj}.$$

Cum componentele esenţiale ale d-tensorului de curbură $\mathbf{R}$, corespunză tor N-conexiunii liniare D, sunt

$$\mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j})\frac{\delta}{\delta x^h}, \mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)k}}, \frac{\delta}{\delta x^j})\frac{\delta}{\delta x^h}, \mathbf{R}(\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}})\frac{\delta}{\delta x^h}, \mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}})\frac{\delta}{\delta x^h}$$

putem să calculăm d-câmpurile de tensori $R_h{}^i{}_{jk}$, $\underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jk}$, $\underset{(21)}{S}{}_h{}^i{}_{jk}$, $\underset{(\alpha\alpha)}{S}{}_h{}^i{}_{jk}$, $(\alpha = 1, 2)$.

Obţinem:

Propoziţia 2.6 *Conexiunea Berwald $B\Gamma(N)$ are d-tensorii de curbură exprimaţi de următoarele formule:*

(2.21)

$$\mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j})\frac{\delta}{\delta x^h} = R_h{}^i{}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i},$$

$$\mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)k}}, \frac{\delta}{\delta x^j})\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(\alpha)}{P}{}_h{}^i{}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\mathbf{R}(\frac{\partial}{\partial y^{(2)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)j}})\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(21)}{S}{}_h{}^i{}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i},$$

$$\mathbf{R}(\frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)k}}, \frac{\delta}{\delta y^{(\alpha)j}})\frac{\delta}{\delta x^h} = \underset{(\alpha\alpha)}{S}{}_h{}^i{}_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

unde

$$R_{h\ jk}^{\ i} = \frac{\overset{\circ}{\delta} B^i_{hj}}{\delta x^k} - \frac{\overset{\circ}{\delta} B^i_{hk}}{\delta x^j} + B^m_{hj} B^i_{mk} - B^m_{hk} B^i_{mj} + F^m_k \frac{\partial B^i_{hk}}{\partial y^{(2)m}} - F^m_j \frac{\partial B^i_{hj}}{\partial y^{(2)m}},$$

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} \underset{(1)}{P}{}_{h\ jk}^{\ i} &= \frac{\overset{\circ}{\delta} B^i_{hj}}{\delta y^{(1)k}} + F^m_k \frac{\partial B^i_{hj}}{\partial y^{(2)m}}, \\ \underset{(2)}{P}{}_{h\ jk}^{\ i} &= \frac{\partial B^i_{hj}}{\partial y^{(2)k}}, \\ \underset{(\alpha\alpha)}{S}{}_{h\ jk}^{\ i} &= 0, (\alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

3 Spaţii Randers de ordinul k.

Fie M o varietate reală, de clasă C^∞ şi de dimensiune n. Notăm cu $\mathcal{R}^n = (M, \gamma_{ij}(x))$ spaţiul Riemann şi prin $Prol^k\mathcal{R}^n = (Osc^k M, G)$ prelungirea sa de ordin k.

Considerăm d-câmpul vectorial Liouville:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} z^{(1)m} = y^{(1)m}, \\ z^{(2)m} = \frac{1}{2}[\Gamma z^{(1)m} + \gamma^m_{ij} z^{(1)i} z^{(1)j}], \cdots, \\ z^{(k)m} = \frac{1}{k}[\Gamma z^{(k-1)m} + \gamma^m_{ij} z^{(1)j} z^{(k-1)i}] \end{cases}$$

unde

$$\Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + ... + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}.$$

Avem, [49], următoarea teoremă:

Teorema 3.1 *Funcţia $\alpha^2 = \gamma_{ij} z^{(k)i} z^{(k)j}$ este un Lagrangian diferenţiabil care are proprietăţile:*

1) α^2 este global definit pe $\widetilde{Osc^k M}$;

2) α^2 este un Lagrangian regulat;

3) α^2 depinde numai de metrica $\gamma_{ij}(x)$ a spaţiului Riemann $\mathcal{R}^n = (M, \gamma_{ij}(x))$;

4) Tensorul fundamental al lui α^2 este dat de

$$(3.2)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^2}{\partial y^{(k)i}\partial y^{(k)j}} = \gamma_{ij}(x).$$

Să considerăm

$$\beta(x, y^{(1)}, .., y^{(k)}) = b_i(x) z^{(k)i} \tag{3.3}$$

unde $b_i(x)$ este potenţialul electromagnetic şi are semnificaţie fizică.

Funcţia $F : Osc^k M \to R$ este dată de $F = \alpha + \beta$ sau

$$F(x, y^{(1)}, .., y^{(k)}) = \sqrt{\gamma_{ij}(x) z^{(k)i} z^{(k)j}} + b_i(x) z^{(k)i}. \tag{3.4}$$

Putem da următoarea teoremă:

Teorema 3.2 *Câmpul tensorial fundamental al Lagrangianului $F^2 = (\alpha + \beta)^2$ este dat de*

$$g_{ij} = (p\gamma_{ij} + l_i l_j) - p\overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j \tag{3.5}$$

unde $\overset{\circ}{l}_i = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y^{(k)i}}$, $l_i = \overset{\circ}{l}_i + b_i$, $p = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}$.

Demonstraţie. Cum $\overset{\circ}{l}_i = \dfrac{1}{\alpha} \gamma_{ij} z^{(k)j}$ atunci avem $\gamma^{ij} \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j = 1$.

Vom nota: $\overset{\circ}{l}{}^i = \dfrac{1}{\alpha} z^{(k)i}$ şi $z_i^{(k)} = \gamma_{ij} z^{(k)j}$. În aceste notaţii obţinem:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} = (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 (\alpha + \beta)}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} + \frac{\partial (\alpha + \beta)}{\partial y^{(k)i}} \frac{\partial (\alpha + \beta)}{\partial y^{(k)j}} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} [\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}}] + l_i l_j = p[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^2}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}} - \frac{\partial \alpha}{\partial y^{(k)i}} \frac{\partial \alpha}{\partial y^{(k)j}}] + l_i l_j =$$

$$= p(\gamma_{ij} - \overset{\circ}{l}_i \overset{\circ}{l}_j) + l_i l_j$$

q.e.d.

Vom demonstra acum următoarea teoremă care probează existenţa spaţiilor Finsler de ordin superior:

Teorema 3.3 *Perechea $F^{(k)n} = (M, F)$ este un spaţiu Finsler de ordin k.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm următoarele proprietăţi:

1. F este de clasă C^∞ pe $\widetilde{E} = Osc^k M \setminus \{0\}$ şi continuă pe secţiunea nulă;
2. F este pozitiv pe un deschis, unde $\beta \geq 0$;
3. F este k-omogen pe fibrele lui E;

4. Hessiana având elementele:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^{(k)i}\partial y^{(k)j}} \tag{3.6}$$

este positiv definită.

F este de clasă C^∞ pe $\widetilde{E}$ şi continuă pe secţiunea nulă a surjecţiei canonice $\pi : E \to M$ deoarece α şi β au aceste proprietăţi. Este cunoscut că $z^{(k)i}$ este k-omogen pe fibrele lui $Osc^k M$, adică $h_t z^{(k)i} = t^k z^{(k)i}$.

Aplicând Lema 2.1 tensorului

$$B_{ij} = p\gamma_{ij} + l_i l_j$$

şi luând $\widetilde{l^2} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} l_i l_j \geq 0$ obţinem $1 + \widetilde{l^2} > 0$.

Urmează că $||B_{ij}||$ este nesingulară şi

$$det||B_{ij}|| = (1 + \widetilde{l^2})p^n det||\gamma_{ij}||$$

cu

$$B^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+\widetilde{l^2}}\widetilde{l^i}\widetilde{l^j}$$

unde $\widetilde{l^i} = \frac{1}{p}\gamma^{mi} l_m$.

Aplicând Lema 2.2 lui g_{ij} obţinem

$$g^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+\widetilde{l^2}}\widetilde{l^i}\widetilde{l^j} + \frac{1}{1-\widetilde{d^2}}\widetilde{d^i}\widetilde{d^j}$$

unde $\widetilde{d^i} = B^{ij}\sqrt{p}\overset{\circ}{l_j}$. Cum $1 - \widetilde{d^2} = \frac{p}{1+\widetilde{l^2}}$ obţinem că

$$det||g_{ij}|| = (1-\widetilde{d^2})det||B_{ij}|| = (1-\widetilde{d^2})(1+\widetilde{l^2})p^n det||\gamma_{ij}|| = p^{n+1}det||\gamma_{ij}||$$

unde $p > 0$ şi γ_{ij} este pozitiv definit. **q.e.d.**

Spaţiul Finsler $F^{(k)n} = (M, F)$ se numeşte spaţiu Randers de ordin superior. Se demonstrează ,[51], următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.1 *g^{ij}contravariant este dat de:*

$$g^{ij} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} - \frac{1}{p^2}[\overset{\circ}{l^i}\overset{\circ}{l^j}(1-\widetilde{l^2}) + \overset{\circ}{l^i}b^j + \overset{\circ}{l^j}b^i] \tag{3.7}$$

unde $\widetilde{l^2} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} l_i l_j$.

În continuare vom determina coeficienţii unui k-spray iar apoi conexiunea neliniară. Conexiunea neliniară $\overset{\circ}{N}$ a spaţiului $Prol^k\mathcal{R}^n$, are coeficienţii duali daţi de:

$$(3.8)\qquad \begin{cases} \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} = \dfrac{\partial \overset{\circ}{G}{}^i}{\partial y^{(k)j}} = \gamma^i_{jh} y^{(1)h}, \\ \underset{(2)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} = \dfrac{1}{2}(\Gamma \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} + \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_m} \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^m_j}), \cdots \\ \underset{(k)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} = \dfrac{1}{k}(\Gamma \underset{(k-1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} + \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_m} \underset{(k-1)}{\overset{\circ}{M}{}^m_j}) \end{cases}$$

unde

$$(3.9)\qquad \Gamma = y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + ... + ky^{(k)i}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)i}}.$$

Pornind de la k-sprayul canonic determinat de I.Bucataru [19], dat în forma:

$$(3.10)\qquad (k+1)\overset{\circ}{G}{}^i = y^{(1)j} \underset{(k)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} + 2y^{(2)j} \underset{(k-1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j} + ... + ky^{(k)j} \underset{(1)}{\overset{\circ}{M}{}^i_j},$$

vom considera coeficienţii:

$$(3.11)\qquad G^i = \overset{\circ}{G}{}^i - F^i_j(x) z^{(k)j}$$

unde $F^i_j(x) = \gamma^{im}(x) F_{mj}(x)$ şi

$$(3.12)\qquad F_{mj}(x) = \frac{\partial b_j}{\partial x^m} - \frac{\partial b_m}{\partial x^j}$$

este tensorul electromagnetic.

Teorema 3.4 *G^i din (3.11) sunt coeficienţii unui k-spray, care depinde numai de metrica spaţiului Riemann$\mathcal{R}^n = (M, \gamma_{ij}(x))$ şi de câmpul electromagnetic β.*

Demonstraţie.În raport cu o transformare de coordonate locale, coeficienţii G^i se schimbă după cum urmează:

$$(3.13)\qquad (k+1)\widetilde{G^i} = (k+1)G^j\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} - (y^{(1)j}\frac{\partial \widetilde{y^{(k)i}}}{\partial x^j} + ... + ky^{(k)j}\frac{\partial \widetilde{y^{(k)i}}}{\partial y^{(k-1)j}}).$$

q.e.d.

Având un k-spray, putem determina coeficienţii conexiunii neliniare.

Teorema 3.5 *Mulţimea de funcţii*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\underset{(1)}{M^i_j} = \underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - F^i_j, \\
\underset{(2)}{M^i_j} = \underset{(2)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - \overset{2}{F^i_j}, \\
\dots \\
\underset{(k)}{M^i_j} = \underset{(k)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - \overset{k}{F^i_j},
\end{array}
\right.
\tag{3.14}
$$

ne dau coeficienţii duali ai conexiunii neliniare N, determinaţi de k-spray numai cu coeficienţii G^i.

În formula precedentă, $\overset{\alpha}{F^i_j}$, $(\alpha = 2, .., k)$ sunt daţi de următoarele formule:

$$
\alpha \overset{\alpha}{F^i_j} = \Gamma(\overset{\alpha-1}{F^i_j}) + \underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_m}} \overset{\alpha-1}{F^m_j} + \overset{\alpha-1}{F^i_m} \underset{(k-1)}{\overset{\circ}{M^m_j}} - F^i_m \overset{\alpha-1}{F^m_j}.
\tag{3.15}
$$

Demonstraţie. Construim coeficienţii duali, pornind de la coeficienţii k-sprayului de mai sus:

$$
\underset{(1)}{M^i_j} = \frac{\partial G^i}{\partial y^{(k)j}} = \frac{\partial \overset{\circ}{G^i}}{\partial y^{(k)j}} - F^i_j = \underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - F^i_j
$$

$$
\underset{(2)}{M^i_j} = \frac{1}{2}(\Gamma \underset{(1)}{M^i_j} + \underset{(1)}{M^i_m} \underset{(1)}{M^m_j}) = \frac{1}{2}[\Gamma(\underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - F^i_j) + (\underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_m}} - F^i_m)(\underset{(1)}{\overset{\circ}{M^m_j}} - F^m_j)] = \underset{(2)}{\overset{\circ}{M^i_j}} - \overset{2}{F^i_j}
$$

unde

$$
\overset{2}{F^i_j} = \frac{1}{2}[\Gamma(F^i_j) + \underset{(1)}{\overset{\circ}{M^i_m}} \overset{\alpha-1}{F^m_j} + F^i_m \underset{(1)}{\overset{\circ}{M^m_j}} - F^i_m F^m_j].
\tag{3.16}
$$

Prin inducţie după α se demonstrează că relaţia (3.15) este adevărată. **q.e.d.**

Evident, pentru $k = 2$, rezultatele de aici coincid cu cele date în secţiunea anterioară.

Putem acum dezvolta teoria, cu preţul unor calcule extrem de laborioase, în sensul celei din §1. al prezentului capitol. Ne oprim însă aici, deoarce vom continua în capitolul următor teoria generală a spaţiilor Finsler de ordinul k cu (α, β)-metrică.

CAPITOLUL 5

Spaţii Finsler de ordin superior cu (α, β)-metrici.

Vom defini spaţiile Finsler de ordinul al doilea cu (α, β)-metrică şi ne vom ocupa aici, în special, de funcţia fundamentală, tensorul fundamental şi energiile de ordin superior. Spaţiile Randers apar ca un caz particular. În plus, tot cazuri particulare vor fi şi spaţiile Kropina de ordinul al doilea sau spaţiile Matsumoto de ordinul al doilea şi o nouă clasă de spaţii Finsler de ordinul al doilea cu (α, β)-metrică.

1 Funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler $F^{(2)n}$ cu (α, β)-metrică.

În Capitolul 4 am prezentat studiul spaţiilor Randers de ordinul al doilea. Acestea sunt spaţii Finsler $F^{(2)n} = (M, F(x, y^{(1)}, y^{(2)}))$ în care

$$F(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \check{F}(\alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})) = \alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}) + \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})$$

în care $\beta > 0$ pe un deschis din varietatea diferenţiabilă $\widetilde{E} = Osc^2M \setminus \{0\}$, iar

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \gamma_{ij}(x) z^{(2)i} z^{(2)j} \\ \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = b_i(x) z^{(2)i} \end{cases}$$

şi $z^{(2)i}$ este d-câmpul vectorial Liouville, (2.5), Cap.4:

$$(1.2) \qquad z^{(2)i} = y^{(2)i} + \frac{1}{2}\gamma^i_{jk}(x) y^{(1)j} y^{(1)k}.$$

Vom defini acum spaţiile Finsler de ordinul al doilea cu (α, β)-metrică.

Definiţia 1.1 *Un spaţiu Finsler de ordinul al doilea $F^{(2)n} = (M, F(x, y^{(1)}, y^{(2)}))$ se numeşte cu (α,β)-metrică dacă funcţia sa fundamentală se exprimă sub forma*

$$F(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \check{F}(\alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})), \tag{1.3}$$

în care α şi β sunt funcţiile (1.1).

Şi în acest caz vom considera Lagrangianul de ordinul al doilea, regulat (nesingular):

$$L(\alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})) = \check{F}^2(\alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})). \tag{1.4}$$

Exemple.

1°. Spaţiile Randers de ordinul al doilea au funcţia fundamentală

$$\check{F}(\alpha,\beta) = \alpha + \beta,$$

cu $\beta > 0$ într-un deschis $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$.

2°. Spaţiile Kropina de ordinul al doilea sunt spaţiile Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică în care

$$\check{F}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^2}{\beta}, \tag{1.5$'$}$$

unde $\beta > 0$ pe un deschis $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$.

3°. Spaţiile Matsumoto de ordinul al doilea au $\check{F}$ dat de

$$\check{F}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}, \tag{1.5"}$$

pentru care $(\alpha - \beta > 0$ pe un deschis $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$.

4°. O clasă nouă de spaţii Finsler de ordinul al doilea dată de

$$\check{F}(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon\beta^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{1.5$'''$}$$

în care $\alpha - \beta > 0$ pe un deschis $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$ şi care are tensorul fundamental g_{ij} depinzând numai de punctele varietăţii bază.

Să mai observăm că pentru spaţiul Randers de ordinul doi, (1.5), am demonstrat în Cap.4 că $\check{F}(\alpha,\beta) = \alpha + \beta$ este funcţia fundamentală a unui spaţiu Finsler de ordinul al doilea. Pentru celelalte clase, acest lucru se dovedeşte direct ca în cazul spaţiilor Randers. De exemplu, în ultimul caz observăm $g_{ij} = \gamma_{ij} + \varepsilon b_i b_j$ şi rezultă $rang||g_{ij}|| = n$. Evident, $\check{F}$ din (1.5)"' este 2-omogen pe fibrele lui $Osc^2 M$.

Dar funcţia $F(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ este omogenă de gradul 2.

Deci

$$\overset{2}{\Gamma} F = y^{(1)i} \frac{\partial F}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i} \frac{\partial F}{\partial y^{(2)i}} = 2F. \tag{1.6}$$

Urmează:

Propoziţia 1.1 *Lagrangianul $L(\alpha, \beta) = \check{F}^2(\alpha, \beta)$ este omogen de gradul al doilea în argumentele α şi β.*

Demonstraţie.

$$F^2(x, ty^{(1)}, t^2 y^{(2)}) = t^4 F^2(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = t^4 L(\alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})) =$$

$$= \check{F}^2(t^2 \alpha(x, y^{(1)}, y^{(2)}), \beta(x, y^{(1)}, y^{(2)})).$$

De unde, punând $t^2 = a$ obţinem

$$a^2 L(\alpha, \beta) = L(a\alpha, a\beta). \tag{1.7}$$

q.e.d.

Vom nota, ca în cazul obişnuit:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha},\ L_\beta = \frac{\partial L}{\partial \beta},\ L_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2},\ L_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta},\ L_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}. \tag{1.8}$$

Observăm că $L_\alpha \neq 0, \quad L_\beta \neq 0$. Funcţia $\check{F}(\alpha, \beta)$ depinde esenţial de argumentele α şi β.

Datorită 2-omogenităţii Lagrangianului $L(\alpha, \beta)$ avem

$$\begin{aligned} &\alpha L_\alpha + \beta L_\beta = 2L, \qquad \alpha L_{\alpha\alpha} + \beta L_{\alpha\beta} = L_\alpha \\ &\alpha L_{\alpha\beta} + \beta L_{\beta\beta} = L_\beta, \quad \alpha^2 L_{\alpha\alpha} + 2\alpha\beta L_{\alpha\beta} + \beta^2 L_{\beta\beta} = 2L. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Diferenţiind pe $\alpha^2(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \gamma_{ij}(x) z^{(2)i} z^{(2)j}$ în raport cu $y^{(2)i}$ obţinem $\dfrac{\partial \alpha^2}{\partial y^{(2)i}} = 2\gamma_{ij} z^{(2)j}$ sau încă

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} = \frac{1}{\alpha} \gamma_{ij}(x) z^{(2)j} = \frac{1}{\alpha} Y_i,\ \frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}} = b_i(x) \tag{1.10}$$

în care am notat

$$Y_i = \gamma_{ij}(x) z^{(2)j} \tag{1.10$'$}$$

Lema 1.1 *d-câmpurile de covectori Y_i şi b_i sunt liniar independente pe $\widetilde{E}$.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există funcţiile nenule f şi g pe $\widetilde{E}$ astfel încât

$$fY_i + gb_i = 0.$$

Contracţionând cu $z^{(2)i}$ şi observând că $Y_i z^{(2)i} = \alpha^2$ şi $b_i z^{(2)i} = \beta$ avem

$$f\alpha^2 + g\beta = 0.$$

Derivând în raport cu α obţinem $f = 0$ şi apoi din $g\beta = 0$ avem $g = 0$. **q.e.d.**

Fie covectorul p_i:

$$p_i = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}. \tag{1.11}$$

Acest covector se descompune în raport cu $\{b_i, Y_i\}$ sub forma

$$p_i = \rho_1 b_i + \rho Y_i, \tag{1.12}$$

în care ρ_1 şi ρ sunt invarianţii:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}L_\beta,\ \rho = \frac{1}{2\alpha}L_\alpha. \tag{1.13}$$

Dar şi $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial y^{(2)i}}$, $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial y^{(2)i}}$ se descompun ca în cazul obişnuit în reperul $\{b_i, Y_i\}$, după cum urmează:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial y^{(2)i}} = \rho_0 b_i + \rho_{-1} Y_i,\quad \frac{\partial \rho}{\partial y^{(2)i}} = \rho_{-1} b_i + \rho_{-2} Y_i, \tag{1.14}$$

unde

$$\rho_0 = \frac{1}{2}L_{\beta\beta},\ \rho_{-1} = \frac{1}{2\alpha}L_{\alpha\beta},\ \rho_{-2} = \frac{1}{2\alpha^2}(L_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\alpha}L_\alpha). \tag{1.15}$$

Deasemeni, avem

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial y^{(2)i}} = r_{-1} b_i + r_{-2} Y_i,\quad \frac{\partial \rho_{-1}}{\partial y^{(2)i}} = r_{-2} b_i + r_{-3} Y_i, \tag{1.16}$$

în care

$$r_{-1} = \frac{1}{2}L_{\beta\beta\beta},\ r_{-2} = \frac{1}{2\alpha}L_{\alpha\beta\beta},\ r_{-3} = \frac{1}{2\alpha^2}(L_{\alpha\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha}L_{\alpha\beta}). \tag{1.17}$$

Pentru a vedea care sunt gradele de omogenitate pe fibrele lui $\widetilde{E}$, deci în raport cu $y^{(1)i}, y^{(2)i}$ ale invarianţilor $\rho,\ \rho_1,\ \rho_0,\ \rho_{-1},\ \rho_{-2},\ r_{-1},\ r_{-2},\ r_{-3}$ vom observa că α şi β sunt 2-omogene pe $\widetilde{E}$.

Deci, considerând vectorul Liouville

$$\overset{2}{\Gamma}= y^{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} + 2y^{(2)i}\frac{\partial}{\partial y^{(2)i}}$$

avem

$$\overset{2}{\Gamma}\ \alpha = 2\alpha, \overset{2}{\Gamma}\ \beta = 2\beta \tag{1.18}$$

şi are loc identitatea

$$L_\alpha(\overset{2}{\Gamma}\ \alpha) + L_\beta(\overset{2}{\Gamma}\ \beta) = 4L. \tag{1.19}$$

Într-adevăr, avem $\alpha L_\alpha + \beta L_\beta = 2L$, care după (1.18) ne dă (1.19).

La fel ca în (1.19) avem pentru L_α şi L_β :

$$\overset{2}{\Gamma}\ (L_\alpha) = L_{\alpha\alpha}(\overset{2}{\Gamma}\ \alpha) + L_{\alpha\beta}(\overset{2}{\Gamma}\ \beta) = 2(\alpha L_{\alpha\alpha} + \beta L_{\alpha\beta}) = 2L_\alpha,$$

$$\overset{2}{\Gamma}\ (L_\beta) = L_{\alpha\beta}(\overset{2}{\Gamma}\ \alpha) + L_{\beta\beta}(\overset{2}{\Gamma}\ \beta) = 2(\alpha L_{\alpha\beta} + \beta L_{\beta\beta}) = 2L_\beta.$$

În concluzie, avem:

Propoziţia 1.2 *Funcţiile L_α şi L_β sunt 2-omogene pe fibrele lui $\widetilde{E}$.*

În mod analog, se obţine:

Propoziţia 1.3 *Funcţiile $L_{\alpha\alpha}$, $L_{\alpha\beta}$ şi $L_{\beta\beta}$ sunt 0-omogene pe fibrele lui $\widetilde{E}$.*

Atunci, examinând ρ_1, ρ din (1.13), $\rho_0,\ \rho_{-1},\ \rho_{-2}$ din (1.15) şi $r_{-1},\ r_{-2},\ r_{-3}$ din (1.17) după propoziţiile precedente, avem:

Teorema 1.1 *Invarianţii $\rho_1,\ \rho,\ \rho_0,\ \rho_{-1},\ \rho_{-2},\ r_{-1},\ r_{-2},\ r_{-3}$ sunt funcţii omogene pe fibrele lui $\widetilde{E}$, având gradele de omogenitate 2, 0, 0, -2, -4, -2, -4 şi respectiv -6.*

Apare în mod natural întrebarea dacă se pot determina, pe baza invarianţilor de mai sus, metricile spaţiilor Randers, Kropina, Matsumoto şi a spaţiului Finsler (1.5)"',$L(\alpha,\beta) = \alpha^2 + \varepsilon\beta^2$?

Răspunsul este afirmativ şi în consecinţă avem următoarele caracterizări ale metricilor amintite mai sus:

Teorema 1.2 *Spaţiul Finsler cu (α, β)-metrică pentru care avem invarianţii:*

$$r_{-1} = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}, \tag{1.20}$$

este un spaţiu Randers de ordinul al doilea.

Demonstraţie. Din $r_{-1} = 0$ rezultă $L_{\beta\beta\beta} = 0$. Integrând această ecuaţie diferenţială în raport cu β avem soluţia generală

$$L(\alpha, \beta) = f_1(\alpha)\beta^2 + f_2(\alpha)\beta + f_3(\alpha),$$

unde f_i, $(i = 1, 2, 3)$ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare. Ţinând cont de 2-omogenitatea lui L în raport cu α şi β obţinem

$$L(\alpha, \beta) = c_1\alpha^2 + c_2\alpha\beta + c_3\beta^2,$$

cu c_1, c_2, c_3 constante arbitrare. Condiţia $\rho_0 = 1$ conduce la $c_3 = 1$, iar condiţia $\rho = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}$ implică $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Aşadar, se obţine $L(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)^2$, $F(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. **q.e.d.**

Teorema 1.3 *Spaţiile Kropina de ordinul al doilea se caracterizează în clasa spaţiilor Finsler cu (α, β)-metrici prin invarianţii:*

$$r_{-1} = -12\frac{\alpha^4}{\beta^5}, \quad \rho_0 = 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4, \quad \rho = 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2. \tag{1.21}$$

Demonstraţie. Procedând ca în teorema precedentă, $r_{-1} = -12\dfrac{\alpha^4}{\beta^5}$ conduce la ecuaţia diferenţială $L_{\beta\beta\beta} = -24\dfrac{\alpha^4}{\beta^5}$ care are soluţia generală

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2 + f_1(\alpha)\beta^2 + f_2(\alpha)\beta + f_3(\alpha),$$

unde f_i, $(i = 1, 2, 3)$ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare. Cum L este 2-omogen în raport cu α şi β se obţine

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha\beta + c_3\beta^2,$$

în care c_1, c_2, c_3 sunt constante arbitrare.

Celelalte două condiţii din (1.21) implică $c_3 = 0$, respectiv, $c_1 = c_2 = 0$. **q.e.d.**

Teorema 1.4 *Dacă un spaţiu Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică are invarianţii*

$$r_{-1} = -12\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)^5},\ \rho_0 = 3\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^4,\ \rho = \frac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3} \tag{1.22}$$

atunci acesta este un spaţiu Matsumoto.

Demonstraţie. Ca şi în teorema precedentă, prima condiţie din (1.22) implică ecuaţia diferenţială $L_{\beta\beta\beta} = -24\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)^5}$ ce are soluţia generală

$$L(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\right)^2 + f_1(\alpha)\alpha^2 + f_2(\alpha)\beta + f_3(\alpha)\beta^2,$$

unde f_i, $(i = 1,2,3)$ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare. Din 2-omogenitatea lui L în raport cu α şi β se obţine

$$L(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\right)^2 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha\beta + c_3\beta^2,$$

cu c_1, c_2, c_3 constante arbitrare iar ultimile două condiţii din (1.22) conduc la $c_1 = = c_2 = c_3 = 0$. Se obţine $F(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\right)^2$. **q.e.d.**

Teorema 1.5 *Dacă într-un spaţiu Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică avem invarianţii*

$$r_{-1} = 0,\ \rho_0 = \varepsilon,\ \rho = \alpha \tag{1.23}$$

atunci $L(\alpha,\beta) = \alpha^2 + \varepsilon\beta^2$, cu $\varepsilon = \pm 1$.

Demonstraţie. Ca în Teorema 1.2, $r_{-1} = 0$ şi 2-omogenitatea lui L conduc la

$$L(\alpha,\beta) = c_1\alpha^2 + c_2\alpha\beta + c_3\beta^2.$$

Condiţiile $\rho_0 = \varepsilon$ şi $\rho = \alpha$ ne dau $c_3 = \varepsilon$ şi respectiv, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, deci $F(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon\beta^2}$, cu $\varepsilon = \pm 1$.

q.e.d.

2 Tensorul fundamental al unui spaţiu Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică.

Tensorul fundamental al spaţiului Finsler $F^{(2)n} = (M, F(x, y^{(1)}, y^{(2)}))$ cu (α,β)-metrică este dat de

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}} \tag{2.1}$$

sau cu notaţiile (1.4)

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(2)i}\partial y^{(2)j}}. \tag{2.1'}$$

Ţinând seama de (1.11) avem

$$g_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial y^{(2)j}} = \frac{\partial \rho_1}{\partial y^{(2)j}} b_i + \frac{\partial \rho}{\partial y^{(2)j}} Y_i + \rho \frac{\partial Y_i}{\partial y^{(2)j}}.$$

Cum

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial y^{(2)j}} = \rho_0 b_j + \rho_{-1} Y_j,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y^{(2)j}} = \rho_{-1} b_j + \rho_{-2} Y_j,$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y^{(2)j}} = \gamma_{is}(x)\frac{\partial z^{(2)s}}{\partial y^{(2)j}} = \gamma_{ij}(x)$$

se deduce

Teorema 2.1 *Tensorul fundamental al spaţiului Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică, $F^{(2)n} = (M, F(x, y^{(1)}, y^{(2)}))$, este dat de*

$$g_{ij} = \rho\gamma_{ij}(x) + (\rho_0 b_j + \rho_{-1} Y_j) b_i + (\rho_{-1} b_j + \rho_{-2} Y_j) Y_i. \tag{2.2}$$

Observaţie. Ţinând seama de Lema 1.1, rezultă direct că g_{ij} este 0-omogen pe fibrele $\widetilde{E}$.

Forma precedentă este exact cea din Cap.2. Din acest motiv avem:

Teorema 2.2 1°. *Tensorul fundamental g_{ij} al spaţiului Finsler de ordinul al doilea cu (α,β)-metrică poate fi scris în forma echivalentă*

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \rho\gamma_{ij}(x) + c_i(x, y^{(1)}, y^{(2)}) c_j(x, y^{(1)}, y^{(2)}) \tag{2.3}$$

unde

$$c_i(x,y) = q_0 b_i + q_{-1} Y_i \tag{2.4}$$

şi

$$\rho_0 = (q_0)^2,\ \rho_{-1} = q_0 q_{-1},\ \rho_{-2} = (q_{-1})^2. \tag{2.5}$$

2°. *Contravariantul său g^{ij} este dat de*

$$g^{ij} = \frac{1}{\rho}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+c^2} c^i c^j \tag{2.6}$$

unde

$$c^i = \frac{1}{\rho} a^{ij} c_j,\ c^2 = c_i c^i. \tag{2.7}$$

Exemple.

1°. Pentru spaţiile Randers de ordinul al doilea $L(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^2$, avem:

$$L_\alpha = 2(\alpha+\beta),\ L_\beta = 2(\alpha+\beta),\ L_{\alpha\alpha} = 2,\ L_{\beta\beta} = 2,\ L_{\alpha\beta} = 2.$$

Invarianţii sunt

$$\rho_0 = 1,\ \rho_{-1} = \frac{1}{\alpha},\ \rho_{-2} = -\frac{\beta}{\alpha^3},\ \rho = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}, \rho_1 = \alpha+\beta$$

iar g_{ij} devine

$$g_{ij} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\gamma_{ij} + b_i b_j + \frac{1}{\alpha}(b_i Y_j + b_j Y_i) - \frac{\beta}{\alpha^3} Y_i Y_j \tag{2.8}$$

şi contravariantul său

$$g^{ij} = q\gamma^{ij} - \frac{1}{q + \gamma^{ij} l_i l_j}(q\ \gamma^{ir}\gamma^{js} l_r l_s) \tag{2.9}$$

unde $q = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ şi $l_i = b_i + \dfrac{1}{\alpha} Y_i$.

2°. Pentru spaţiile Kropina, $L(\alpha,\beta) = (\dfrac{\alpha^2}{\beta})^2,\ \beta \neq 0$, avem

$$L_\alpha = 4\frac{\alpha^3}{\beta^2},\ L_\beta = -2\frac{\alpha^4}{\beta^3},\ L_{\alpha\alpha} = 12(\frac{\alpha}{\beta})^2,\ L_{\beta\beta} = 6(\frac{\alpha}{\beta})^4,\ L_{\alpha\beta} = -8(\frac{\alpha}{\beta})^3.$$

iar invarianţii devin

$$\rho_0 = 3(\frac{\alpha}{\beta})^4 \ \rho_{-1} = -\frac{4\alpha^2}{\beta^3}, \ \rho_{-2} = \frac{4}{\beta^2}, \ \rho = 2(\frac{\alpha}{\beta})^2.$$

În acest caz obţinem pentru câmpul tensorial fundamental şi pentru contravariantul acestuia exprimările:

$$g_{ij} = 2q^2\gamma_{ij} + q^2\left[(3q+8)b_ib_j - 4q(b_il_j + b_jl_i) + 4l_il_j\right], \tag{2.10}$$

respectiv,

$$g^{ij} = \frac{1}{2q^2}\gamma^{ij} - \frac{1}{2q^2 + \gamma^{ij}c_ic_j}(\frac{1}{2q^2}\gamma^{ri}\gamma^{sj}c_rc_s) \tag{2.11}$$

unde $q = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $l_i = b_i + \dfrac{1}{\alpha}Y_i$ şi $c_i = \sqrt{3}q^2b_i + 2ql_i$.

3°. Spaţiile Matsumoto, $L(\alpha, \beta) = (\dfrac{\alpha^2}{\alpha - \beta})^2$, $\beta \neq 0$, conduc la

$$L_\alpha = \frac{2\alpha^3(\alpha - 2\beta)}{(\alpha-\beta)^3}, \ L_\beta = -2\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)^3}, \ L_{\alpha\alpha} = \frac{2\alpha^2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 6\beta^2)}{(\alpha-\beta)^4},$$
$$L_{\beta\beta} = -6(\frac{\alpha}{\alpha-\beta})^4, \ L_{\alpha\beta} = -2\frac{\alpha^3(\alpha - 4\beta)}{(\alpha-\beta)^4}.$$

Invarianţii sunt

$$\rho_0 = 3(\frac{\alpha}{\alpha-\beta})^4, \ \rho_{-1} = \frac{\alpha^2(\alpha-4\beta)}{(\alpha-\beta)^4}, \ \rho_{-2} = -\frac{\beta(\alpha-4\beta)}{(\alpha-\beta)^4}, \ \rho = \frac{\alpha^2(\alpha-2\beta)}{(\alpha-\beta)^3}.$$

Prin urmare obţinem pentru g_{ij} şi g^{ij} expresiile:

$$\begin{aligned} g_{ij} = {} & \frac{1}{\aleph}\gamma_{ij} + \\ & + \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)^4}\left[\alpha(\alpha+8\beta)b_ib_j + \alpha(\alpha-4\beta)(b_il_j + b_jl_i) - \beta(\alpha-4\beta)l_il_j\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

respectiv,

$$g^{ij} = \aleph\gamma^{ij} - \frac{1}{\aleph + \gamma^{ij}c_ic_j}[\aleph\gamma^{ri}\gamma^{sj}c_rc_s,] \tag{2.13}$$

unde $\aleph = \dfrac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^2(\alpha-2\beta)}$, $l_i = b_i + \dfrac{1}{\alpha}Y_i$ şi $c_i = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}(\alpha-\beta)^2}[2(\alpha+2\beta)b_i + (\alpha-4\beta)l_i]$.

4°. Pentru spaţiile Finsler de ordinul al doilea (1.5)"', $L(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \varepsilon\beta^2$ obţinem

$$L_\alpha = 2\alpha, \ L_\beta = 2\varepsilon\beta, \ L_{\alpha\alpha} = 2, \ L_{\beta\beta} = 2\varepsilon, \ L_{\alpha\beta} = 0$$

iar invarianţii devin

$$\rho_0 = \varepsilon,\ \rho_{-1} = 0,\ \rho_{-2} = 0,\ \rho = \alpha, \rho_1 = \varepsilon\beta.$$

Astfel, se obţin următoarele forme pentru g_{ij} şi g^{ij} :

(2.14) $$g_{ij} = \alpha\gamma ij + \varepsilon b_i b_j$$

respectiv,

(2.15) $$g^{ij} = \frac{1}{\alpha}\gamma^{ij} - \frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\gamma^{ij}b_i b_j}[\frac{\varepsilon}{\alpha^2}\gamma^{ir}\gamma^{js}b_r b_s].$$

3 Energii de ordin superior ale spaţiilor Finsler $F^{(2)n} = (M, F)$ cu (α,β)-metrică.

Considerăm Lagrangianul regulat $L(\alpha,\beta) = \check{F}^2(\alpha,\beta)$ şi integrala acţiunii sale, dată de funcţionala

(3.1) $$I(c) = \int_0^1 L(\alpha(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}), \beta(\alpha(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}))dt.$$

Ecuaţiile Euler-Lagrange sunt date de

(3.2) $$\overset{\circ}{E}_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = 0,\ y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt},\ y^{(2)i} = \frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{dt^2}.$$

Dar

(3.3) $$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= L_\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} + L_\beta\frac{\partial \beta}{\partial x^i} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} &= L_\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} + L_\beta\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} &= L_\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + L_\beta\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}} \end{aligned}$$

şi

(3.3)' $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} &= \frac{d}{dt}(L_\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} + L_\beta\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}}) \\ \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} &= \frac{d^2}{dt^2}(L_\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + L_\beta\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}). \end{aligned}$$

Din ultimele două rezultă:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} = \frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}} + L_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} + L_\beta \frac{d}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = \frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}} + L_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + L_\beta \frac{d}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = \frac{d^2L_\alpha}{dt^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{d^2L_\beta}{dt^2}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}} + 2\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{d}{dt}(\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}}) + 2\frac{dL_\beta}{dt}\frac{d}{dt}(\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}) +$$
$$+ L_\alpha \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + L_\beta \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}.$$

Avem atunci:

$$\overset{\circ}{E_i}(L) =$$
$$= L_\alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}}\right) + L_\beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}\right) -$$
$$- \frac{dL_\alpha}{dt}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}}\right) - \frac{dL_\beta}{dt}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_\alpha}{dt^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{\partial^2 L_\beta}{dt^2}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}\right).$$

Am obţinut formula:

$$\overset{\circ}{E_i}(L) = L_\alpha \overset{\circ}{E_i}(\alpha) + L_\beta \overset{\circ}{E_i}(\beta) - \left[\frac{dL_\alpha}{dt}\overset{1}{E_i}(\alpha) + \frac{dL_\beta}{dt}\overset{1}{E_i}(\beta)\right] + \tag{3.4}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2L_\alpha}{dt^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{d^2L_\beta}{dt^2}\frac{\partial \beta}{\partial y^{(2)i}}\right]$$

După cum ştim, Corolarul 4.1 (Cap.2), are loc formula

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\overset{0}{E_i}(L) + \frac{d}{dt}\overset{2}{I}(L) - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}})$$

cu $\overset{2}{I}(L) = 4L$. Cu alte cuvinte avem

$$-3\frac{dL}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\overset{0}{E_i}(L) - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}).$$

Pe curbele extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange $\overset{0}{E_i}(L) = 0$ avem

$$3\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}})$$

sau încă:

Teorema 3.1 *Pe curbele extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange (3.2) are loc*

$$L - \frac{1}{3!}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}\right) = const. \tag{3.5}$$

Din (4.9) şi (4.10), Cap.2, avem energiile de ordinul 2 şi respectiv 1:

$$\overset{2}{\mathcal{E}}_c (L) = \overset{2}{I} (L) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \overset{1}{I} (L) - L$$

$$\overset{1}{\mathcal{E}}_c (L) = -\frac{1}{2} \overset{1}{I} (L) = -\frac{1}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}}.$$

Cum $\overset{2}{I} (L) = 4L$ rezultă

$$\overset{2}{\mathcal{E}}_c (L) = 3L + \frac{d}{dt} \overset{1}{\mathcal{E}}_c (L) \tag{3.6}$$

şi avem

$$\frac{d \overset{2}{\mathcal{E}}_c (L)}{dt} = -\frac{dx^i}{ds} \overset{0}{E}_i (L).$$

Am obţinut, deci:

Teorema 3.2 *Energia de ordinul 2, $\overset{2}{\mathcal{E}}_c (L)$, se conservă pe curbele extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange.*

Teorema precedentă conduce la

Corolar 3.1 *De-a lungul curbelor extremale ale ecuaţiilor Euler-Lagrange, energia de ordinul 1, $\overset{1}{\mathcal{E}}_c (L)$, satisface ecuaţia diferenţială*

$$\frac{d}{dt} \overset{1}{\mathcal{E}}_c (L) = -3L. \tag{3.7}$$

4 Ecuaţiile Lorentz corespunzătoare spaţiilor Finsler $F^{(2)n} = (M, F)$ cu (α, β)-metrică.

Vom pleca de la ecuaţiile Craig-Synge şi vom determina ecuaţiile Lorentz pentru spaţiile $F^{(2)n} = (M, F)$.

Avem ecuaţiile Craig-Synge:

$$\overset{1}{E}_i (L) = \frac{\partial L}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^{(2)i}} = 0,\ y^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt},\ y^{(2)i} = \frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{dt^2}. \tag{4.1}$$

În raport cu α şi β, avem:

$$\begin{aligned}\overset{1}{E}_i(L) &= L_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y^{(1)i}} + L_\beta \frac{\partial\beta}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}\left(L_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}} + L_\beta \frac{\partial\beta}{\partial y^{(2)i}}\right) = \\ &= L_\alpha \overset{1}{E}_i(\alpha) + L_\beta \overset{1}{E}_i(\beta) - \left(\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial y^{(2)i}}\right) = 0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Folosind invarianţii din (1.13) şi (1.15) obţinem:

$$\begin{aligned}\overset{1}{E}_i(\alpha^2) &= \frac{\partial\alpha^2}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha^2}{\partial y^{(2)i}} = 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(1)i}} - \frac{d}{dt}2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}} = \\ &= 2\alpha\, \overset{1}{E}_i(\alpha) - 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overset{1}{E}_i(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha}\left(\overset{1}{E}_i(\alpha^2) + 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}}\right)\end{aligned}$$

şi (4.2) ia forma

$$\frac{1}{2\alpha}L_\alpha\left(\overset{1}{E}_i(\alpha^2) + 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}}\right) + L_\beta\, \overset{1}{E}_i(\beta) = \frac{dL_\alpha}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial y^{(2)i}} + \frac{dL_\beta}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial y^{(2)i}}$$

adică

$$\rho\, \overset{1}{E}_i(\alpha^2) + 2\rho\frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha}Y_i + 2\rho_1\, \overset{1}{E}_i(\beta) = \frac{dL_\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha}Y_i + \frac{dL_\beta}{dt}b_i.$$

Am obţinut teorema:

Teorema 4.1 *Pentru un spaţiu Finsler cu (α,β)-metrică $F^{(2)n} = (M,F)$ au loc următoarele ecuaţii Lorentz:*

$$\overset{1}{E}_i(\alpha^2) + 2\sigma\, \overset{1}{E}_i(\beta) = \left(\frac{dL_\alpha}{dt}\frac{1}{\rho} - 2\frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{1}{\alpha}Y_i + \frac{1}{\rho}\frac{dL_\beta}{dt}b_i. \tag{4.3}$$

Fixând acum parametrizarea canonică a curbei c în raport cu metrica Riemann $\alpha(x, \frac{dx}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2})$ avem s lungimea arcului de curbă dată de $ds^2 = \alpha(x, \frac{dx}{dt}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2})dt^2$. În acest caz

$$\alpha(x, \frac{dx}{ds}, \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}) = 1.$$

De-a lungul curbei c avem

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0. \tag{4.4}$$

Avem:

Teorema 4.2 *În parametrizarea canonică dată de (4.4), un spaţiu Finsler cu (α, β)-metrică $F^{(2)n} = (M, F)$ are următoarele ecuaţii Lorentz:*

$$\overset{1}{E_i}(\alpha^2) + 2\sigma \overset{1}{E_i}(\beta) = 2(\sigma - \beta\tau)\frac{d\beta}{ds}Y_i + 2\tau\frac{d\beta}{ds}b_i \tag{4.5}$$

unde $\tau = \dfrac{\rho_0}{\rho}$.

Demonstraţie.Ţinând cont de (4.4) şi că din(1.9) avem $L_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha}(L_\beta - \beta L_{\beta\beta})$ rezultă

$$\frac{dL_\alpha}{ds} = L_{\alpha\alpha}\frac{d\alpha}{ds} + L_{\alpha\beta}\frac{d\beta}{ds} =$$
$$= \frac{1}{\alpha}(L_\beta - \beta L_{\beta\beta})\frac{d\beta}{ds} = 2(\rho_1 - \beta\rho_0)\frac{d\beta}{ds}.$$

Înlocuind în (4.3) rezultă (4.5). **q.e.d.**

Corolar 4.1 *În cazul particular în care* $\dfrac{d\beta}{ds} = 0$, *ecuaţiile Lorentz ale spaţiului* $F^{(2)n}$ *devin:*

$$\overset{1}{E_i}(\alpha^2) = -2\sigma \overset{1}{E_i}(\beta). \tag{4.6}$$

Dar aceasta este forma clasică a ecuaţiilor Lorentz din cazul $k = 1$.

În particular, ecuaţiile Lorentz (4.6) ale spaţiilor Randers, Kropina, Matsumoto de ordinul al doilea sau a spaţiilor cu funţia fundamentală $F(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon\beta^2}$, au exprimări importante în aplicaţii.

Bibliografie

[1] ABATE, M., *A Characterization of the Chern and Berwald Connections*, Houston J. of Math., 22, 4(1996), 701-717.

[2] ANASTASIEI, M., *A historical Remark on the Connection of Chern and Rund*, Contemporary Mathematics, 196(1996), 171-176.

[3] ANASTASIEI, M., *A class of generalized Lagrange spaces*, An. Şt. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi, Supliment, s I a, Matematică, 42(1996), 259-264.

[4] ANASTASIEI, M., *Finsler Connection in Generalized Lagrange Spaces*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, I, 1(1996), 1-10.

[5] ANASTASIEI, M. and BUCATARU, I., *A notable Submesion in the Higher Order Geometry*, Proceedings of the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, Geometry Balkan Press, 1997, 1-10.

[6] ANASTASIEI, M. and BUCATARU, I., *Jacobi fields in generalized Lagrange spaces*, (va apare).

[7] ANASTASIEI, M., SHIMADA, M., *Deformations of Finsler metrics*, In the vol.: Finslerian Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 53–67.

[8] ANTONELLI, P.L. and . MIRON, R., *Lagrange and Finsler Geometry. Applications to Physics and Biology,* Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 76, 1996.

[9] BALAN, V. and STAVRINOS, P.C., *Deviations of Geodesics in the Fibered Finslerian Approach,* In vol. of Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 76, 1996, 65–74.

[10] BAO, D. and CHERN, S.S., *On a notable connection in Finsler Geometry*, Houston J. Math. 19, 1(1993), 135–180.

[11] BAO, D., CHERN, S.S., ZHEN, Z., *An introduction to Riemann–Finsler Geometry* (Graduate Texts in Mathematics; 200), Springer–Verlag, 2000.

[12] BEJANCU, A., *Foundations of Direction-Dependent Gauge Theories*, Seminarul de Mecanică, Univ.Timişoara, 13(1988), p.60.

[13] BEJANCU, A., *Finsler Geometry and applications,* Ellis Horwood, 1990.

[14] BEJANCU, A., *On the theory of Finsler submanifolds*, In the vol.: Finslerian Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 111—131.

[15] BEJANCU, A. and FARRAN,H.R., *Geometry of Pseudo-Finsler Submanifolds,* Kluwer Acad. Publ., (2000).

[16] BUCATARU, I., *Connection map in the higher order geometry,* An. Şt. Univ."Al.I.Cuza" Iaşi, Supliment, Ser. I a Mat., XLII(1996), 253-258.

[17] BUCATARU, I., *Finsler connection in the higher order geometry,* (to appear).

[18] BUCĂTARU, I., *Horizontal lifts in the higher order geometry,* Publ. Math. Debrecen, 56/1-2, 2000, 21–32.

[19] BUCATARU, I., *Sprays and homogeneous connection in the higher order geometry,* Stud. şi Cercet. Mat., vol.50, 5-6(1998).

[20] CARMO, M.P. DO, *Riemannian Geometry,* Birkhäuser, Boston, 1992.

[21] CHERN, S.S., *On Finsler Geometry,* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 314, 1992, 757–761.

[22] ČOMIC, I., *Curvature theory of Generalized Miron's d–connections*, Diff. Geom. and Appl. Proc. Conf. Brno, 1989, pp. 17–26.

[23] CORDERO, L.A., DODSON, C.T.J. and DE LEON, M., *Differential Geometry of Frame Bundles* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1989.

[24] CRAIG, H.V., *An Extensor Generalization of a Simple Calculus of Variations Problem,* Tensor N.S. 17, 1966, pp. 313–320.

[25] CRAMPIN, M., *Jet bundle techniques in Analytical Mechanics,* Quaderni del Cons. naz. delle Ricerche, Gruppo Naz. di Fisica Matematica no. 47, 1995.

[26] CRAMPIN, M., SARLET, W., CANTRIJN, F., *Higher–Order Equations and Higher–Order Lagrangian Mechanics*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1986, 99, 565–587.

[27] CRÂŞMĂREANU, M., *Conserved quantities for dynamical systems with relativ invariant form,* Bulletin Kyushu Institute of Technology, (to appear).

[28] CRUCEANU, V., *Objets géometériques h-invariants sur le fibré tangent*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend.Cl.Mat.Natur., Serie VIII, LVII, 6(1974), 548-558.

[29] DODSON, C.T.J. and RADIVOIOVICI, M., *Tangent and frame bundles of order two*, Analele Şt. Univ. "Al.I.Cuza" , Iaşi, s. I-a, 28, 1(1982), 63-71.

[30] EHRESMANN, CH., *Les prolongements d'un espace fibré différentiable*, Compte Rend. de l'Acad. Sci. Paris 240, 1955, pp. 1755–1757.

[31] EISENHART, L.P., KNEBELMAN, M.S., *Invariant theory of homogeneous contact transformations,* Ann. Math. 37(1936), 747-765.

[32] GHEORGHIEV, and GH., OPROIU, V. *Geometrie diferenţială,* Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, (1977).

[33] GRIFONE, J., *Structure presque-tangente et connexions, I, II*, Ann.Inst.Fourier, 22, 1,3(1972), 287-334, 291-338.

[34] HASHIGUCHI, M., *On Conformal Transformations of Finsler Metrics,* J. Math. Kyoto Univ. 16, 1976, 25–50.

[35] HASSAN, B.T., *The Theory of Geodesics in Finsler Spaces* (Ph.D. Thesis), Southampton Univ. (1967).

[36] HRIMIUC, D., SHIMADA, H., *On some special problems concerning the L-duality between Finsler and Cartan spaces*, Tensor N.S., 58(1997), 48–61.

[37] IANUŞ, S., *Differential Geometry and Applications to Relativity* (in Romanian), Ed. Acad. Române, Bucureşti, 1983.

[38] KAWAGUCHI, M., *An Introduction to the Theory of Higher Order Space,* I: *The Theory of Kawaguchi Spaces*, RAAG Memoirs, vol. 3, 1962.

[39] Kawaguchi, M., *On the vectors of Higher Order and the extended affine connection*, Ann. di Matem. Pura ed Appl. IV(55) (1961), 105–118.

[40] Kitayama, M., *Hypersurfaces in generalized Lagrange spaces*, In the vol.: Finslerian Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 179–193.

[41] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry,* vol. I, II, Intersci. Publ., New York, 1963, 1973.

[42] Kondo, K., *On the Physical Meanings of the Zermelo Conditions of Kawaguchi Space*, Tensor N.S. 14, 1963, 191–215.

[43] de Leon, M. and Rodrigues, P.R., *Generalized Classical Mechanics and Field Theory.* North-Holland, 1985.

[44] de Leon, M. and Vasquez, E., *On the geometry of the tangent bundle of order 2,* An. Univ. Bucureşti Mat. 34(1985), 40-48.

[45] Libermann, P., *On sprays and higher order connections,* Proc. N.A.S. 49(1963), 459-462.

[46] Martinez, E., and Carinena, J.F., *Geometric characterisation of linearisable second-order differential equations,* Math.Proc. Cambridge Phil.Soc., **119**(1996), 372-382.

[47] Martinez, E., Carinena, J.F. and Sarlet, W., *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection II,* Differential Geometry and its Appl., **3**(1993), 1-29.

[48] Matsumoto, M., *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces,* Kaisheisha Press, Otsu, 1986.

[49] Miron, R., *The Geometry of Higher Order Lagrange Spaces. Applications to Mechanics and Physics,* Kluwer, Dordrecht, FTPH no. 82, 1997.

[50] Miron, R., *The Geometry of Higher Order Finsler Spaces,* Hadronic Press., Inc. USA, (1998).

[51] Miron, R., *General Randers spaces*, in vol. of Kluwer Acad. Publ. FTPH, no. 76, 1996, 75–80.

[52] MIRON, R., *Spaces with higher order metric structures,* Tensor N.S., vol. 53, 1993.

[53] MIRON, R., *The higher–order Lagrange spaces: theory of subspaces,* The Proc. of Workshop in Diff. Geometry, Dec. 1995, "Aristoteles" Univ. Thessaloniki.

[54] MIRON, R., *The notion of higher order Finsler spaces. Theory and applications*, In the vol.: Finslerian Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 193–200.

[55] MIRON, R. and ANASTASIEI, M., *The geometry of Lagrange spaces: Theory and Applications,* Kluwer Acad. Publ., FTPH no. 59, (1994).

[56] MIRON, R. and ANASTASIEI, M., *Vector bundles. Lagrange spaces. Applications to the theory of relativity* (in Romanian), Ed. Acad. Române, Bucureşti, 1987.

[57] MIRON, R. and ATANASIU, GH., *Compendium on the higher–order Lagrange spaces: The geometry of k–osculator bundles. Prolongation of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian strucures. Lagrange spaces,* Tensor N.S. 53, 1993.

[58] MIRON, R. et KAWAGUCHI, T., *Higher–order relativistic geometrical Optics,* Tensor N.S., vol. 53, 1993.

[59] MIRON, R. and SABAU, V.S., *Les espaces de Finsler d'ordre $k \geq 1$,* (to appear).

[60] MORIMOTO, A., *Prolongations of Geometric Structures*, Nagoya Univ.Press, Nagoya, 1969.

[61] MUNTEANU, GH., *Lagrangian Gauge Theory of Superior Order,* Proc. Nat. Seminar, Univ. Braşov, (1996).

[62] MUNTEANU, GH. and ATANASIU, GH., *On Miron Connections on Lagrange Space of Second Order,* Tensor N.S. vol. 50, (1991), 241–247.

[63] MUNTEANU, GH., *Generalized complex Lagrange spaces*, In the vol.: Finsler Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 209–223.

[64] MUNTEANU, GH. and IKEDA, S., *On the Gauge Theory of Second Order,* Tensor N.S. vol. (to appear).

[65] OPROIU, V., *Connections in the semiholonomic frame bundle of second order,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 14, 5(1969), 661-672.

[66] PAPUC, D., *Geometrie Diferenţială,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[67] RANDERS, G., *On asymmetric metric in the four space of general relativity,* Phys. Rev. 59 (1941), 195-199.

[68] ROMAN, M., *On the Higher Order Randers Spaces,* Proceedings of "Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras" Thessaloniki, Greece, Balkan Press, (1996), p.86-93.

[69] ROMAN, M., şi BUCATARU, I., *Linear connections induced by a nonlinear connection in the geometry of order two,* Mem.Şt. ale Academiei Române, Seria IV, Tomul XXI, (1998), p.17-26.

[70] ROMAN, M., *On the homogeneous hyperbolic lift of a Finslerian metric,* Algebras Groups and Geometries 17, Hadronic Press Inc., Palm Harbor, FL34682, USA, (2000), p.323-330.

[71] ROMAN, M., *On the Randers spaces of second order,* Proceedings of "The third Conference of Balkan Society of Geometers", Bucuresti, Balkan Press, Aug. (2000), (to appear).

[72] ROMAN, M., *A characterisation of N-linear connections in the higher order Lagrange geometry,* Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Al.I.Cuza", (2001), (to appear).

[73] ROMAN, M., *General Randers spaces and its homogeneous nonlinear connection,* Egyptian Journal of Mathematics,(2001), (to appear).

[74] SABĂU, V.S., *Higher order ecological metrics,* In the vol.: Finslerian Geometries, Kluwer Acad. Publ. FTPH, vol. 109, 2000, 245–261.

[75] SABĂU, V.S. and SHIMADA, H., *Some remarks on the geometry of the higher order osculator bundle,* Proc. Hokkaido Tokai Univ., Science and Engineering, 9(1996), 47-58.

[76] SANTILLI, M.R., *Foundations of Theoretical Mechanics,* I: *The inverse problem in Newtonian Mechanics,* Springer–Verlag, 1978.

[77] SANTILLI, M.R., *Foundations of Theoretical Mechanics,* II: *Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics,* Springer–Verlag 1981.

[78] SASAKI, S., *Homogeneous contact transformations,* Tohoku Math. J. 14(1962), 369–397.

[79] SAUNDERS, D.J., *The Geometry of Jet Bundles,* Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1989.

[80] SHEN, Z., *On a Connection in Finsler Geometry* (Houston Jour. Math. 20, 1994, 591–602.

[81] SHIBATA, H., SHIMADA, H., AZUMA, M., YASUDA, H. *On Finsler spaces with Randers metric,* Tensor N.S. 33(1977).

[82] SHIMADA, H., *On Finsler spaces with the metric* $L = \sqrt[m]{a_{i_1 \dots i_m}(x) y^{i_1} \cdots y^{i_m}}$, Tensor N.S. 33(1979), 365–372.

[83] SHIMADA, H., SABĂU, S.V., *Remarkable classes of* (α, β)*-metric spaces,* Proc. of Conference of Finsler Spaces, Sapporo, Aug. (1999), 1-9.

[84] SYNGE, J.L., *Relativity: General Theory,* North–Holland, 1966.

[85] TAMIM, A.A., YOUSSEF, N.L., *On Generalized Randers Manifolds,* Algebras, Groups and Geometries (Hadronic Press), 16,(1999), 115–126.

[86] TULCJYEV, W., *Les jets généralisés,* C.R. Acad. Sc. Paris, 281 A, 349-352.

[87] VARGAS, J.G., TORR, D.G., *Canonical Connections of Finsler Metrics and Finslerian Connections on Riemannian Metrics,* General Relativity and Gravitation 28(4), 451–469, 1996.

[88] VRĂNCEANU, GH., *Sur les espaces non holonome,* C.R. Acad. Sci. Paris, 183 (1926), 852.

[89] Yano, K. şi Ishihara, S., *Tangent and cotangent bundles*, Marcel Dekker Inc,. New York, 1973.

[90] Yasuda, H., Shimada, H., *On Randers spaces of scalar curvature*, Rep. on Math. Phys. 11(1977), 347-360.

[91] Zet, Gh., *Lagrangian Geometrical Models in Physics*, Math. Comput. Modelling, vol. 20, no. 4/5, (1994), 83–91.