Norme sur les fonctions lipschitziennes

1. Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Vérifier que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. On définit
$$\begin{array}{rccc} N\colon & L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}. \end{array}$$
N fait-elle de L un espace vectoriel normé ?
3. On pose $L_0 = \{f \in L | f(0) = 0\}$. Vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de L. N est-elle une norme sur L_0 ?
4. Montrer que si $f \in L_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$.

Topologie des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On voit $M_n(\mathbb{R})$ comme $\mathbb{R}^{n^2}$, et on en profite pour le munir de la norme produit. Montrer que $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense.

Encore des matrices inversibles !

On reprend les mêmes conventions que celle en vigueur dans l'exercice précédent. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles. On suppose que $A_n \to A$ et $A_n^{-1} \to B$. Montrer que A est inversible, quel peut bien être son inverse ? Ce résultat est-il encore valable si on ne suppose plus que $(A_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Projecteurs en dimension finie

Toujours les mêmes conventions. Montrer que l'ensemble des projecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $L(\mathbb{R}^n)$.

Fonctions positives

Soient $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$, et $F^+ = C^0([0,1],\mathbb{R}^+) \subseteq F$. Calculer $\overline{F^+}$ et $\overset{\circ}{F^+}$ lorque F est muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, puis lorqu'il est muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.

Continuité de la dérivation et de l'intégration

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On considère les applications

$$I\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(I(f)\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) \end{array}$$

et

$$I\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}.$$

Lesquelles sont continues ?

Droites dans le plan

Le plan est-il réunion dénombrable de droites ?

Fonction irrationnelle

Existe-t-il une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par laquelle l'image de tout rationnel est irrationnelle, alors que l'image de tout irrationnel est rationnelle ?

Cardinal de l'ensemble des applications continues

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer son cardinal ; autrement dit, trouver un ensemble simple (comme $\varnothing$, $[|1, 18|]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, ...) avec lequel E soit en bijection.

Une forme linéaire sur l'espace des suites

Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace des suites réelles, et soit $A \in E^*$ une forme linéaire sur E. On suppose que pour toute suite u de E, il existe un entier $n(u)$, *dépendant* a priori *de* u, tel que $A(u) = u_{n(u)}$. Que dire alors de A ?

Ensemble triadique de Cantor

On de place dans $I = [0, 1]$ muni de la distance induite par $\mathbb{R}$. On définit une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I par récurrence : on pose $K_0 = I$, puis, K_n étant réunion disjointe de 2^n segments de longueurs 3^{-n}, on coupe chacun de ces segments en trois parties égales, dont on ne conserve que les deux extrêmes, et on définit K_{n+1} comme la réunion des 2^{n+1} segments obtenus. On pose enfin

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \downarrow K_n.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x \in I$ pour que $x \in K$.
2. Quel est le cardinal de K ?
3. Calculer $\overline{K}$ et $\overset{\circ}{K}$. K est-il ouvert ? Fermé ?
4. Donner un exemple de fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, avec un nombre non dénombrable de zéros.
5. Soit A une partie de I. On appelle *mesure* de A la quantité

$$mes(A) = \inf_{\substack{r\in\mathbb{N} \\ \bigcup_{i=1}^{r}]a_i,b_i[\supseteq A}} \sum_{i=1}^{r} |b_i - a_i|.$$

   Déterminer les bornes supérieure et inférieure de mes. Sont-elles atteintes ? $mes(A) = 0$ implique-t-il $A = \varnothing$? Calculer $mes(K)$, commentaires ?
6. Calculer $mes(\mathbb{Q})$.

Bijection non bicontinue

Exhiber deux espaces métriques X et Y ainsi qu'une bijection continue $f : X \to Y$ telle que f^{-1} ne soit pas continue.

La convergence simple n'est pas métrisable

Soit X un ensemble. Etant données une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ et une fonction f de X dans $\mathbb{R}$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers f si pour tout $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose X infini. Montrer que la convergence simple n'est pas métrisable ; autrement dit, montrer qu'il nexiste pas de distance sur l'espace de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{R}$ pour laquelle les suites convergentes soient exactement les suites convergeant simplement.

   Indication : On pourra, étant donnée une suite injective $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X, considérer les suites de fonctions $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_{x_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$, 0 sinon.
2. Que dire si X est fini (non vide) ?

Norme d'une forme linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, et soit ω un élément de E n'ayant qu'un nombre fini de zéros. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} T_\omega : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \omega f \end{array}$$

1. Montrer que T_ω est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme d'opérateur.
2. A quelle condition cette norme est-elle atteinte ?

Pour être discret, il ne faut pas être trop gros

Soit A une partie discrète de $\mathbb{R}$. Montrer que A est au plus dénombrable.

Pour être sommable, *idem*

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On pose

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J \text{ fini} \subseteq I} \sum_{i\in J} x_i \in [0, +\infty].$$

Montrer que si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, alors le *support*

$$supp(x_i) = \{i \in I \,|\, x_i \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

Fermés disjoints

Soit X un espace métrique, et soient A et B deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Fermés contre ouverts 1

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

Fermés contre ouverts 3 ★

Un rectangle ouvert non vide R de $\mathbb{R}^2$ peut-il être partitionné en segments de droite fermés non triviaux, c'est-à-dire non réduits à un point ?

Topologie des points extrémaux d'un convexe ★

Si C est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, on dira qu'on point x de C est extrémal si $C - \{x\}$ est encore convexe.

1. (Quelques exemples) On se place pour commencer dans le plan $\mathbb{R}^2$. Quels sont les points extrémaux d'un carré plein (intérieur + frontière) ? D'un disque fermé ? D'un disque ouvert ?
2. L'ensemble des points extrémaux d'une partie convexe du plan est-il toujours fermé ?
3. L'ensemble des points extrémaux d'une partie convexe *fermée* du plan est-il toujours fermé ?
4. L'ensemble des points extrémaux d'une partie convexe *fermée* de l'espace $\mathbb{R}^3$ est-il toujours fermé ?

Points fixes simultanés

Soit l'espace métrique $I = [0, 1]$ muni de la distance usuelle, et soit G un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de I. Les éléments de G ont-ils nécessairement un point fixe commun ? Et si on suppose G abélien ?

Développement limité de la fonction tangente

Calculer le développement limité de tan en 0 à l'ordre 10.

Un développement asymptotique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par relation de récurrence $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ et la condition initiale $u_0 = 0$. Donner un équivalent puis un développement asyptotique à trois termes de u_n.