La raison d'être de $\mathbb{R}$

Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la distance usuelle.

L'espace ℓ^2

On définit *l'espace des suites réelles de carré sommable* par

$$\ell^2 = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}.$$

On pose, pour $u \in \ell^2$,

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}.$$

Montrer que ℓ^2 muni de $\|\cdot\|_2$ est un espace vectoriel normé complet.

Distances

Soit I l'espace métrique $]0;1]$ muni de la distance d induite par $\mathbb{R}$.

1. (I, d) est-il un espace métrique complet ?
2. Trouver une distance d' sur I, topologiquement équivalente à d, telle que (I, d') soit un espace métrique complet. d et d' sont-elles uniformément équivalentes ?

La norme L^1

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur E la *norme* L^1 par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

Vérifier que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé. Est-il complet ?

Norme sur les fonctions lipschitziennes

Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\begin{array}{rccl} N\colon & L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}. \end{array}$$

Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé. Est-il complet ?

Complets dans un surespace

1. Soit X un espace métrique complet. Quels sont les sous-espaces métriques de X qui sont complets ?
2. Montrer qu'un espace métrique complet est fermé dans tout surespace.

Un résultat de point fixe

Soient (X, d) un espace métrique complet et f une application de X dans X. On suppose qu'il existe un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ soit k-lipschitzienne, avec $0 < k < 1$. Montrer que f admet un unique point fixe dans X.

Image de fermés décroissants

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, et f une application continue de E dans F. On suppose que E est complet. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de fermés de E, avec $diam(E_n) \to 0$. Montrer que

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \downarrow E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \downarrow f(E_n).$$

Du temps perdu à la recherche

1. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ le rendant complet ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que dire dans le cas de $\mathbb{R}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \middle| degP \leq n\right\}$?

Complétion d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique non vide. On cherche à le plonger isométriquement dans un espace complet.

• Première partie : Un premier plongement (méthode d'Arens-Fells)

Soit $x_0 \in X$ fixé une fois pour toutes. Pour chaque $x \in X$, on considère l'application

$$f_x \colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & d(x,y) - d(x_0,y). \end{array}$$

1. Calculer $\|f_x\|_\infty$, puis $\|f_x - f_{x'}\|_\infty$ où x et x' désignent des éléments de X.
2. En déduire une isométrie de X sur une partie d'un espace métrique complet. Est-ce un homéomorphisme sur son image ?

• Deuxième partie : Un autre plongement

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de X.

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}$. Montrer que $d(u_n, v_n)$ converge. On note $\delta(u, v)$ sa limite. Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Est-ce une distance sur $\mathcal{C}$?
2. On considère sur $\mathcal{C}$ la relation binaire
$$u \sim v \Longleftrightarrow \delta(u,v) = 0 \ .$$
Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. On note $\widehat{X}$ l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\sim$ et $\widehat{u}$ la classe d'équivalence d'une suite u de $\mathcal{C}$. Quelle est la classe d'une suite convergente dans X vers un $x \in X$ donné ? En donner un représentant canonique.
3. Montrer que δ *passe au quotient*, c'est-à-dire que $\delta(\widehat{u}, \widehat{v})$ a un sens pour u, $v \in \mathcal{C}$. Montrer que l'application ainsi définie est une distance sur $\widehat{X}$.
4. Montrer que X s'injecte isométriquement dans $\widehat{X}$, et que son image est dense.
5. Montrer que $\widehat{X}$ est complet.

• Troisième partie : Conclusion

Comparer ces deux méthodes de *complétion de X*. En quoi la seconde est-elle meilleure ? Enoncer et démontrer un résultat d'unicité concernant la seconde méthode.

Séries de Fourier et algèbres de Banach

1. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des séries de Fourier absolument sommables
$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int} \middle| \ a_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty \right\}.$$
On munit $\mathcal{A}$ de
$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int} \right\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|.$$
Montrer que $\| \cdot \|$ confère à $\mathcal{A}$ une structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative.
2. On note $Spec(\mathcal{A})$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres continus de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $\varphi \in Spec(\mathcal{A})$, $Ker\,\varphi$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$.
3. On admet que toute $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative qui est un corps est isomorphe à $\mathbb{C}$, et on admet également que tout idéal propre (c'est-à-dire différent de $\mathcal{A}$ tout entier) de $\mathcal{A}$ est inclus dans un idéal maximal. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$, montrer qu'il existe un élément φ de $Spec(\mathcal{A})$ tel que $\mathfrak{M} = Ker\,\varphi$. En déduire que $a \in \mathcal{A}$ est inversible si et seulement si $\forall \varphi \in Spec(\mathcal{A})$, $\varphi(a) \neq 0$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π périodique, ne s'annulant pas et dont la série de Fourier est absolument sommable. Montrer que la série de Fourier de $\frac{1}{f}$ est absolument sommable.

Développement limité de la fonction tangente

Calculer le développement limité de tan en 0 à l'ordre 10.

Une intégrale définie

$$\text{Calculer l'intégrale } I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x}\ .$$

Une intégrale indéfinie

$$\text{Calculer} \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}\ .$$