Différentielle de l'inverse

Montrer que l'application

$$\mathcal{I}\colon \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa différentielle.

Gradient du déterminant

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle A|B\rangle = tr({}^tAB).$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Montrer que le déterminant $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer son gradient.

Billard convexe compact

Une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ délimite un compact convexe K de $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il est possible de jouer au billard dans K pour former une trajectoire périodique avec n rebonds.

Problème de Dirichlet

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in \mathcal{C}^0(\partial U, \mathbb{R})$. Montrer que le *problème de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \quad \text{sur } U \\ u & = & f \quad \text{sur } \partial U \end{array} \right.$$

admet au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U}, \mathbb{R})$.

Différentielle de l'exponentielle

1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $\varphi\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Montrer que φ est différentiable sur $E \times F$, et calculer sa diférentielle. Généraliser au cas des applications multilinéaires continues.

   On définit l'*exponentielle de matrices* par

$$\begin{array}{rccl} \exp\colon & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{array}$$

2. Vérifier que exp est bien définie.
3. Soit pour chaque $k \in \mathbb{N}$ l'application $f_k\colon M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}), A \longmapsto A^k$. Montrer que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer calculer sa différentielle.
4. En éconçant et en démontrant au passage un théorème sur les séries d'applications différentiables, montrer que exp est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa différentielle.
5. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note dorénavant L_A, R_A et ad_A les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par

$$L_A\colon X \longmapsto AX, \quad R_A\colon H \longmapsto XA, \quad ad_A\colon X \longmapsto AX - XA.$$

   Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(-ad_A)^k}{(k+1)!} = \sum_{p+q=k} \frac{(-1)^p}{p!(q+1)!} L_A^p \sum_{l=0}^{q} L_A^l R_A^{q-l}.$$

   En déduire que $e^{-L_A} \circ d\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-ad_A)^k}{(k+1)!}.$

6. Montrer que si A est diagonalisable (resp. nilpotente), alors ad_A aussi, et calculer ses valeurs propres. En déduire la décomposition de Dunford de ad_A en fonction de celle de A.
7. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $d\exp(A)$ soit inversible.

Théorème des extréma liés

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \cdots, g_r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que si $f_{|\Gamma}$ atteint un extremum local en un point $a \in \Gamma$ où les différentielles $dg_1(a), \cdots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$dg(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(x).$$

1. Expliquer pourquoi on peut immédiatement se ramener au cas $r < n$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V de a contenu dans U dans lesquels Γ se présente sous la forme

   $$\Gamma \cap V = \{(x_1, \cdots, x_n) \in V \mid (x_1, \cdots, x_r) = \varphi(x_{r+1}, \cdots, x_n)\},$$

   où φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage de $\alpha = (a_{r+1}, \cdots, a_n)$.
3. Montrer que si on pose $g = (g_1, \cdots, g_r)$, alors

   $$Ker\, dg(a) = \{(h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mid (h_1, \cdots, h_r) = d\varphi(\alpha)(h_{r+1}, \cdots, h_n)\}.$$

4. En déduire que $Ker\, dg(a) \subset Ker\, df(a)$, et conclure.
5. Soient un entier $n \geqslant 2$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Calculer le diamètre pour la norme euclidienne de

   $$\Sigma = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1 \right\}.$$

Lemme de Morse

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. On pose
$$F = \{U \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tUA = AU\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$,
que $\Omega = F \cap GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de F, et que
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & Sym_n(\mathbb{R}) \\ U & \longmapsto & {}^tUAU \end{array}$$
est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en $U = I_n$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A dans $Sym_n(\mathbb{R})$ et une application $f\colon V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(A) = I_n$ et ${}^tf(B)Af(B) = B$ pour tout $B \in V$.
3. Montrer qu'il existe une application $g\colon V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que ${}^tg(B)Bg(B)$ soit diagonale, avec uniquement des 1 et des -1 sur la diagonale.
4. (Lemme d'Hadamard) Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Montrer qu'il existe des applications $f_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ($1 \leqslant i, j \leqslant n$ telles que
$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f_{i,j}(x).$$
5. (Lemme de Morse) Montrer que si la hessienne de f en 0 est inversible, alors il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un entier $r \leqslant n$ que l'on interprétra tels que
$$\forall x \in W, \quad f(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i^2(x) - \sum_{i=r+1}^n \varphi_i^2(x).$$

Différentiabilité d'une norme

Soit E l'espace des suites réelles convergeant vers 0. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$, déterminer en quels points elle est différentiable. Même question si E est l'espace des suites réelles bornées.

Différentiabilité de la distance à un fermé

Soit F un fermé non trivial de $\mathbb{R}^n$ euclidien, de complémentaire U. On définit sur U l'application

$$\delta\colon \begin{array}{ccl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \min\limits_{y\in F} \|x-y\|^2. \end{array}$$

1. Expliquer pourquoi δ est bien définie.
2. Pour $\varepsilon \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on introduit

$$\varphi_{\varepsilon,x}\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \inf\limits_{\substack{z\in F \\ \|x-z\|\leqslant d(x,F)+\varepsilon}} \langle 2y, x-z\rangle\ . \end{array}$$

   Montrer que lorsque $\varepsilon \to 0^+$, $\varphi_{\varepsilon,x}$ converge uniformément vers $\varphi_{0,x}$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'il exsite une application $c\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0$ telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{0,x}(y) - c(\varepsilon)\|y\| \leqslant \varphi_{\varepsilon,x}(y) \leqslant \varphi_{0,x}(y).$$

3. On pose

$$\psi\ :\ \begin{array}{ccl} U\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \min\limits_{\substack{z\in F \\ \|x-z\|=d(x,F)}} \langle 2y, x-z\rangle. \end{array}$$

   Est-ce bien défini ? Montrer que, lorsque $y \to 0$,

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \psi(x,y) + o(\|y\|).$$

4. En déduire que $d(\cdot,F)$ est différentiable en $x \in U$ si et seulement si la distance $d(x,F)$ est atteinte en un seul point de F. Quel est alors son gradient ? Faire un dessin !