Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 25, 2000, 413–415

DREI FUNKTIONALE EINES QUASIKREISES

Reiner Kühnau

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, FB Mathematik und Informatik
Institut für Analysis, D-06099 Halle an der Saale, Deutschland

Abstract. For a quasicircle we give an inequality for the reflection coefficient, the Fredholm eigenvalue and the ratio of the modules of the quadrilaterals which are the inside and the outside of the quasicircle with 4 fixed points.

1. Es sei $\mathfrak{C}$ ein Quasikreis in der komplexen z-Ebene $(z = x + iy)$. Diesem ordnen wir drei Funktionale zu:

$$M_{\mathfrak{C}} = \sup \frac{M'}{M}, \qquad \Lambda_{\mathfrak{C}} = \frac{\lambda_{\mathfrak{C}} + 1}{\lambda_{\mathfrak{C}} - 1}, \qquad Q_{\mathfrak{C}}. \tag{1}$$

Dabei betrachten wir alle Vierecke $\mathfrak{V}$, bestehend aus dem Innengebiet von $\mathfrak{C}$ mit 4 auf $\mathfrak{C}$ markierten verschiedenen Punkten. M sei der konforme Modul, M' jeweils dazu der Modul des Vierecks, bestehend aus dem Außengebiet $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{C}$ mit gleichen 4 "Ecken" und gleichen "Gegenseiten". $\lambda_{\mathfrak{C}}$ $(1 < \lambda_{\mathfrak{C}} \le \infty)$ bezeichne den Fredholmschen Eigenwert von $\mathfrak{C}$. (Dieser ist zunächst für glatte $\mathfrak{C}$ im Zusammenhang mit einer Integralgleichung definiert, dann aber über einen Quotienten Dirichletscher Integrale auch für beliebige $\mathfrak{C}$ [9].)

$Q_{\mathfrak{C}} \ge 1$ sei der Spiegelungskoeffizient von $\mathfrak{C}$ [6], nämlich die kleinstmögliche Dilatationsschranke bei den quasikonformen Spiegelungen an $\mathfrak{C}$.

Dann gilt der

Satz. *Für jeden Quasikreis $\mathfrak{C}$ ist*

$$M_{\mathfrak{C}} \le \Lambda_{\mathfrak{C}} \le Q_{\mathfrak{C}}. \tag{2}$$

2. Man kann das Innere und das Äußere von $\mathfrak{C}$ jeweils schlicht konform auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Aus dem Quasikreis $\mathfrak{C}$ entsteht so bekanntlich eine quasisymmetrische Abbildung $\mathfrak{A}$ der Einheitskreislinie auf sich, und umgekehrt [7], [6]. Somit lassen sich in naheliegender Weise auch jeder solchen quasisymmetrischen Abbildung $\mathfrak{A}$ der Einheitskreislinie auf sich entsprechende Funktionale $M_{\mathfrak{A}}$, $\Lambda_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$ zuordnen, die mit $M_{\mathfrak{C}}$, $\Lambda_{\mathfrak{C}}$, $Q_{\mathfrak{C}}$ übereinstimmen, wenn sich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ entsprechen. (Im Falle $M_{\mathfrak{A}}$ und $Q_{\mathfrak{A}}$ ist das evident, bei $\Lambda_{\mathfrak{A}}$ folgt

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 30C75.

das wegen der Invarianz des Dirichletschen Integrals bei konformer Abbildung.) Insbesondere haben wir wieder

$$M_{\mathfrak{A}} \leq \Lambda_{\mathfrak{A}} \leq Q_{\mathfrak{A}}. \tag{3}$$

3. In [1], [8], [11], [12], [10] wurden Beispiele bzw. Kriterien dafür gegeben, daß $M_{\mathfrak{A}} < Q_{\mathfrak{A}}$ möglich ist. Das liegt jetzt nach obigem Satz auf der Hand, da es Kurven $\mathfrak{C}$ mit $\Lambda_{\mathfrak{C}} < Q_{\mathfrak{C}}$ gibt [6].

In [5] (vgl. dort (15) und Sätze 2 und 3) finden sich für analytische $\mathfrak{C}$ Charakterisierungen der Fälle mit $\Lambda_{\mathfrak{C}} = Q_{\mathfrak{C}}$; in [2], [3] unter schwächeren Voraussetzungen Kriterien hierfür. Somit folgt die notwendige Bedingung in [8] für $M_{\mathfrak{A}} = Q_{\mathfrak{A}}$ jetzt wegen (3) auch aus [2], [3], [5].

Der Fall $M_{\mathfrak{C}} = \Lambda_{\mathfrak{C}}$ ist möglich, da sogar $M_{\mathfrak{C}} = Q_{\mathfrak{C}}$ möglich ist – vgl. [10, 2]. Diesem Beispiel in [10] entspricht ein Kreisbogenzweieck $\mathfrak{C}$.

In [10, Theorem 3] findet sich die Angabe der Fälle mit $M_{\mathfrak{C}} = Q_{\mathfrak{C}}$, falls kein "essential boundary point" vorliegt. (Die entsprechenden Kurven $\mathfrak{C}$ lassen sich gemäß [4] nach klassischen Ansätzen durch konforme Verheftung explizit konstruieren.)

Auch $M_{\mathfrak{C}} < \Lambda_{\mathfrak{C}}$ ist möglich. Ein Beispiel ist in [1] enthalten (weitere Beispiele nach [10, Theorem 3] gewinnbar). Wenn man wie dort ein Parallelogramm $\mathfrak{P}$ einer $w = u + iv$-Ebene einer Streckung in Richtung der u-Achse unterwirft und das entstehende Parallelogramm $\mathfrak{P}^*$ mit dem ursprünglichen entsprechend der durch diese Affinität entstehenden Ränderzuordnung konform verheftet, entsteht eine gewisse Jordankurve $\mathfrak{C}$ (die übrigens nach [4] analytisch bestimmbar ist) mit $Q_{\mathfrak{C}}$ = Streckungsfaktor. Für dieses $\mathfrak{C}$ gilt nach [1] $M_{\mathfrak{C}} < Q_{\mathfrak{C}}$. Damit ist auch $M_{\mathfrak{C}} < \Lambda_{\mathfrak{C}}$, da hier $\Lambda_{\mathfrak{C}} = Q_{\mathfrak{C}}$ ist: Das Verhältnis der Dirichletschen Integrale für $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{P}$ mit der Potentialfunktion v, die in entsprechenden Randpunkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ übereinstimmt, ist gleich dem Streckungsfaktor, also $= Q_{\mathfrak{C}}$, woraus $Q_{\mathfrak{C}} \leq \Lambda_{\mathfrak{C}}$ nach der Variationscharakterisierung [9] der Fredholmschen Eigenwerte folgt, und damit $\Lambda_{\mathfrak{C}} = Q_{\mathfrak{C}}$ wegen (2).

4. *Beweis von* (2). Die rechte Hälfte von (2) entspricht einer klassischen Ahlforsschen Ungleichung [9], [5], [6]. Zum einfachen Beweis der linken Hälfte von (2) bemühen wir zu einem beliebigen wie nach (1) beschriebenen Viereck $\mathfrak{V}$ innerhalb $\mathfrak{C}$ mit Modul M den Imaginärteil $V(x, y)$ derjenigen konformen eckpunkttreuen Rechtecksabbildung von $\mathfrak{V}$, bei der die Ecken $0, M, i, M + i$ werden.

Jedenfalls ist V auf $\mathfrak{C}$ stetig, dabei 0 bzw. 1 auf den "Gegenseiten" von $\mathfrak{V}$. Mit den gleichen Randwerten lösen wir die erste Randwertaufgabe für das Außengebiet $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{C}$ (incl. $z = \infty$) und erhalten dort eine harmonische Funktion $V'(x, y)$. Es wird

$$M = D[V] \equiv \iint_{\mathfrak{V}} (V_x^2 + V_y^2)\, dx\, dy, \qquad M' \leq D[V'] \equiv \iint_{\mathfrak{V}'} (V_x'^2 + V_y'^2)\, dx\, dy,$$

letzteres nach der Minimalcharakterisierung des konformen Moduls durch Dirichletsche Integrale.

Wegen der Übereinstimmung der harmonischen Funktionen V und V' auf $\mathfrak{C}$ gilt dazu [9]

$$\frac{D[V']}{D[V]} \leq \Lambda_{\mathfrak{C}},$$

woraus die linke Hälfte von (2) folgt.

Literatur

[1] Anderson, J.M., und A. Hinkkanen: Quadrilaterals and extremal quasiconformal extensions. - Comment. Math. Helv. 70, 1995, 455–474.

[2] Krushkal', S.L.: Über die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen. - Sibirsk. Mat. Zh. 28:1, 1987, 138–145 (Russ.).

[3] Krushkal', S.L.: Grunsky coefficient inequalities, Caratheodory metric and extremal quasiconformal mappings. - Comment. Math. Helv. 64, 1989, 650–660.

[4] Kühnau, R.: Triangulierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit ganz-linearen Bezugssubstitutionen und quasikonforme Abbildungen mit stückweise konstanter komplexer Dilatation. - Math. Nachr. 46, 1970, 243–261.

[5] Kühnau, R.: Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit? - Comment. Math. Helv. 61, 1986, 290–307.

[6] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. - Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 90, 1988, 90–109.

[7] Lehto, O., und K.I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. - Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.

[8] Reich, E.: An approximation condition and extremal quasiconformal extensions. - Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1997, 1479–1481.

[9] Schober, G.: Estimates for Fredholm eigenvalues based on quasiconformal mappings. - Lecture Notes in Math. 333, Springer-Verlag, 1973, 211–217.

[10] Strebel, K.: On the dilatation of extremal quasiconformal mappings of polygons. - Comment. Math. Helv. 74, 1999, 143–149.

[11] Wu, S.: Moduli of quadrilaterals and extremal quasiconformal extensions of quasisymmetric functions. - Comment. Math. Helv. 72:4, 1997, 593–604.

[12] Yang, S.: On dilatations and substantial boundary points of homeomorphisms of Jordan curves. - Results Math. 31, 1997, 180–188.

Eingegangen am 19. November 1998