Fonction dont tous les moments sont nuls

Soient $a < b$ deux réels, et $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, telle que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)dt = 0$. Que dire de f ?

Factorisation de fonctions lisses

Soient $a < b$ deux réels, et $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Lorsque x est un zéro de f, on dit que c'est un zéro d'ordre m si $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(m-1)}(x) = 0$ et $f^{(m)}(x) \neq 0$. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des zéros de f, d'ordres respectifs $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Montrer qu'il existe une application $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = g(x)\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)^{m_i}.$$

Des sommes pas vraiment de Riemann

Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k\alpha}\right)$, où $\alpha > 0$.

Une autre somme

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ quand $n \to +\infty$.

Sommes de qui ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

1. Montrer que u_n converge. On note ℓ sa limite.
2. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Et pourquoi pas un produit ?

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Une équation intégrale

Déterminer toutes les applications $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues par morceaux, telles que

$$\exists a \in [0,1] \ : \forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

Une autre équation intégrale

Déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y réels,

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

Moyennes mobiles

Déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

Zone d'importance

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.
2. Soit $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue à valeurs strictement positives. Montrer qu'à nouveau $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n g(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.
3. On suppose que f est à valeurs strictement positives. Etudier $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)^\alpha dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ quand $\alpha \to 0^+$.

Weierstrass violent

Que dire d'une fonction f limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes ?

Une intégrale définie

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x}$.

Une intégrale indéfinie

Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}$.

Intégrale de Dirichlet

Calculer $\Delta = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$.

Une intégrale à paramètre

Calculer, pour $t > -1$, $I(t) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + t\cos x)}{\cos x} dx$.

Une autre intégrale à paramètre

Soit, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) d\theta$.

1. Comparer $I(x)$ et $I(x^2)$, et en déduire $I(x)$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant des sommes de Riemann.

Encore une intégrale ?

Soient $a > 1$ et $b > 1$. Calculer

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx.$$

Théorème de Fejér

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On pose

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}.$$

Que cherche-t-on à faire ? Montrer qu'*en moyenne de Cesàro*, $S_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Quel théorème retrouve-t-on ainsi ?

Théorème de Chudnovsky

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$. On considère

$$\begin{array}{rccc} \varphi : &]0,1[& \longrightarrow &]0,1[\\ & x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array}.$$

1. Etudier la suite de fonctions $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,1[$, où $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.