Norme d'une forme linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$, et soit w un élément de E. On considère l'application

$$T_w\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 wf \end{array}$$

1. Montrer que T_w est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme d'opérateur. On pourra commencer par le cas où w est une fonction polynôme.
2. À quelle condition cette norme est-elle atteinte ?

Série de fonctions 1

On considère l'application

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \end{array}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0^+.
3. A quoi ressemble la courbe représentative de f ?

Série de fonctions 2

On considère l'application

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}\end{array}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Donner un développement asymptotique de f en 0^+, avec précision $o(1)$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$. On pourra commencer par prouver que f est positive et décroissante, puis établir une relation liant $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. A quoi ressemble la courbe représentative de f ?

Série de fonctions 3

On considère l'application

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\end{array}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner un équivalent de f en 1^-.
3. Montrer que f est somme d'une série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
4. Donner un équivalent des coefficients de cette série entière en moyenne de Cesàro. En déduire à nouveau le rayon de convergence de cette série.

Rayon de convergence 1

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 z^n$?

Rayon de convergence 2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Rayon de convergence 3

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (non nécessairement convergente). On pose

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k.$$

   Montrer que ces limites existent dans $\bar{\mathbb{R}}$. Donner des exemples. A quelle condition a-t-on $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$?

2. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Démontrer que

$$R = \liminf_{n\to+\infty} |a_n|^{-1/n}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n \sin n} z^n.$$

Convergence des séries de Dirichlet

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On considère la *série de Dirichlet* associée

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \end{array}.$$

1. Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ un point où la série définissant f converge. Montrer que pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$, cette série converge uniformément dans le domaine
$$\left\{ s_0 + \rho e^{i\alpha} \;\middle|\; \rho \geqslant 0, |\alpha| \leqslant \theta \right\}.$$
2. Quelle forme a le domaine de définition de f ? Quelle y est la régularité de f ? Peut-on faire un parallèle avec la notion de rayon de convergence d'une série entière ? Application à la fonction ζ.

Étude de continuité

Soit $\sum a_n$ une série complexe convergente. On pose

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\sin nx}{nx} \right) \end{array}.$$

Montrer l'existence et la continuité de f . La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Calcul de $\zeta(2)$

1. Démontrer que la série de fonctions
$$t \longmapsto \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$
converge normalement vers l'identité sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
2. En intégrant, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Théorème de Fejér

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On pose

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}.$$

Que cherche-t-on à faire ? Montrer qu'*en moyenne de Cesàro*, $S_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Quel théorème retrouve-t-on ainsi ?

Théorème de Chudnovsky

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$. On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array}.$$

1. Etudier la suite de fonctions $(\varphi^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,1[$.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Lemme de Tate

Soit E un ensemble. On se donne $\varphi\colon E \to E$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$, et on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$f(\varphi(x)) = \alpha f(x) + \mathcal{O}(1).$$

Montrer qu'il existe $F\colon E \to \mathbb{R}$ telle que $F = f + \mathcal{O}(1)$ et $F(\varphi(x)) = \alpha F(x)$.

Factorisation eulérienne du sinus

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{iz}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\frac{iz}{2n}\right)^{2n} = 2iz \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right).$$

2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

L'astuce d'Herglotz

L'objectif de cet exercice est d'établir le *développement eulérien de la cotangente*

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \qquad \pi\cot\pi x = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}.$$

A cet effet, on pose $f(x) = \pi\cot\pi x$ et $g(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
2. Montrer que f et g sont 1-périodiques et impaires.
3. Montrer que f et g vérifient la même *équation fonctionnelle* $\varphi(\frac{x}{2}) + \varphi(\frac{x+1}{2}) = 2\varphi(x)$.
4. Montrer que $f - g$ se prolonge par continuité en une fonction h nulle sur $\mathbb{Z}$.
5. Conclure.
6. En déduire le résultat de l'exercice précédent lorsque $z = x$ est réel.

Remarque : Un argument d'analyticité montre que l'identité demeure pour z complexe.