

Pour commencer

Résoudre $y'' + y = \tan t$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Explosion en temps fini

Existe-t-il une application f positive non nulle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ telle que $\forall t \geq 0, f'(t) > f(t)^2$?

Lemme de Gronwall

1. Soient φ, ψ et y trois applications continues et positives sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . On suppose que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds.$$

Simplifier ce résultat dans le cas où φ est constante.

2. Soit $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe \mathcal{C}^1 et croissante. Montrer que toute solution réelle de l'équation différentielle

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0$$

est bornée sur \mathbb{R}^+ .

Théorème de Floquet

On considère sur \mathbb{C}^n un système différentiel (E) de forme $Y'(t) = A(t)Y(t)$, où $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue et T -périodique.

1. Montrer que l'existence d'une solution non nulle Φ de (E) telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: \forall t \in \mathbb{R}, \quad V(t+T) = \lambda V(t).$$

2. Soit $M(t)$ une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace des solutions de (E) . Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)A.$$

Montrer que A est inversible.

Autour du théorème de Sturm

Soit $q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y''(t) + q(t)y(t) = 0.$$

On suppose que ses solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} .

1. On suppose dans cette question que q est intégrable sur \mathbb{R} . Soit y une solution bornée de (E) , étudier le comportement de y' à l'infini. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.
2. Soit y une solution non nulle de (E) . Montrer que
 - (a) si q est majorée sur \mathbb{R} par une constante $M > 0$, alors deux éventuels zéros $t_1 \neq t_2$ de y vérifient toujours $|t_1 - t_2| \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$,
 - (b) si q est minorée par une constante $m > 0$, alors y s'annule au moins une fois sur tout segment d'amplitude $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.
3. On suppose dans cette question que q est strictement négative sur \mathbb{R} . Quelles sont les solutions réelles bornées de (E) ?

Quelques équations non linéaires

On s'intéresse à certaines équations particulières.

1. (Équation de Bernoulli) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et a, b deux applications continues sur un intervalle de \mathbb{R} . Comment résoudre

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha ?$$

Quand peut-on faire des raccords avec la fonction nulle ?

2. (Équation de Ricatti) Soient a, b et c trois applications continues sur un intervalle de \mathbb{R} . Comment résoudre complètement l'équation différentielle

$$y'(t) = a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t)$$

si d'aventure on en connaît une solution y_0 ?

3. (Application) Quelles sont les solutions réelles maximales de $y' + y + y^2 + 1 = 0$?

Stabilité asymptotique d'un système linéaire

On considère un système linéaire sur \mathbb{R}^n

$$(L) \quad Y'(t) = A(t)Y(t)$$

où $A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application continue telle que la matrice symétrique ${}^t A(t) + A(t)$ soit négative pour tout t . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

1. Montrer que $\langle Y_1(t), Y_2(t) \rangle$ converge lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour tout couple de solutions (Y_1, Y_2) de (L) .
2. Montrer que (L) admet une solution non identiquement nulle convergeant vers 0 en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \text{tr}(A(u)) du = -\infty.$$

Théorème de Lyapunov

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 nulle en 0. On considère l'équation différentielle

$$(E) \begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} .$$

On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que si $y_0 \in V$, alors la solution maximale de (E) est définie au moins sur \mathbb{R}^+ tout entier. Notre but est de montrer que, sous certaines conditions,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

dès que y_0 est dans un voisinage $W \subseteq V$ de 0.

1. On suppose tout d'abord que (E) est linéaire à coefficients constants : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres (dans \mathbb{C}) de f pour que toute solution de (E) tende vers 0 à l'infini, puis démontrer cette conjecture.

Indication : on pourra utiliser la décomposition de Dunford.

2. On revient au cas général où f n'est pas linéaire. On dorénavant suppose que la différentielle $df(0)$ de f vérifie la condition de la question précédente. On définit sur \mathbb{R}^n

$$\varphi(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{t df(0)} x, e^{t df(0)} y \rangle dt$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Vérifier que φ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . On note q son carré scalaire.

3. Étudier $q(y(t))$ pour y solution de (E) , et conclure.

Des dessins seront les bienvenus.

Intégration numérique

Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 , L -lipschitzienne en la seconde variable :

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|x - y\|.$$

On suppose que l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ admet une solution sur I , et on cherche à l'approximer numériquement par la méthode d'Euler. On prend donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose $h = T/n$, $t_k = kh$, $y_0 = y(0)$ et $y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})$. On se propose de majorer les erreurs

$$e_k = \|y_k - y(t_k)\|.$$

1. Montrer que y est de classe \mathcal{C}^2 . On pose $\varepsilon_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) - hf(t_{k-1}, y_{k-1})$; montrer que pour tout $k \leq n$, $\|\varepsilon_k\| \leq Mh^2/2$, où $M = \|y''\|_\infty$.
2. En déduire que pour tout $k \leq n$, $\|e_k\| \leq \frac{Mh}{2L} e^{Lt_k}$.

Retour sur les explosions en temps fini

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f:]a, b[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère une solution maximale $\varphi:]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. Montrer que si $\beta < b$, alors φ n'est pas bornée en β .

Retour sur la périodicité

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'équation différentielle $y'' - y = f$ admet au plus une solution périodique.

Et pour finir...

Déterminer tous les sous-espaces de dimension 2 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par les opérateurs de translation

$$\tau_a: f \longmapsto (x \mapsto f(x - a)) \quad (a \in \mathbb{R}).$$