Chemins sur un cube

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un cube, dont on choisit deux sommets A et B éventuellement confondus. Calculer le nombre de chemins joignant A à B et formés de n arêtes de ce cube.

Représentation de groupes finis

Soit G un groupe fini. On appelle *représentation de* G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et ρ un morphisme (pas forcément injectif ni surjectif) de G dans $GL(V)$. On dit que V est *irréductible* si les seuls sous-espaces de V stable par tous les $\rho(g)$ sont $\{0\}$ et V lui-même.

1. (Exemple) Construire une représentation non-triviale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Est-elle irréductible ?
2. Pour toute représentation (V, ρ) de G, on note

   $$V^G = \{x \in V | \forall g \in G, \rho(g)(x) = x\}.$$

   Que dire de V^G ? Montrer que l'endomorphisme de V

   $$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

   est un projecteur d'image V^G. En déduire que

   $$dim\, V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr\, \rho(g).$$

3. Étant données deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) d'un même groupe G, on appelle *morphisme de représentations* toute application linéaire $\varphi \colon V_1 \longrightarrow V_2$ telle que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$. Montrer que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors φ est soit nulle, soit bijective, puis montrer que si $(V_1, \rho_1) = (V_2, \rho_2)$ est irréductible, alors φ est une homothétie.

Exponentielle partielle

Existe-t-il une partie $A \subseteq \mathbb{N}$ telle que, lorsque $x \to +\infty$,

$$\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \sim \frac{e^x}{x^2} \text{ ?}$$

Newton, polynômes et polygones

1. Soit K un corps commutatif. On se donne n éléments $a_1, \cdots, a_n$ de K, et on pose
$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) \in K[X].$$
Pour tout entier naturel k, on appelle S_k la k-ième *somme de Newton*
$$S_k = a_1^k + \cdots + a_n^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k,$$
et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note σ_k les *fonctions symétriques élémentaires*
$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ \sigma_2 = \sum_{i<j} a_i a_j, \ \cdots, \ \sigma_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$
En considérant la *série génératrice* $X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} S_m X^m$,
démontrer les relations suivantes :
• Si $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_m - \sigma_1 s_{m-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{m-1} S_1 + (-1)^n \sigma_m m = 0$,
• Si $m \geqslant n$, $S_m - \sigma_1 s_{m-1} + \cdots + (-1)^m \sigma_n S_{m-n} = 0$.
2. Soient $n+1$ nombres complexes $z_0, z_1, \cdots, z_n$ tels que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ satisfasse la relation
$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(z_i).$$
Montrer que les $z_1, \cdots, z_n$ sont les affixes des sommets d'un n-gone régulier dont le centre est d'affixe z_0.

Polynôme surjectif sur $\mathbb{Q}$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ induise une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

Lemme de Gauss et critère d'Eisenstein

Lorsque $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme non nul à coefficients entiers, on appelle *contenu* de P et on note $c(P)$ le pgcd des coefficients de P.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tous non nuls. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$. Ceci est le lemme de Gauss.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il est aussi irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Quel est le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?
4. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p qui divise tous les a_i sauf a_n, et dont le carré ne divise pas a_0 (on dit que P est *d'Eisenstein en* p). Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. Montrer que $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ pour p premier.

Anneaux de polynômes

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre, et soit S une partie de A telle que $1 \in S$, $0 \notin S$ et $s, s' \in S \implies ss' \in S$. On pose $S^{-1}A = \{\frac{a}{s} | a \in A,\ s \in S\} \subseteq Frac(A)$. Vérifier que c'est un anneau. Montrer que si A est principal, alors $S^{-1}A$ aussi.
3. En déduire que $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$ est principal.
4. Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer que $A[X]$ est intègre et principal si et seulement si A est un corps.

Matrice magique

Soient $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ deux familles de n réels. On suppose les a_i et les b_i tous distincts, et on note $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $a_i + b_j$. Montrer que si le produit des éléments d'une ligne de M est une constante qui ne dépend pas de la ligne, alors il en va de même pour les colonnes de M.

Exponentielles de matrices

On pose, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Pour quelles valeurs de A est-ce défini ? Montrer que pour toute A, $\exp A$ est un polynôme en A.

Bézout matriciel

1. Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour tout entier naturel non nul n, on note $GL_n(A)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $M_n(A)$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans A. Caractériser $GL_n(A)$.
2. Soient n entiers relatifs $x_1, \cdots, x_n$ premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer qu'il existe une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
Peut-on la choisir dans $SL_n(\mathbb{Z})$?

Théorème de Frobenius-Zolotarev

1. Soient n et m deux entiers naturels tous non nuls. Déterminer tous les morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ vers $\mathfrak{S}_m$. (Cette question sert juste à donner des idées ; à part ça, elle n'a rien à voir avec la suivante.)
2. Soit p un nombre premier différent de 2, et soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le coprs à p éléments. Comme toute matrice A de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ définit une bijection de l'espace vectoriel $V = \mathbb{F}_p^n$ dans lui-même, on peut voir $GL_n(\mathbb{F}_p)$ comme un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}(V)$ des permutations de l'ensemble fini V. Montrer alors que $A \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ est dans le groupe alterné $\mathfrak{A}(V)$ si et seulement si son déterminant est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

Déterminant de Schmidt

Calculer pour tout entier naturel non nul n les déterminants des matrices $(d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $(\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $d_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et à j et $\delta_{i,j}$ est le pgcd de i et de j.

Divination

Soit A un anneau unitaire, non supposé commutatif. Soient $a, b \in A$ tels que $1 - ab$ est inversible. $1 - ba$ est-il nécessairement inversible ?

Théorème de Kakutani

Soient E un espace vectoriel normé, K une partie compacte convexe de E, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications affines continues de K dans K commutant deux à deux. Démontrer que les f_i admettent un point fixe commun.

Autour du théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé.

1. On suppose E de dimension infinie. Expliquer "intuitivement" pourquoi la boule unité de E ne peut pas être compacte, puis démontrer ce fait.
2. Que dire si la sphère unité de E est compacte ?

Norme d'une forme linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, et soit ω un élément de E n'ayant qu'un nombre fini de zéros. On considère l'application

$$T_\omega : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \omega f \end{array}$$

1. Montrer que T_ω est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme d'opérateur.
2. A quelle condition cette norme est-elle atteinte ?

Une intégrale à paramètre

Calculer, pour $t > -1$, $I(t) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x} dx$.

Une autre intégrale à paramètre

Soit, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta + x^2) d\theta$.

1. Comparer $I(x)$ et $I(x^2)$, et en déduire $I(x)$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant des sommes de Riemann.

Une intégrale sans paramètre

$$\text{Calculer l'intégrale } I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x} \ .$$

Factorisation eulérienne du sinus

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{iz}{2n}\right)^{2n}-\left(1-\frac{iz}{2n}\right)^{2n}=2iz\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right).$$

2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin z = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

L'astuce d'Herglotz

L'objectif de cet exercice est d'établir le *développement eulérien de la cotangente*

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \qquad \pi\cot\pi x = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}.$$

A cet effet, on pose $f(x)=\pi\cot\pi x$ et $g(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et qu'elles sont 1-périodiques et impaires.
2. Montrer que f et g vérifient la même *équation fonctionnelle* $\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{x+1}{2})=2\varphi(x)$.
3. Montrer que $f-g$ se prolonge par continuité en une fonction h nulle sur $\mathbb{Z}$.
4. Conclure.
5. En déduire le résultat de l'exercice précédent lorsque $z=x$ est réel.

Remarque : Un argument d'analyticité montre que l'identité demeure pour z complexe.

Calcul de $\zeta(2)$

1. Démontrer que la série de fonctions $t \longmapsto \sin t+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1}$ converge normalement vers l'identité sur $[-\pi/2,\pi/2]$.
2. En intégrant, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Théorème d'Abel

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence au moins 1 telle que $\sum a_n$ converge. Montrer le *théorème d'Abel* :

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Que dire si $\sum a_n$ converge absolument ?

2. La réciproque du théorème d'Abel est elle vraie ?
3. (Application) Evaluer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\ .$$

Réciproque du théorème d'Abel : théorème taubérien de Hardy-Littlewood

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence au moins 1. On suppose que $a_n = O(1/n)$ et que $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ existe et est nulle. Le but de l'exercice est de montrer que $\sum a_n$ converge et que sa somme est nulle. Il s'agit donc d'une réciproque du théorème d'Abel, sous la condition $a_n = O(1/n)$. On notera Φ l'ensemble des fonctions $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $\sum a_n \varphi(x^n)$ converge simplement sur $[0,1[$, avec $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0$.

1. Vérifier que toute fonction polynôme nulle en 0 est dans Φ.
2. Montrer que pour toute fonction polynôme P, la limite

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n)$$

existe. Que vaut-elle ?

3. Soit g l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ valant 0 sur $[0,1/2[$ et 1 sur $[1/2,1]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions polynômes P et Q telles que $P(0) = Q(0) = 0$, $P(1) = Q(1) = 1$, $P \leqslant g \leqslant Q$ sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{Q(x) - P(x)}{x(1-x)} dx < \varepsilon$.
4. En déduire que $g \in \Phi$, et conclure.

Equivalent au bord

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que $\sum b_n$ diverge. On pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

et on suppose que le rayon de convergence des séries entières définissant a et b ont toutes deux un rayon de convergence supérieur à 1.

1. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$, alors

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a(x)}{b(x)} = \ell.$$

2. Montrer que si on suppose seulement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = \ell$, alors on a encore

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a(x)}{b(x)} = \ell.$$

3. (Application) Montrer que lorsque $x \to 1^-$, on a les équivalents

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} \sim -\frac{\ln(1-x)}{\ln a}\ (a \in \mathbb{N},\ a \geqslant 2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Intégrales eulériennes

On considère les deux applications suivantes :

$$\Gamma\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \end{array} \quad \text{et} \quad B\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \end{array}$$

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que Γ vérifie l'équation fonctionnelle $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Donner un équivalent de Γ en 0^+, et tracer sa courbe représentative.
4. Montrer que B vérifie les équations fonctionnelles suivantes :

$$\forall x, y > 0,\ B(x,y) = B(y,x) \qquad \text{et} \qquad B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

5. Montrer que la suite de fonctions

$$I_n\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \end{array}$$

converge simplement vers Γ. En utilisant la fonction B, en déduire la *formule d'Euler*

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

6. Montrer que pour $x, y > 0$ fixés, $B(x+n+1,y) \sim \Gamma(y)/n^y$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire la formule

$$\forall x, y > 0, \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ ,$$

puis calculer $\Gamma(1/2)$.

7. Démontrer la *formule de Weierstrass*

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}},$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni.

8. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt.$$

9. Démontrer la *formule de duplication*

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

10. On *admet* (voir l'exercice à ce sujet) la *factorisation eulérienne du sinus*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Démontrer la *formule des compléments*

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$