L'origamiques
(les mathématiques de l'origami)

Victoria
Lebed
11/2015

折り紙

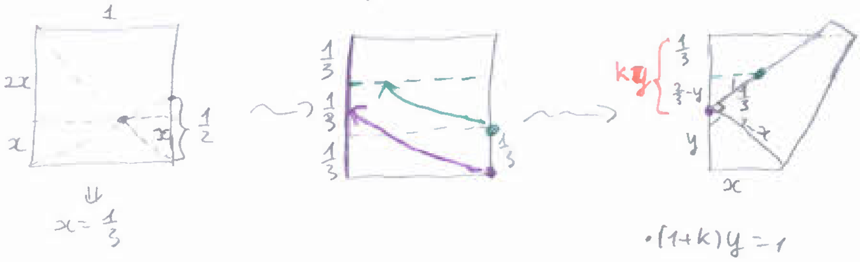
plier: 折 — oru (jp), zhe (chinois)

papier = fil + famille: 紙 — kami (jp), zhi (chinois)

① Deux parmi les Trois grands problèmes de l'Antiquité.

Ⓐ Duplication du cube

L'origine mythique : le pb des Déliens (doubler l'autel d'Apollon).
Solution origamique (Messer '86) :



$K = \sqrt[3]{2}$

⇑

• $(1+k)y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1+k}$

• $x^2+y^2 = (1-x)^2 \Rightarrow y^2 = 1-2x = 1-2\frac{2k-1}{3k} = \frac{2-k}{3k}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{2-k}{3k} \Rightarrow$ $3k = (k^2+2k+1)(2-k) \Rightarrow$ $k^3-2=0 \Rightarrow k=\sqrt[3]{2}$

• $\frac{1-x}{x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-y} = \frac{1}{2-3y} = \frac{1}{2-\frac{3}{1+k}} = \frac{1+k}{2k-1}$

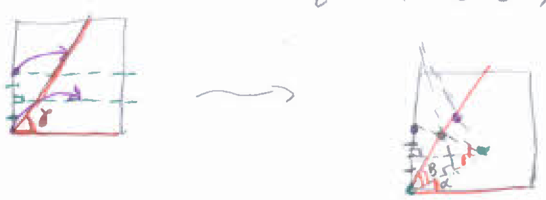
$\Downarrow$

$\frac{1}{x} = \frac{1+k}{2k-1} + 1 = \frac{3k}{2k-1}$

Ⓐ' Construction du N-gon régulier, $N = 2^i 3^j \underbrace{(2^k 3^l + 1)}_{\text{premier de Pierpont}}$

Ⓑ Trisection de l'angle

Solution origamique (~~Abe~~ '80, Jacques Justin '84) :



$\beta = 2\alpha, \ \beta + \alpha = \gamma$

$\Downarrow$

$\alpha = \frac{\gamma}{3}$.

Rmk : • Ces pb ne sont pas résolubles à la règle et au compas (Wantzel 1837), mais le sont à la règle graduée et au compas (III s. av. JC, Archimède).
• Plus généralement, l'origami résout ∀ équation de degré 3 & 4 (Beloch '36, '89, '95, '00, ...).
• Par contre, ni le 3ème grand problème (la quadrature du cercle), ni la quintesection de l'angle ne sont réalisables avec l'origami.

② Des bribes de l'histoire de l'origami

source principale : page web de Hatori Koshiro

L'Orient

105 (ou + tôt) l'invention du papier en Chine

? zhezhi en Chine ? (pas de preuves)

6 s. les moines buddhistes pourraient importer l'origami au Japon

1680 1ère mention (poème de Ihara Saikaku)

1734 1ère image

1764 1er livre "Tsutsumi-no ki" (Ise Sadatake)

1797 "Sembazuru, orikata" (Akisato Rito)
100 grue pliage

1893 "Exercices géométriques de pliage de papier" (Rao)

1930' Akira Yoshizawa : l'origami pour apprendre la géométrie

2 courants :
1) cérémonial (samouraï)
2) récréationnel (ukiyo-e, estampes, étoffes pour les kimono)

L'Occident

12 s. ? l'origami apparaît dans le système éducatif en Espagne (influence des Maures)

1490 1ère image : bateau, dans "Tractatus de Sphaera Mundi" (Johannes de Sacrobosco)

1614 "prison en papier" (bombe à eau ?) mentionnée dans la pièce "La Duchesse de Malfi" (John Webster)

~1810 les plus vieux modèles conservés (musées allemands)

1850' l'origami est parmi les "occupations" (dans une version créative !) proposées dans le 1er kindergarten (Friedrich Fröbel), pour apprendre
→ formes de la vie
→ formes de la beauté
→ formes de savoir (géométrie)

1890 "Le livre des amusettes" (Toto)

rapprochement à partir de la Restauration de Meiji (1868)
(e.g., l'origami Fröbelien pénètre dans le système éducatif japonais)

1949 1ère axiomatique (Yates, "Méthodes géométriques")

50' Yoshizawa, 1er artiste : · expression émotionnelle
· nouvelles techniques (e.g. pliage humide)

50' Cercle international
· système de notations (Yoshizawa & Sam Randlett & Robert Harbin)
· l'introduction du mot "origami" en Europe (avant : · Papierfalten · paper folding · pajarita)
· publication de modèles

60' Uchiyama Koko : l'origami abstrait en tant qu'un art
aussi · brevets pour les modèles
· bases pour les modèles (30' ; e.g. : oiseau ou grenouille)

'78 Mouvement français des plieurs de papier

80' Étude des patrons réalisables (Maekawa, Engel) → on n'est plus obligé d'utiliser les bases

'89 · 1ère Conférence intern^le sur l'origami dans la science, les mathématiques et l'éducat^n (Ferrara, Italie)

· l'origami computationnel (Lang : programme TreeMaker)

· l'axiomatique complète (Justin)

'96 Le pb de réalisabilité de patrons global est NP complète (Bern & Hayes)

2018 Télescope spacial "origamique" (James Webb Space Telescope)

Le mot "origami"

- époque de Heian (794-1185) : le mot a un autre sens  ← papier pour écrire des lettres, des listes
- époque de Showa (1926-1989) : sens moderne (remplace les mots "orisue", "orikata", "orimono")

L'origami traditionnel :

	L'Orient	L'Occident
la forme la plus répandue	orizuru (la grue)	pajarita (petit oiseau)
angles	22.5°	45°
coupures, distortion	oui	non
papier	washi	européen (rectangle coloré)
"judgement folds"	oui	non
origami modulaire	oui	non

③ Utilisation scientifique

- téléscopes spaciaux
  - James Webb Space Telescope, réalisation prévue en 2018
  - Eyeglass, développé avec le mathématicien Robert Lang ; un prototype construit en 2002
- panneaux solaires : un panneau utilisant le pliage de Miura ('70) fut installé sur un vaisseau spacial japonais en 1995
- avions utilisables dans l'espace : projet
- coussins de sécurité
- batteries pliables (2013)
- robots (2015)
- micro-sondes
- stents, ou ressorts (2005)
- ADN & protéines pliables, e.g pour transporter des médicaments (modèles primitifs : 2006 & 2013 respectivement),

Rmq : Les applications nécessitent souvent l'origami rigide.

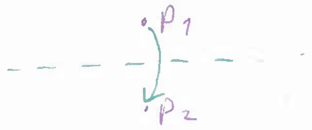
④ Axiomatique & constructibilité

(Huzita-Hatori & Scimemi '91, Justin '89 ; les axiomes 1)-6) connus avant)

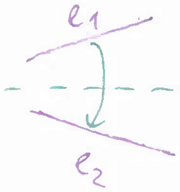
1) 

droite

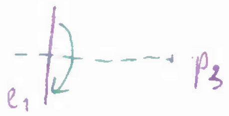
Rmq : En général, ces plis peuvent ne pas exister (5-7), ou ne pas être uniques (3,5-7).

2) 

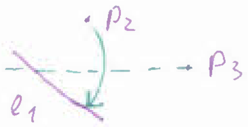
médiatrice

3) 

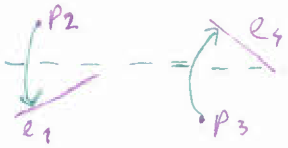
bissectrice

4) 

perpendiculaire

5) 

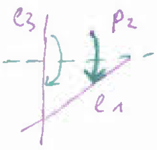
l'intersection d'une droite & d'un cercle

6) 

Margharita Beloch '36

l'utilisation d'une règle graduée

⚠ En général, ceci équivaut à résoudre une équation cubique.

7) 

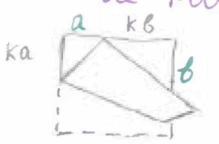
système complète (Lang), mais pas minimal.

Nombres constructibles : corps $\supseteq \mathbb{Q}$, stable par $\sqrt{\ }$ & $\sqrt[3]{\ }$.

Rmq : Axiomes 1)-4) (ou 1)-5)) $\Leftrightarrow$ constructions à la règle & au compas.

Une efficace construction de $\mathbb{Q}$:

Thm de Haga :



$b = \frac{2a}{1+a}$

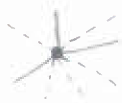
□ $a + kb = 1 \Rightarrow b = \frac{1-a}{k} = \frac{2a(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{2a}{1+a}$

$a^2 + (ka)^2 = (1-ka)^2 \Rightarrow a^2 = 1 - 2ka \Rightarrow k = \frac{1-a^2}{2a}$ ☒

Exemple : Construction de $\frac{1}{5}$ en 3 plis : $1 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \overset{\text{Thm}}{\rightsquigarrow} \frac{2}{3} \overset{\text{Thm}}{\rightsquigarrow} \frac{4}{5}$.

⑤ Pliabilité

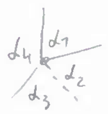
Ⓐ Patrons locaux



Thm de Maekawa(-Justin) : Autour de chaque sommet, $\# | - \# \vdots = \pm 2$.
matheux, artiste, programmeur, chef de boîte

$\pi(n-2) = 2\pi \cdot \# \vdots$
$n = \# | + \# \vdots$
$\Rightarrow \# | + \# \vdots = 2 + 2\# \vdots$ ☒

Thm de Kawasaki (-Robertson-Justin) :
prof de maths, origamiste



$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \dots - \alpha_{2k} = 0$

$\Downarrow$

Thm d'Azuma-Justin '90 : $\exists \geq 2^k$ pliages.

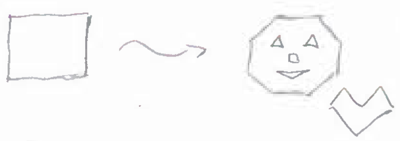
Ⓑ Patrons globaux

Ⓐ ⇒ bicolorabilité.

Hull'94 : des conditions nécessaires plus compliquées.

Bern-Hayes'96 : le pb de pliabilité de patrons globaux est NP complète

Ⓒ Fold & Cut Theorem :



On peut obtenir ∀ collection de figures polygonales par plusieurs plis & une coupure droite.

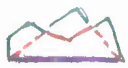
Origine : "Compétitions mathématiques" 1721, Kan Chu Sen (Japon).
formulation générale : Gardner 1995.
Solution : Demaine-Demaine-Lubiw 1999.

⑥ Problème du rouble / dollar froissé, ou "Napkin problem"

(Arnol'd '56 - le futur grand mathématicien agé de 19 ans !)

périmètre : P $\qquad\qquad$ P'

Peut-on avoir $P' > P$?

- Non pour les pliages le long de droites :  $P' - P = \ell - \ell' \leq 0$
- Non si P' est convexe (*).
- Oui en général. Exemples :
  - Lang '97 : · Un modèle de 1797 !
    ·  $P' \to +\infty$.
  - Yaschenko '98, "Make your dollar bigger now" : 

  - Tarasov '04 : 
  - Krat '05
- Généralis^{n} : On peut augmenter le volume d'un polyèdre convexe.

(*) <u>Thm</u> : $F \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} F'$ polygône convexes $\Rightarrow \underset{\text{périmètre}}{P}(F) \geq P(F')$.

<u>Preuve</u> (Petrunin 2010) :

Not^{ns} : · $\langle A_1, .., A_n \rangle$ = l'enveloppe convexe de $A_1, .., A_n$.
· $A_i' = \varphi(A_i)$

Soit $P(F') > P(F)$. Alors $\exists A_1, .., A_n \in F$ t.q. $P(\underbrace{\langle A_1', .., A_n' \rangle}_{=:M'}) > P(\underbrace{\langle A_1, .., A_n \rangle}_{=:M})$, avec
- n minimal,
- $P(\langle A_1', .., A_n' \rangle) - P(\langle A_1, .., A_n \rangle)$ maximale.

Les A_i' sont des sommets de M', 2 à 2 distincts
(si c'était faux pour A_n', alors on aurait $P(\langle A_1', .., A_{n-1}' \rangle) = P(\langle A_1', .., A_n' \rangle)$ & $P(\langle A_1, .., A_{n-1} \rangle) \leq P(\langle A_1, .., A_n \rangle)$.)

Si A_i est un sommet de M, alors son angle dans M $\underset{=:\alpha}{\geq}$ l'angle de A_i' dans M' $=: \alpha'$:

On bouge avec la vitesse 1

$\Rightarrow P(M)$ diminue avec $v_{init.} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$
$\Rightarrow P(M')$ — // — $\leq 2\cos\frac{\alpha'}{2}$
$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha'}{2} \leq 0$
$\Rightarrow \alpha \geq \alpha'$.

Conclusion : $\forall A_i$ est un sommet de M.

$M =$ 

$P(M) = \sum |A_i A_{i+1}| \geq \sum |A_i' A_{i+1}'| \geq P(M')$, contradiction ☒.