Une intégrale

Soient m et n deux entiers naturels. Justifier l'existence de l'intégrale

$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{(2m+1)t}{2} \sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} dt$$

et la calculer.

Une développement

Développer $x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{4-2\cos x}$ en série de Fourier.

Série de Fourier divergente

1. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left[\left(2^{m^3}+1\right)\frac{x}{2}\right], \end{array}$$

   et on la prolonge à $\mathbb{R}$ par parité puis par 2π-périodicité. Montrer que f est alors bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $n, N, k \in \mathbb{N}$. On pose

$$a_{n,k} = \int_0^{\pi} \cos nt \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt \qquad \text{et} \qquad s_{N,k} = \sum_{n=0}^{N} a_{n,k}.$$

   Calculer explicitement les $a_{n,k}$, et en déduire que les $s_{n,k}$ sont tous positifs. Monter qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $s_{k,k} > C \ln k$.

3. Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Étude de convergence

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissant vers 0.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Soit f sa limite simple, montrer que f est continue sur $]0, 2\pi[$.
2. Montrer que si $\lambda_n = o(1/n)$ quand $n \to \infty$, alors $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.
3. Montrer que réciproquement, si $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $\lambda_n = o(1/n)$.
4. Plus généralement, montrer que s'équivalent :
   (i) $\lambda_n = o(1/n)$,
   (ii) $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$,
   (iii) f est continue sur $\mathbb{R}$,

Formule sommatoire de Poisson

Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, lorsque $|x| \to \infty$, $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$.

1. Pour tout entier relatif n, on pose

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi nt}dt.$$

   Démontrer la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

2. On considère la *fonction thêta de Jacobi*

$$\begin{array}{rccl} \Theta : &]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}. \end{array}$$

   Montrer l'identité $\forall s > 0$, $\sqrt{s}\ \Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\pi/s})$, et en déduire un équivalent de $\Theta(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Solutions périodiques d'une équation différentielle autonome

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue par morceaux et T-périodique. Montrer que

$$\iint_{[0,T]^2} |f(u)-f(v)|^2 dudv = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left| \int_0^T f(x)e^{2i\pi nx/T}dx \right|^2 .$$

2. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\iint_{[0,T]^2} |f'(u)-f'(v)|^2 dudv \geqslant \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \iint_{[0,T]^2} |f(u)-f(v)|^2 dudv.$$

3. Soit $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application K-lipschitzienne. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une solution périodique non constante de l'*équation différentielle autonome*

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t)),$$

alors le générateur positif T du groupe des périodes de φ ne peut être arbitrairement petit, et en expliciter un minorant.

Équation de la chaleur

Soit $L > 0$. On cherche à résoudre sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (x \in [0, L], t \in \mathbb{R}^+, T \in \mathcal{C}^1([0, L] \times \mathbb{R}^+))$$

avec les *conditions au bord*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, L], T(x, 0) = T_0(x),$$

où T_0 est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $T_0(0) = T_0(L) = 0$.

1. On prolonge T_0 et les $T(\cdot, t)$ à $[-L, L]$ par imparité, puis à $\mathbb{R}$ par $2L$-périodicité. Quelle est alors la régularité de T_0 ? Que peut-on en déduire ?
2. On recherche une solution sous la forme

$$T(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(t) \sin(2\pi x/L).$$

   Commenter la logique de cette démarche, puis, en dérivant formellement, trouver une équation différentielle satisfaite par les $b_n(t)$, et la résoudre. Vérifer alors que la solution ainsi obtenue convient. Que peut-on dire de sa régularité ? Et de son passé $(t < 0)$?
3. On veut démontrer que cette solution est en fait la seule. Pour cela, montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, L] \times [0, T]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, alors le maximum de f est atteint en $(x = 0, t = 0)$ ou en $(x = L, t = 0)$, puis montrer que c'est encore le cas si on suppose seulement que $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leqslant 0$, et enfin conclure.

Phénomène de Gibbs

On désigne par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique normalisée coïncidant avec l'identité sur $]0, 2\pi[$.

1. Donner l'allure du graphe de f, et calculer ses coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
2. On considère les sommes partielles
$$S_n \colon x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$
Étudier les extrema de S_n.
3. Soit m_n le premier minimum local de S_n sur $[0, 2\pi]$. Etudier la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner une interprétation graphique et commenter.

Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel.

1. Soit $x \in E$. On note $F_x = \{y \in F | \|x - y\| = d(x, F)\}$. Montrer que $y \in F_x$ si et seulement si $x - y \in F^\perp$.
2. Montrer que F_x a *au plus* un seul élément.
3. On suppose dans cette question que F est complet. Montrer qu'alors F_x n'est pas vide ; on note x_F son élément. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$, et que $x \mapsto x_F$ n'est autre que la projection orthogonale sur F. Que vaut $(F^\perp)^\perp$?
4. On prend ici $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$. Que vaut $F^\perp$? Conclure.

Théorème de Wiener

On notera $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de toute fonction continue et 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier est sommable
$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty \right\}.$$
On munit $\mathcal{A}$ de
$$\|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|.$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis montrer que toute $f \in \mathcal{A}$ est somme de sa série de Fourier.
2. Montrer que $\|\cdot\|$ confère à $\mathcal{A}$ une structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative.
3. On note $Spec(\mathcal{A})$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres continus de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $\varphi \in Spec(\mathcal{A})$, $Ker\,\varphi$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$.
4. On admet que toute $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative qui est un corps est isomorphe à $\mathbb{C}$, et on admet également que tout idéal propre (c'est-à-dire différent de $\mathcal{A}$) de $\mathcal{A}$ est inclus dans un idéal maximal. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$, montrer qu'il existe un élément φ de $Spec(\mathcal{A})$ tel que $\mathfrak{M} = Ker\,\varphi$. En déduire que $a \in \mathcal{A}$ est inversible si et seulement si $\forall \varphi \in Spec(\mathcal{A})$, $\varphi(a) \neq 0$.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π périodique, ne s'annulant pas et dont la série de Fourier est absolument sommable. Montrer que la série de Fourier de $\frac{1}{f}$ est absolument sommable.