Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.

Bernhard Riemann

[Aus Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Zweite Auflage, bearbeitet von Heinrich Weber. B. G. Teubner, Leipzig, 1892, S. 301–333.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.*

Bernhard Riemann

[Aus Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Zweite Auflage, bearbeitet von Heinrich Weber. B. G. Teubner, Leipzig, 1892, S. 301–333.]

1.

Eine Fläche lässt sich im Sinne der analytischen Geometrie darstellen, indem man die rechwinkligen Coordinaten x, y, z eines in ihr beweglichen Punktes als eindeutige Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Grössen p und q angiebt. Nehmen dann p und q bestimmte constante Werthe an, so entspricht dieser einen Combination immer nur ein einziger Punkt der Fläche. Die unabhängigen Variabeln p und q können in sehr mannigfacher Weise gewählt werden. Für eine einfach zusammenhängende Fläche geschieht dies zweckmässig wie folgt. Man lässt die Fläche längs der ganzen Begrenzung abnehmen um einen Flächenstreifen, dessen Breite überall unendlich klein in derselben Ordnung ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens die Fläche fortwährend verkleinert, bis sie in einen Punkt übergeht. Die hierbei der Reihe nach auftretenden Begrenzungscurven sind in sich zurücklaufende, von einander getrennte Linien. Man kann sie dadurch unterscheiden, dass man in jeder von ihnen der Grösse p einen besondern constanten Werth beilegt, der um ein Unendlichkleines zu- oder abnimmt, je nachdem man zu der benachbarten umschliessenden oder umschlossenen Curve übergeht. Die Function p hat dann einen constanten Maximalwerth in der Begrenzung der Fläche und

*Dieser Abhandlung liegt ein Manuscript *Riemann*'s zu Grunde, welches nach der eigenen Aeusserung des Verfassers in den Jahren 1860 und 1861 entstanden ist. Dieses Manuscript, welches in gedrängte Kürze nur die Formeln und keinen Text enthält, wurde mir von *Riemann* im April 1866 zur Bearbeitung anvertraut. Es ist daraus die Abhandlung hervorgegangen, welche ich am 6. Januar 1867 der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eingereicht habe, und welche im 13. Band der Abhandlungen dieser Gesellschaft abgedruckt ist. Diese Abhandlung kommt hier in sorgfältiger Ueberarbeitung zum zweiten Male zum Abdruck. K. Hattendorff.

einen Minimalwerth in dem einen Punkte im Innern, in welchen die allmählich abnehmende Fläche zuletzt zusammenschrumpft. Den Uebergang von einer Begrenzung der abnehmenden Fläche zur nächsten kann man dadurch hergestellt denken, dass man jeden Punkt der Curve (p) in einen bestimmten unendlich nahen Punkt der Curve $(p + dp)$ übergehen lässt. Die Wege der einzelnen Punkte bilden dann ein zweites System von Curven, die von dem Punkte des Minimalwerthes von p strahlenförmig nach der Begrenzung der Fläche verlaufen. In jeder dieser Curven legt man q einen besondern constanten Werth bei, der in einer beliebig gewählten Anfangscurve am kleinsten ist und von da beim Uebergange von einer Curve des zweiten Systems zur andern stetig wächst, wenn man zum Zweck des Ueberganges irgend eine Curve (p) in bestimmter Richtung durchläuft. Beim Uebergange von der letzten Curve (q) zur Anfangscurve ändert sich q sprungweise um eine endlich Constante.

Um eine mehrfach zusammenhängende Fläche ebenso zu behandeln, kann man sie zuvor durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerlegen.

Irgend ein Punkt der Fläche lässt sich hiernach als Durchschnitt einer bestimmten Curve des Systems (p) mit einer bestimmten Curve des Systems (q) auffassen. Die in dem Punkte (p, q) errichtete Normale verläuft von der Fläche aus in zwei entgegengesetzten Richtungen, der positiven und der negativen. Zu ihrer Unterscheidung hat man über die gegenseitige Lage der wachsenden positiven Normale, der wachsenden p und der wachsenden q eine Bestimmung zu treffen. Ist nicht anderes festgesetzt, so möge, von der positiven x-Axe aus gesehen, die positive y-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive z-Axe übergeführt werden durch eine Drehung von rechts nach links. Und die Richtung der wachsenden positiven Normale liege zu den Richtungen der wachsenden p und der wachsenden q, wie die positive x-Axe zur positive y-Axe und zur positiven z-Axe. Die Seite der Fläche, auf welcher die positive Normale liegt, soll die positive Seite der Fläche genannt werden.

2.

Ueber das Gebiet der Fläche sei ein Integral zu erstrecken, dessen Element gleich ist dem Element $dp\,dq$ multiplicirt in eine Functionaldeterminante, also

$$\iint \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} \right) dp\,dq,$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werden soll

$$\iint (df\,dg).$$

Denkt man sich f und g als unabhängige Variable eingeführt, so geht das Integral über in $\iint df\,dg$, und es lässt sich die Integration nach f oder nach g

ausführen. Die wirkliche Einsetzung von f und g als unabhängigen Variabeln verursacht aber Schwierigkeiten oder wenigstens weitläufige Unterscheidungen, wenn dieselbe Werthecombination von f und g in mehreren Punkten der Fläche oder in einer Linie vorhanden ist. Sie ist ganz unmöglich, wenn f und g complex sind.

Es ist daher zweckmässig, zur Ausführung der Integration nach f oder g das Verfahren von *Jacobi* (Crelle's Journal Bd. 27 p. 208) anzuwenden, bei welchem p und q als unabhängige Variable beibehalten werden. Um in Beziehung auf f zu integriren, hat man die Functiondeterminate in die Form zu bringen

$$\frac{\partial\left(f\dfrac{\partial g}{\partial q}\right)}{\partial p} - \frac{\partial\left(f\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q}$$

und erhält zunächst

$$\int \frac{\partial\left(f\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q}\, dq = 0,$$

weil die Integration durch eine in sich zurücklaufende Linie erstreckt wird. Dagegen ist

$$\int \frac{\partial\left(f\dfrac{\partial g}{\partial q}\right)}{\partial p}\, dp$$

in der Richtung der wachsenden p zu nehmen, d. h. von dem Minimalpunkte im Innern durch eine Curve (q) bis zur Begrenzung. Man erhält $f\dfrac{\partial g}{\partial q}$ und zwar den Werth, den dieser Ausdruck in der Begrenzung annimmt, da an der untern Grenze des Integrals $\dfrac{\partial g}{\partial q} = 0$ ist. Folglich wird

$$\iint (df\, dg) = \int f\frac{\partial g}{\partial q}\, dq = \int f\, dg$$

und das einfache Integral rechts ist in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung erstreckt. Andererseits hat man nach der eingeführten Bezeichnung $(df\, dg) = -(dg\, df)$, und daher

$$\iint (df\, dg) = -\iint (dg\, df) = -\int g\, df,$$

wobei das einfache Integral rechts ebenfalls in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen ist.

3.

Die Fläche, deren Punkte durch die Curvensysteme (p), (q) festgelegt sind, soll in der folgenden Weise auf einer Kugel vom Radius 1 abgebildet werden. Im Punkte (p, q) der Fläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, ziehe man die positive Normale und lege zu ihr eine Parallele durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Endpunkt dieser Parallelen auf der Kugeloberfläche ist die Abbildung des Punktes (x, y, z). Durchläuft der Punkt (x, y, z) auf der stetig gekrümmten Fläche eine zusammenhängende Linie, so wird auch die Abbildung derselben auf der Kugel eine zusammenhängende Linie sein. Auf dieselbe Weise erhält man als Abbildung eines Flächenstücks ein Flächenstück, als Abbildung der ganzen Fläche eine Fläche, welche die Kugel oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach bedeckt.

Der Punkt auf der Kugel, welcher die Richtung der positiven x-Axe angiebt, werde zum Pol gewählt und der Anfangsmeridian durch den Punkt gelegt, welcher der positiven y-Axe entspricht. Die Abbildung des Punktes (x, y, z) wird dann auf der Kugel festgelegt durch ihre Poldistanz r und den Winkel φ, welchen ihr Meridian mit dem Anfangsmeridian einschliesst. Für das Vorzeichen von φ gilt die Bestimmung, dass der der positiven z-Axe entsprechende Punkt die Coordinaten $r = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ haben soll.

4.

Hiernach erhält man als Differential-Gleichung der Fläche

$$\cos r\, dx + \sin r\, \cos\varphi\, dy + \sin r\, \sin\varphi\, dz = 0. \tag{1}$$

Sind y und z die unabhängigen Variabeln, so ergeben sich für r und φ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos r &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},\\
\sin r\, \cos\varphi &= \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},\\
\sin r\, \sin\varphi &= \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},
\end{aligned}$$

in welchen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten.

Ein Parallelogramm auf der positiven Seite der Fläche, begrenzt von den Curven (p) und $(p+dp)$, (q) und $(q+dq)$, projicirt sich auf der yz-Ebene in einem Flächenelemente, dessen Inhalt gleich dem absoluten Werthe von $(dy\,dz)$ ist. Das Vorzeichen dieser Functionaldeterminante ist verschieden, je nachdem die im Punkte (p,q) errichtete positive Normale mit der positiven x-Axe einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliesst. In dem ersten Falle liegen nämlich die Projectionen von dp und dq in der yz-Ebene ebenso zu einander wie die positive y-Axe zur positiven z-Axe, im zweiten Falle umgekehrt. Daher ist die Functionaldeterminante im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Und der Ausdruck

$$\frac{1}{\cos r}(dy\,dz)$$

ist immer positiv. Er giebt den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms auf der Fläche. Um also den Inhalt der Fläche selbst zu erhalten, hat man das Doppelintegral

$$S=\iint\frac{1}{\cos r}(dy\,dz)$$

über die ganze Fläche zu erstrecken.

Soll dieser Inhalt ein Minimum sein, so ist die erste Variation des Doppelintegrals $=0$ zu setzen. Man erhält

$$\iint\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial\delta x}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial\delta x}{\partial z}}{\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}(dy\,dz)=0,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen vor der Wurzel, je nachdem (dy,dz) positiv oder negativ ist. Die linke Seite lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}&\iint\frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\,\cos\varphi\,\delta x)(dy\,dz)\\ +&\iint\frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\,\sin\varphi\,\delta x)(dy\,dz)\\ -&\iint\delta x\,\frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\,\cos\varphi)(dy\,dz)\\ -&\iint\delta x\,\frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\,\sin\varphi)(dy\,dz).\end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale reduciren sich auf einfache Integrale, die in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen sind, nämlich

$$\int \delta x\,(-\sin r\,\cos\varphi\,dz + \sin r\,\sin\varphi\,dy).$$

Der Werth ist $= 0$, da in der Begrenzung $\delta x = 0$ ist. Die Bedingung des Minimum lautet also

$$\iint \delta x \left(\frac{\delta(\sin r\,\cos\varphi)}{\delta y} + \frac{\delta(\sin r\,\sin\varphi)}{\delta z}\right)(dy\,dz) = 0.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$-\sin r\,\sin\varphi\,dy + \sin r\,\cos\varphi\,dz = d\mathfrak{x} \tag{2}$$

ein vollständiges Differential ist.

5.

Die Coordinaten r und φ auf der Kugel lassen sich ersetzen durch eine complexe Grösse $\eta = \mathrm{tg}\frac{r}{2}e^{\varphi i}$, deren geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist. Legt man nämlich an die Kugel im Pol eine Tangentialebene, deren positive Seite von der Kugel abgekehrt ist, und zieht vom Gegenpol eine Gerade durch den Punkt (r, φ), so trifft diese die Tangentialebene in einem Punkte, der die complexe Grösse 2η repräsentirt. Dem Pol entspricht $\eta = 0$, dem Gegenpol $\eta = \infty$. Für die Punkte, welche die Richtungen der positiven y- und der positiven z-Axe angeben, ist $\eta = +1$ und resp. $= +i$.

Führt man noch die complexen Grössen

$$\eta' = \mathrm{tg}\frac{r}{2}e^{-\varphi i}, \quad s = y + zi, \quad s' = y - zi$$

ein, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in folgende:

$$(1 - \eta\eta')\,dx + \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0, \tag{1*}$$

$$(1 + \eta\eta')\,d\mathfrak{x}\,i - \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0. \tag{2*}$$

Diese lassen sich durch Addition und Subtraction verbinden. Dabei werde

$$x + \mathfrak{x}i = 2X, \quad x - \mathfrak{x}i = 2X'$$

gesetzt, so dass umgekehrt $x = X + X'$ ist. Das Problem findet dann seinen analytischen Ausdruck in den beiden Gleichungen

$$ds - \eta\,dX + \frac{1}{\eta'}\,dX' = 0, \tag{3}$$

$$ds' + \frac{1}{\eta}\,dX - \eta'\,dX' = 0. \tag{4}$$

Betrachtet man X und X' als unabhängige Variable und stellt die Bedingungen dafür auf, das ds und ds' vollständige Differentiale sind, so findet sich

$$\frac{\partial \eta}{\partial X'} = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial X} = 0,$$

d. h. es ist η nur von X, η' nur von X' abhängig, und deshalb umgekehrt X eine Function nur von η, X' eine Function nur von η'.

Hiernach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, η als Function der complexen Variabeln X oder umgekehrt X als Function der complexen Variabeln η so zu bestimmen, dass zugleich den Grenzbedingungen Genüge geleistet werde. Kennt man η als Function von X, so ergiebt sich daraus η', indem man in dem Ausdrucke von η jede complexe Zahl in die conjugirte verwandelt. Alsdann hat man nur noch die Gleichungen (3) und (4) zu integriren, um die Ausdrücke für s und s' zu erlangen. Aus diesen erhält man endlich durch Elimination von $\mathfrak{x}$ eine Gleichung zwischen x, y, z, die Gleichung der Minimalfläche.

6.

Sind die Gleichungen (3) und (4) integrirt, so lässt sich auch der Inhalt der Minimalfläche selbst leicht angeben, nämlich

$$S = \iint \frac{1}{\cos r}(dy\,dz) = \iint \frac{1+\eta\eta'}{1-\eta\eta'}(dy\,dz).$$

Die Functionaldeterminate $(dy\,dz)$ formt sich in folgender Weise um

$$\begin{aligned}
(dy\,dz) &= \left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s'} - \frac{\partial y}{\partial s'}\frac{\partial z}{\partial s}\right)(ds\,ds') \\
&= \frac{i}{2}(ds\,ds') \\
&= \frac{i}{2}\left(\eta\eta' - \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'}(d\eta\,d\eta').
\end{aligned}$$

Danach erhält man

$$\begin{aligned}
2iS &= \iint \left(2 + \eta\eta' + \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'}(d\eta\,d\eta') \\
&= \iint \left(2\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial s'}{\partial \eta'} + \frac{\partial s}{\partial \eta'}\frac{\partial s'}{\partial \eta}\right)(d\eta\,d\eta') \\
&= 2\iint \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta'} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta'}\right)(d\eta\,d\eta').
\end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdruckes kann man y aus Y und Y', z aus Z und Z' ebenso zusammensetzen wie x aus X und X', so dass die Gleichungen gelten

$$X = \int \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta, \quad X' = \int \frac{\partial x}{\partial \eta'}\, d\eta',$$

$$Y = \int \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta, \quad Y' = \int \frac{\partial y}{\partial \eta'}\, d\eta',$$

$$Z = \int \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta, \quad Z' = \int \frac{\partial z}{\partial \eta'}\, d\eta'.$$

$$\begin{array}{ll} x = X + X' & \mathfrak{x}i = X - X', \\ y = Y + Y' & \mathfrak{y}i = Y - Y', \\ z = Z + Z' & \mathfrak{z}i = Z - Z'. \end{array}$$

Alsdann erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} S &= -i \iint [(dX\,dX') + (dY\,dY') + (dZ\,dZ')] \\ &= \tfrac{1}{2} \iint [(dx\,d\mathfrak{x}) + (dy\,d\mathfrak{y}) + (dz\,d\mathfrak{z})]. \end{aligned} \tag{5}$$

7.

Die Minimalfläche und ihre Abbildungen auf der Kugel wie in den Ebenen, deren Punkte resp. die complexen Grössen η, X, Y, Z repräsentiren, sind einander in den kleinsten Theilen ähnlich. Man erkennt dies sofort, wenn man das Quadrat des Linearelementes in diesen Flächen ausdrückt. Dasselbe ist

auf der Kugel	$\sin r^2\, d\log\eta\, d\log\eta'$,
in der Ebene der η	$d\eta\, d\eta'$,
in der Ebene der X	$\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} d\eta\, d\eta'$,
in der Ebene der Y	$\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta'} d\eta\, d\eta'$,
in der Ebene der Z	$\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta'} d\eta\, d\eta'$,

in der Minimalfläche selbst

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (dX + dX')^2 + (dY + dY')^2 + (dZ + dZ')^2 \\ &= 2(dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ') \\ &= 2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta'} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta'}\right) d\eta\, d\eta'. \end{aligned}$$

Es ist nämlich nach den Gleichungen (3) und (4), wenn man darin η und η' als unabhängige Variable ansieht:

$$\eta \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial s}{\partial \eta} = -\eta^2 \frac{\partial s'}{\partial \eta},$$

$$\eta' \frac{\partial X'}{\partial \eta'} = \frac{\partial s'}{\partial \eta'} = -\eta'^2 \frac{\partial s}{\partial \eta'}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 &= 0, \\ dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Das Verhältniss von irgend zwei der obigen Quadrate von Linearelementen ist unabhängig von $d\eta$ und $d\eta'$, d. h. von der Richtung des Elementes, und darin beruht die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbilding. Da die Linearvergrösserung bei der Abbildung in irgend einem Punkte nach allen Richtungen dieselbe ist, so erhält man die Flächenvergrösserung gleich dem Quadrat der Linearvergrösserung. Das Quadrat des Linearelementes in der Minimalfläche ist aber gleich der doppelten Summe der Quadrate der entsprechenden Linearelemente in den Ebenen der X, der Y und der Z. Daher ist auch das Flächenelement in der Minimalfläche gleich der doppelten Summe der entsprechenden Flächenelemente in jenen Ebenen. Dasselbe gilt von der ganzen Fläche und ihren Abbildungen in den Ebenen der X, Y, Z.

8.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch aus dem Satze von der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen ziehen, wenn man eine neue complexe Variable η_1 dadurch einführt, dass man auf der Kugel den Pol in einen beliebigen Punkte ($\eta = \alpha$) verlegt und den Anfangsmeridian beliebig wählt. Hat dann η_1 für das neue Coordinatensystem dieselbe Bedeutung wie η für das alte, so kann man jetzt ein unendlich kleines Dreieck auf der Kugel sowohl in der Ebene der η als in der der η_1 abbilden. Die beiden Bilder sind dann auch Abbildung von einander und in den kleinsten Theilen ähnlich. Für den Fall der directen Aehnlichkeit ergiebt sich ohne Weiteres, dass $\frac{d\eta_1}{d\eta}$ unabhängig ist von der Richtung der Verschiebung von η, d. h. dass η_1 eine Function der complexen Variabeln η ist. Den Fall der inversen (symmetrischen) Aehnlichkeit kann man auf den vorigen zurückführen, indem man statt η_1 die conjugirte complexe Grösse nimmt. Um nun η_1 als Function von η auszudrücken, hat man zu beachten, dass $\eta_1 = 0$ ist dem einen Punkte der Kugel, für welchen

$\eta = \alpha$, und $\eta_1 = \infty$ in dem diametral gegenüberliegenden Punkte, d. h. für $\eta = -\dfrac{1}{\alpha'}$. Danach ergiebt sich $\eta_1 = c\dfrac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta}$. Zur Bestimmung der Constanten c dient die Bemerkung, dass, wenn $\eta_1 = \beta$ ist für $\eta = 0$, daraus $\eta_1 = -\dfrac{1}{\beta'}$ gefunden wird für $\eta = \infty$. Es ist also $\beta = -c\alpha$ und $-\dfrac{1}{\beta'} = \dfrac{c}{\alpha'}$, d. h. $\beta = -\dfrac{\alpha}{c'}$. Hieraus ergiebt sich $cc' = 1$ und daher $c = e^{\theta i}$ für ein reelles θ. Die Grössen α und θ können beliebige Werthe erhalten: α hängt von der Lage des neuen Pols, θ von der Lage des neuen Anfangsmeridians ab. Diesem neuen Coordinatensystem auf der Kugel entsprechen die Richtungen den Axen eines neuen rechtwinkligen Systems. Es mögen in dem neuen System x_1, s_1, s'_1 dasselbe bezeichnen wie x, s, s' in dem alten. Dann erlangt man die Transformationsformeln

$$\eta_1 = \frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta} e^{\theta i},$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} (1 + \alpha\alpha')x_1 &= (1 - \alpha\alpha')x + \alpha' s + \alpha s', \\ (1 + \alpha\alpha')s_1 e^{-\theta i} &= -2\alpha x + s - \alpha^2 s', \\ (1 + \alpha\alpha')s'_1 e^{\theta i} &= -2\alpha' x - \alpha'^2 s + s'. \end{aligned}$$

9.

Aus den Transformationsformeln (6) berechnen wir

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta}\frac{\partial x}{\partial \eta}$$

oder

$$(d\log\eta_1)^2 \frac{dx_1}{\partial \log\eta_1} = (d\log\eta)^2 \frac{\partial x}{\partial \log\eta}.$$

Hiernach empfiehlt es sich, eine neue complexe Grösse u einzuführen, welche durch die Gleichung definirt wird

$$(7) \qquad u = \int \sqrt{i\frac{\partial x}{\partial \log\eta}}\, d\log\eta,$$

und die von der Lage des Coordinatensystems (x, y, z) unabhängig ist. Gelingt es dann, u als Function von η zu bestimmen, so erhält man

$$(8) \qquad x = -i\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta + i\int \left(\frac{du'}{d\log\eta'}\right)^2 d\log\eta'.$$

x ist der Abstand des zu η gehörigen Punktes der Minimalfläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten rechtwinklig zur Richtung $\eta = 0$ gelegt ist. Man erhält den Abstand desselben Punktes der Minimalfläche von einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene, die rechtwinklig auf der Richtung $\eta = \alpha$ steht, indem man in (8) $\dfrac{\eta - \alpha}{1 + \alpha' \eta} e^{\theta i}$ statt η setzt. Speciell also für $\alpha = 1$ und $\alpha = i$

$$(9) \qquad y = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta} \right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) d \log \eta + \frac{i}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'} \right)^2 \left(\eta' - \frac{1}{\eta'} \right) d \log \eta'.$$

$$(10) \qquad z = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta} \right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) d \log \eta - \frac{1}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'} \right)^2 \left(\eta' + \frac{1}{\eta'} \right) d \log \eta'.$$

10.

Die Grösse u ist als Function von η zu bestimmen, d. h. als einwerthige Function des Ortes in derjenigen Fläche, welche, über die η-Ebene ausgebreitet, die Minimalfläche in den kleinsten Theilen ähnlich abbildet. Daher kommt es vor allen Dingen auf die Unstetigkeiten und Verzweigungen in dieser Abbildung an. Bei der Untersuchung derselben hat man Punkte im Innern der Fläche von Begrenzungspunkten zu unterscheiden.

Handelt es sich um einen Punkt im Innern der Minimalfläche, so lege man in ihn der Anfangspunkt des Coordinatensystems (x, y, z), die Axe der positiven x in die positive Normale, folglich die yz-Ebene tangential. Dann fehlen in der Entwicklung von x das freie Glied und die in y und z multiplicirten Glieder. Durch geeignet gewählte Richtung der y-Axe und der z-Axe kann man auch das in yz multiplicirte Glied verschwinden lassen. Die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche reducirt sich unter dieser Voraussetzung für endlich kleine Werthe von y und z auf

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0.$$

Das Krümmungsmass ist also negativ, die Haupt-Krümmungsradien sind einander entgegengesetzt gleich. Die Tangentialebene theilt die Fläche in vier Quadranten, wenn die Krümmungshalbmesser nicht ∞ sind. Diese Quadranten liegen abwechselnd über und unter der Tangentialebene. Beginnt die Entwicklung von x erst mit den Gliedern n ter Ordnung ($n > 2$), so sind die Krümmungsradien ∞, und die Tangentialebene theilt die Fläche in $2n$ Sectoren, die abwechselnd über und unter jene Ebene liegen und von den Krümmungslinien halbirt werden.

Will man nun X als Function der complexen Variabeln Y ansehen, so ergiebt sich in dem Falle der vier Sectoren

$$\log X = 2 \log Y + \text{funct. cont.},$$

in dem Falle der $2n$ Sectoren

$$\log X = n \log Y + \text{f. c.}$$

Und da nach (8) und (9)

$$\frac{dX}{dY} = \frac{-2\eta}{1 - \eta\eta}$$

ist, so beginnt die Entwicklung von η im ersten Falle mit der ersten, im zweiten mit der $(n-1)$ ten Potenz von Y. Umgekehrt wird also, wenn Y als Function von η angesehen werden soll, die Entwicklung im ersten Falle nach ganzen Potenzen von η, im zweiten nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{n-1}}$ fortschreiten. D. h. die Abbildung auf der η-Ebene hat an der betreffenden Stelle keinen oder einen $(n-2)$ fachen Verzweigungspunkt, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt.

Was u betrifft, so ergiebt sich

$$\frac{du}{d \log Y} = \frac{du}{d \log \eta} \frac{d \log \eta}{d \log Y},$$

also mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\left(\frac{du}{d \log Y}\right)^2 = -2i \frac{dY}{d\eta} \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \frac{Y^2}{\eta^2}.$$

Demnach ist in einem $(n-2)$ fachen Verzweigungspunkte der Abbildung auf der η-Ebene

$$\log \frac{du}{d \log Y} = \frac{n}{2} \log Y + \text{f. c.}$$

oder

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log Y + \text{f. c.}$$

11.

Die weitere Untersuchung soll zunächst auf den Fall beschränkt werden, dass die gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht. Dann lässt sich die Abbildung der Begrenzung auf der η-Ebene wirklich herstellen. Die in irgend welchen Punkten einer geraden Begrenzungslinie errichteten Normalen liegen in parallelen Ebenen, und daher ist die Abbildung auf der Kugel ein Bogen eines grössten Kreises.

Um einen Punkt im Innern einer geraden Begrenzungslinie zu untersuchen, legt man wie vorher in ihn den Anfangspunkt der Coordinaten, die positive x-Axe in die positive Normale. Dann fällt die ganze Begrenzungslinie in die yz-Ebene. Der reelle Theil von X ist demnach in der ganzen Begrenzungslinie $= 0$. Geht man also durch das Innere der Minimalfläche um den Anfangspunkt der Coordinaten herum von einem vorangehenden bis zu einem nachfolgenden Begrenzungspunkte, so muss dabei der Arcus von X sich ändern um $n\pi$, ein ganzes Vielfaches von π. Der Arcus von Y ändert sich gleichzeitig um π. Man hat also, wie vorher

$$\begin{aligned}
\log X &= n \log Y + \text{f. c.}, \\
\log \eta &= (n-1) \log Y + \text{f. c.}, \\
\log \frac{du}{dY} &= \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log Y + \text{f. c.}
\end{aligned}$$

Dem betrachteten Begrenzungspunkte entspricht ein $(n-2)$ facher Verzweigungspunkt in der Abbildung auf der η-Ebene. In dieser Abbildung macht das auf den Punkt folgende Begrenzungsstück mit dem ihm vorhergehenden den Winkel $(n-1)\pi$.

12.

Bei dem Uebergange von einer Begrenzungslinie zur folgenden hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder treffen sie zusammen in einem in Endlichen liegenden Schnittpunkte, oder sie erstrecken sich ins Unendliche.

Im ersten Falle sei $\alpha\pi$ der im Innern der Minimalfläche liegende Winkel der beiden Begrenzungslinien. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den zu untersuchenden Eckpunkt, die positive x-Axe in die positive Normale, so ist in beiden Begrenzungslinien der reelle Theil von $X = 0$. Beim Uebergange von der ersten Begrenzungslinie zur folgenden ändert sich also der Arcus von X um $m\pi$, ein ganzes Vielfaches von π, der Arcus von Y um $\alpha\pi$. Man hat daher

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{m} \log X &= \log Y + \text{f. c.}, \\
\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) \log X &= \log \eta + \text{f. c.}, \\
\log \frac{du}{dY} &= \left(\frac{m}{2\alpha} - 1\right) \log Y + \text{f. c.}
\end{aligned}$$

Erstreckt sich die Fläche zwischen zwei auf einander folgenden Begrenzungsgeraden ins Unendliche, so lege man die positive x-Axe in ihre kürzeste Verbindungslinie, parallel der positiven Normalen im Unendlichen. Die Länge der kürzesten Verbindungslinie sei A, und $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Minimalfläche in der yz-Ebene ausfüllt. Dann bleiben die reellen Theile von X und $i \log \eta$ im Unendlichen endlich und stetig und nehmen in den begrenzenden Geraden constante Werthe an. Hieraus ergiebt sich (für $y = \infty$, $z = \infty$)

$$\begin{aligned} X &= -\frac{Ai}{2\alpha\pi} \log \eta + \text{f. c.}, \\ u &= \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}} \log \eta + \text{f. c.}, \\ Y &= -\frac{Ai}{4\alpha\pi} \frac{1}{\eta} + \text{f. c.} \end{aligned}$$

Legt man die x_1-Axe eines Coordinatensystems in eine begrenzende Gerade, die x_2-Axe eines andern Systems in die zweite begrenzende Gerade u. s. f., so ist in der ersten Linie $\log \eta_1$, in der zweiten $\log \eta_2$ u. s. f. rein imaginär, da die Normale zu der betreffenden Axe der x_1, der x_2 u. s. f. senkrecht steht. Es ist also $i \frac{\partial x_1}{\partial \log \eta_1}$ in der ersten Begrenzungslinie reell, $i \frac{\partial x_2}{\partial \log \eta_2}$ in der zweiten u. s. f. Da aber auch für ein beliebiges Coordinatensystem (x, y, z) immer

$$\sqrt{i \frac{\partial x}{\partial \log \eta}} d \log \eta = \sqrt{i \frac{\partial x_1}{\partial \log \eta_1}} d \log \eta_1 = \sqrt{i \frac{\partial x_2}{\partial \log \eta_2}} d \log \eta_2 \ldots$$

ist, so findet sich, dass in jeder geraden Begrenzungslinie

$$du = \sqrt{i \frac{\partial x}{\partial \log \eta}} d \log \eta$$

entweder reelle oder rein imaginäre Werthe besitzt.

13.

Die Minimalfläche ist bestimmt, sobald man eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen ausgedrückt hat. Dies gelingt in vielen Fällen. Besondere Beachtung verdienen darunter diejenigen, in welchen $\frac{du}{d \log \eta}$ eine algebraische Function von η ist. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass die Abbildung auf der Kugel und ihre symmetrischen und congruenten Fortsetzungen eine geschlossene Fläche bilden, welche die ganze Kugel einfach oder mehrfach bedeckt.

Im Allgemeinen aber wird es schwierig sein, direct eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man aber auch jede von ihnen als Function einer neuen zweckmässig gewählten unabhängigen Variabeln bestimmen. Wir führen eine solche unabhängige Variable t ein, dass die Abbilding der Fläche auf der t-Ebene die halbe unendliche Ebene einfach bedeckt, und zwar diejenige Hälfte, für welche der imaginäre Theil von t positiv ist. In der That ist es immer möglich, t als Function von u (oder von irgend einer der übrigen Grössen η, X, Y, Z) in der Fläche so zu bestimmen, dass der imaginäre Theil in der Begrenzung $= 0$ ist, und dass sie in einem beliebigen Begrenzungspunkte ($u = b$) unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h.

$$t = \frac{\text{const.}}{u - b} + \text{f. c.} \quad (u = b).$$

Der Arcus des Factors von $\dfrac{1}{u-b}$ ist durch die Bedingung bestimmt, dass der imaginäre Theil von t in der Begrenzung $= 0$, im Innern der Fläche positiv sein soll. Es bleibt also in dem Ausdrucke von t nur der Modul dieses Factors und eine additive Constante willkürlich.

Es sei $t = a_1, a_2, \ldots$, für die Verzweigungspunkte im Innern der Abbildung auf der η-Ebene, $t = b_1, b_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte in der Begrenzung, die nicht Eckpunkte sind, $t = c_1, c_2, \ldots$ für die Eckpunkte, $t = e_1, e_2, \ldots$ für die ins Unendliche sich erstreckenden Sectoren. Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die sämmtlichen Grössen a, b, c, e im endlichen Gebiete der t-Ebene liegen.

Dan hat man

$$\begin{array}{lll}
\text{für} \quad t = a & \log \dfrac{du}{dt} = \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) \log(t - a) + \text{f. c.}, \\[2ex]
\quad\text{„} \quad t = b & \log \dfrac{du}{dt} = \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) \log(t - b) + \text{f. c.}, \\[2ex]
\quad\text{„} \quad t = c & \log \dfrac{du}{dt} = \left(\dfrac{m}{2} - 1\right) \log(t - c) + \text{f. c.}, \\[2ex]
\quad\text{„} \quad t = e & u = \sqrt{\dfrac{A\alpha}{2\pi}} \log(t - e) + \text{f. c.}
\end{array}$$

Man kann die Untersuchung auf den Fall $n = 3$, $m = 1$ beschränken, d. h. auf einfache Verzweigungspunkte, und den allgemeinen Fall aus diesem dadurch ableiten, dass man mehrere einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt.

Um den Ausdruck für $\dfrac{du}{dt}$ zu bilden, hat man zu beachten, dass längs der Begrenzung dt reell, du entweder reell oder rein imaginär ist. Demnach ist

$\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2$ reell, wenn t reell ist. Diese Function kann man über die Linie der reellen Werthe von t hinüber stetig fortsetzen, indem man die Bestimmung trifft, dass für conjugirte Werthe t und t' der Variabeln auch die Function conjugirte Werthe haben soll. Alsdann ist $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2$ für die ganze t-Ebene bestimmt und zeigt sich einwerthig.

Es seien $a'_1, a'_2, \ldots$ die conjugierten Werthe zu $a_1, a_2, \ldots$, und das Product $(t-a_1)(t-a_2)\ldots$ werde mit $\prod(t-a)$ bezeichnet. Alsdann ist

$$u = \text{const.} + \int \sqrt{\frac{\prod(t-a)\prod(t-a')\prod(t-b)}{\prod(t-c)}}\frac{\text{const.}\,dt}{\prod(t-e)}. \tag{11}$$

Die Constanten a, b, c etc. müssen so bestimmt werden, dass für

$$t = e, \quad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\log(t-e) + \text{f. c.}$$

wird. Damit u für alle Werthe von t ausser a, b, c, e endlich und stetig bleibe, muss für die Anzahl dieser letztgenannten Werthe eine Relation bestehen. Es muss die Differenz der Anzahl der Eckpunkte und der in der Begrenzung liegenden Verzweigungspunkte um 4 grösser sein als die doppelte Differenz der Anzahl der innern Verzweigungspunkte und der ins Unendliche verlaufenden Sectoren. Setzt man zur Abkürzung

$$\prod(t-a)\prod(t-a')\prod(t-b) = \varphi(t),$$

$$\prod(t-c)\prod(t-e)^2 = \chi(t),$$

d. h.

$$\frac{du}{dt} = \text{const.}\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}},$$

so ist die ganze Function $\varphi(t)$ vom Grade $\nu - 4$, wenn $\chi(t)$ vom Grade ν ist. Hier bedeutet ν die Anzahl der Eckpunkte vermehrt um die doppelte Anzahl der ins Unendliche verlaufenden Sectoren.

14.

Es ist noch η als Function von t auszudrücken. Direct gelangt man dazu nur in den einfachsten Fällen. Im Allgemeinen ist der folgende Weg einzuschlagen. Es sei v eine noch näher zu bestimmende Function von t, die als bekannt vorausgesetzt wird. In den Gleichungen (8), (9), (10) kommt es wesentlich an auf $\frac{du}{d\log\eta}$, wofür man auch schreiben kann $\frac{du}{dv}\frac{dv}{d\log\eta}$. Der letzte Factor lässt sich ansehen als Product der beiden Factoren

$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}, \quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}, \tag{12}$$

die der Differentialgleichung erster Ordung genügen

$$k_1\frac{dk_2}{dv} - k_2\frac{dk_1}{dv} = 1, \tag{13}$$

sowie der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2} = \frac{1}{k_2}\frac{d^2k_2}{dv^2}. \tag{14}$$

Gelingt es also, die eine oder die andere Seite dieser letzten Gleichung als Function von t auszudrücken, so lässt sich eine homogene lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung herstellen, von welcher k_1 und k_2 particuläre Integrale sind. Es sei k das vollständige Integral. Wir ersetzen $\frac{d^2k}{dv^2}$ durch das ihm gleichbedeutende

$$\frac{\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{dk}{dt}\frac{d^2v}{dt^2}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^3}$$

und erhalten für k die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{d^2v}{dt^2}\frac{dk}{dt} - \left(\frac{dv}{dt}\right)^3\left\{\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2}\right\}k = 0. \tag{15}$$

Von der Gleichung (15) seien zwei von einander unabhängige particuläre Integrale K_1 und K_2 gefunden, deren Quotient $K_2 : K_1 = H$ ein von Bögen grösster Kreise begrenztes Abbild der positiven t-Halbebene auf der Kugelfläche leifert. Dasselbe leistet dann jeder Ausdruck von der Form

$$\eta = e^{\theta i}\frac{H-\alpha}{1+\alpha' H}, \tag{16}$$

worin θ reell und α, α' conjugirte complexe Grössen sind.

Die Function v ist so zu wählen, dass für endliche Werthe von t die Unstetigkeiten von $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ nicht ausserhalb der Punkte a, a', b, c, e liegen.

Setzt man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}, \tag{17}$$

so wird die Function $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen unstetig nur für die Punkte a, a', b, c, und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man erhält nämlich für $t = c$

$$v - v_c = \frac{2\sqrt{t-c}}{\sqrt{f'(c)}},$$

$$\eta - \eta_c = \text{const.}\,(t-c)^\gamma.$$

Folglich:

$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}} = \text{const.}\,(v - v_c)^{\frac{1}{2}-\gamma}.$$

und hieraus:

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4}\frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})f'(c)}{t-c}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für $t = a$, a', b, in denen c resp. durch a, a', b, und γ durch 2 zu ersetzen ist.

Eine ähnliche Betrachtung lehrt, dass für $t = e$ die Function $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ stetig bleibt.

Für $t = \infty$ ergiebt sich

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right)\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)t^{2\nu-6}.$$

Demnach lautet der Ausdruck für $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ wie folgt:

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4}\sum\frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})f'(g)}{(t-g)} + F(t).$$

Die Summe bezieht sich auf alle Punkte $g = a$, a', b, c, und bei a, a', b ist 2 statt γ zu setzen. $F(t)$ ist eine ganze Function vom Grade $(2\nu - 6)$, in der die ersten beiden Coefficienten sich folgendermassen bestimmen. Man bringe dv in die Form

$$dv = \frac{t^{-\nu+4}\dfrac{dt}{tt}}{\sqrt{f(t)t^{-2\nu+4}}} = t^{-\nu+4}dv_1$$

oder kürzer $= \alpha\, dv_1$.

Dann ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

folglich

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-2}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] &= t^{-2\nu+8}\sum \tfrac{1}{4}\frac{(\gamma\gamma-\frac{1}{4})f'(g)}{t-g}\\ &\quad + t^{-2\nu+8}F(t) - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}.\end{aligned}$$

Die Function auf der linken Seite ist endlich für $t=\infty$. Folglich hat man rechts in der Entwicklung von $t^{-2\nu+8}F(t)$ und von $\alpha^{\frac{3}{2}}\dfrac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ die Coefficienten von t^2 und resp. von t einander gleich zu setzen. Die Entwickelung von $\alpha^{\frac{3}{2}}\dfrac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ giebt nach einfacher Rechnung

$$\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{2}+2\right)t^{-\nu+5}\frac{d(t^{-\nu+2}f(t))}{dt}.$$

Hiernach bleiben in $F(t)$ noch $2\nu-7$ unbestimmte Coefficienten. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass dieselben reell sein müssen. Denn wir haben in §. 12 gefunden, dass du reell oder rein imaginär ist in allen geraden Begrenzungslinien der Minimalfläche und folglich auch an jeder Stelle in der Begrenzung der Abbildungen. Vermöge der Gleichung (17) gilt dasselbe von dv. Daraus lässt sich beweisen, dass für reelle Werthe von t die Function $\dfrac{1}{k}\dfrac{d^2k}{dv^2}$ nothwendigerweise reelle Werthe besitzt.

Um diesen Beweis zu führen, betrachten wir die Abbildung auf der Kugel vom Radius 1 und nehmen irgend einen Theil der Begrenzung, also den Bogen eines gewissen grössten Kreises. Im Pole dieses grössten Kreises legen wir die Tangential-Ebene an und bezeichnen sie als die Ebene der η_1. Dann lassen sich die constanten Grössen α_1, α_1', θ_1 so bestimmen, dass

$$\eta_1 = e^{\theta_1 i}\frac{H - \alpha_1}{1 + \alpha_1' H}$$

ist, und wir erhalten zwei Functionen

$$k_1' = \sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}} \quad \text{und} \quad k_2' = \eta_1 \sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}},$$

die particuläre Integrale der Differentialgleichung (15) sind. Folglich haben wir

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}.$$

Der eben betrachtete Theil der Begrenzung bildet sich in der η_1-Ebene ab durch die Gleichung

$$\eta_1 = e^{\varphi_1 i},$$

und wenn man diese in k_1' einführt, so erkennt man leicht, dass in dem fraglichen Begrenzungstheile $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ reell ausfällt. Folglich gilt dasselbe von $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$, und diese Betrachtung für jedes einzelne Begrenzungsstück angestellt werden kann, so ist $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ reell in der ganzen Begrenzung.

Nun fällt aber bei einem reellen oder rein imaginären dv die Function $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ auch dann reell aus, wenn man allgemeiner

$$\eta_1 = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}$$

setzt und den Modul ϱ_1 constant nimmt. Damit also die Axe der reellen t sich auf der Kugel vom Radius 1 wirklich in Bögen *grösster* Kreise abbilde, muss für jeden Begrenzungstheil $\varrho_1 = 1$ sein. Dies liefert ebenso viele Bedingungsgleichungen, als einzelne Begrenzungslinien gegeben sind.

Bei der Untersuchung ist, wie schon in vorigen Paragraphen, vorausgesetzt, dass die Werthe a, b, c, e sämmtlich endlich seien. Trifft dies nicht zu, so bedarf die Betrachtung einer geringen Modification.

Anmerkung. Die Aufgabe ist hiermit vollständig formulirt. Im einzelnen Falle kommt es nur darauf an, die Differentialgleichung (15) wirklich aufzustellen und zu integriren. Uebrigens ist es nicht unwichtig, zu bemerken, dass die Anzahl der in der Lösung auftretenden willkürlichen reellen Constanten ebenso gross ist wie die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche vermöge der Natur der Aufgabe und vermöge der Daten des Problems erfüllt sein müssen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punkte a, b, c, e resp. mit A, B, C, E und beachten, dass $2A + B + 4 = C + 2E = \nu$ ist. In der Differentialgleichung (15) treten $2A + B + 4C + 5E - 10$ willkürliche reelle Constanten auf, nämlich: die Winkel γ, deren Anzahl C ist; die $2\nu - 7$ Constanten der Function $F(t)$; die reellen Grössen b, c, e, von denen man dreien beliebige Werthe geben kann, indem man für t eine lineare Substitution mit reellen Coefficienten macht; die reellen und imaginären Theile der Grössen a. Zu diesen willkürlichen Constanten kommen bei der Integration noch 10 hinzu, nämlich, wenn

$$\eta = \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\gamma k_1 + \delta k_2}$$

ist, die drei complexen Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, die für 6 reelle Constanten zu zählen sind, ein (reeller oder rein imaginärer) Factor von du, und je eine additive reelle Constante in den Ausdrücken für x, y, z. Diese Constanten müssen aber noch Bedingungsgleichungen unterworfen werden, die erfüllt sein müssen, wenn unsere Formeln wirklich eine Minimalfläche darstellen sollen. Von diesen Bedingungsgleichungen sind $2A + B$ den Punkten a, a', b entsprechend, die aussagen, dass in den in der Umgebung dieser Punkte gültigen Entwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung (15) keine Logarithmen auftreten (vergl. Anmerkung (4)), und $C+E$, die besagen, dass die zwischen den einzelnen Punkten c, e gelegenen Stücke der Axe der reellen t sich auf der Kugel mit dem Radius 1 in $C + E$ Bögen grösster Kreise abbilden. Sonach ist die Anzahl der in der Lösung übrig bleibenden unbestimmten Constanten $3C + 4E$.

Die Daten des Problems bestehen in den Coordinaten der Eckpunkte, und in den Winkeln, die die Richtungen der ins Unendliche verlaufenden Begrenzungslinien festlegen. Diese Daten sprechen sich in $3C + 4E$ Gleichungen, aus, zu deren Erfüllung man ebenso grosse Zahl verfügbarer Constanten hat.

Beispiele

15.

Die Begrenzung bestehe aus zwei unendlichen geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen. Ihre kürzeste Verbindungslinie habe die Länge A, und es sei $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Fläche auf der rechtwinklig gegen jene Verbindungslinie gelegten Ebene ausfüllt.

Nimmt man die kürzeste Verbindingslinie zur x-Axe, so hat in jeder der beiden Begrenzungsgeraden x einen constanten Werth. Ebenso ist φ in jeder der beiden Begrenzungsgeraden constant. In unendlicher Entfernung ist die positive Normale für den einen Sector parallel der positiven, für den andern Sector parallel der negativen x-Axe. Die Begrenzung bildet sich auf der Kugel in zwei grössten Kreisen ab, die durch die Pole $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ gehen und den Winkel $\alpha\pi$ einschliessen.

Hiernach hat man

$$X = -\frac{iA}{2\alpha\pi} \log \eta$$

$$\begin{aligned} s &= -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right) \\ s' &= -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\frac{1}{\eta} - \eta'\right), \end{aligned}$$

folglich

(a) $$x = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(-\frac{s}{s'}\right),$$

worin man die Gleichung der Schraubenfläche erkennt.

16.

Die Begrenzung bestehe aus drei geraden Linien, von denen zwei sich scheiden und die dritte zur Ebene der beiden ersten parallel läuft.

Legt man die Anfangspunkt der Coordinaten in den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, die positive x-Axe in die negative Normale, so bildet jener Schnittpunkt auf der Kugel sich ab im Punkte $\eta = \infty$. Die Abbildung der beiden ersten Geraden sind grösste Halbkreise, die von $\eta = \infty$ bis $\eta = 0$ laufen. Ihr Winkel sei $\alpha\pi$. Die Abbildung der dritten Linie ist der Bogen eines grössten Kreises, der von $\eta = 0$ ausgeht, an einer gewissen Stelle umkehrt und in sich selbst bis zum Punkte $\eta = 0$ zurückläuft. Dieser Bogen bilde mit den beiden ersten grössten Halbkreisen die Winkel $-\beta\pi$ und $\gamma\pi$, so dass β und γ absolute Zahlen sind und $\beta + \gamma = \alpha$ sich ergiebt. Um die Abbildung auf der halben t-Ebene zu erhalten, setzen wir fest, dass $t = \infty$ sein soll für $\eta = \infty$, dass dem unendlichen Sector zwischen der ersten und dritten Linie $t = b$, dem unendlichen Sector zwischen der zweiten und dritten Linie $t = c$, dem Umkehrpunkte der Normalen auf der dritten Linie $t = a$ entsprechen soll. Dabei sind a, b, c reell und $c > a > b$. Diesen Bestimmungen entspricht $\eta = (t-b)^\beta (t-c)^\gamma$. Der Werth a hängt von b und c ab. Man hat nämlich

$$\frac{d\log\eta}{dt} = \frac{\beta(t-c) + \gamma(t-b)}{(t-b)(t-c)}$$

und dieses muss für die Umkehrpunkt $= 0$ sein, also

$$a = \frac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Man hat weiter nach Art. 12 und 13

$$du = \sqrt{\frac{A(c-b)(\beta+\gamma)}{2\pi}}\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)},$$

oder wenn man $c - b = \dfrac{2\pi}{A}$ annimmt

$$du = \sqrt{\beta+\gamma}\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)},$$

$$\frac{du}{d\log\eta} = \frac{1}{\sqrt{(\beta+\gamma)(t-a)}},$$

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = \frac{dt}{(t-b)(t-c)}.$$

Folglich

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} x &= -i\int\frac{dt}{(t-b)(t-c)} + i\int\frac{dt'}{(t'-b)(t'-c)},\\ y &= -\frac{i}{2}\int\frac{(t-b)^\beta(t-c)^\gamma - (t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt\\ &\quad+\frac{i}{2}\int\frac{(t'-b)^\beta(t'-c)^\gamma - (t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt',\\ z &= -\frac{1}{2}\int\frac{(t-b)^\beta(t-c)^\gamma + (t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt\\ &\quad-\frac{1}{2}\int\frac{(t'-b)^\beta(t'-c)^\gamma + (t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt'. \end{aligned}$$

17.

Die Begrenzung bestehe aus drei einander kreuzender geraden Linien, deren kürzeste Abstände A, B, C sein mögen. Zwischen je zwei begrenzenden Linien erstreckt sich die Fläche ins Unendliche. Es seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ die Winkel der Richungen, in welchen die Grenzlinien des ersten, des zweiten, des dritten Sectors ins Unendliche verlaufen. Setzt man fest, dass für die drei Sectoren der Minimalfläche im Unendlichen die Grösse t resp. $= 0, \infty, 1$ sein soll, so erhält man

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(1-t)}.$$

$\varphi(t)$ ist eine ganze Function zweiten Grades. Ihre Coefficienten bestimmen sich daraus, dass

$$\begin{array}{ll} \text{für } t = 0 & \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{A\alpha}{2\pi}}, \\[2ex] \text{für } t = \infty & \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{B\beta}{2\pi}}, \\[2ex] \text{für } t = 1 & \dfrac{du}{d\log(1-t)} = \sqrt{\dfrac{C\gamma}{2\pi}} \end{array}$$

sein muss.

Danach ergiebt sich

$$\varphi(t) = \frac{A\alpha}{2\pi}(1-t) + \frac{C\gamma}{2\pi}t - \frac{B\beta}{2\pi}t(1-t).$$

Je nachdem die Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ imaginär oder reell sind, hat die Abbildung auf der Kugel einen Verzweigungspunkt im Innern oder zwei Umkehrpunkte der Normalen auf der Begrenzung.

Die Functionen $k_1 = \sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ und $k_2 = \eta\sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ werden nur für die drei Sectoren unstetig, wenn man $\dfrac{dv}{d\eta} = \varphi(t)$ nimmt. Und zwar ist die Unstetigkeit von k_1 der Art, dass

$$\begin{array}{ll} \text{für } t = 0 & t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}k_1, \\ \text{für } t = \infty & t^{-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}k_1, \\ \text{für } t = 1 & (1-t)^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}k_1 \end{array}$$

einändrig und verschieden von 0 und ∞ wird. k_1 und k_2 sind particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich ergiebt, wenn man $\dfrac{1}{k}\dfrac{d^2k}{dv^2}$ aus seinen Unstetigkeiten als Function von t darstellt und t statt v als unabhängige Variable in $\dfrac{d^2k}{dv^2}$ einführt. Hat man das particuläre Integral k_1 gefunden, so ergiebt sich k_2 aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(c)} \qquad k_1\frac{dk_2}{dt} - k_2\frac{dk_1}{dt} = \varphi(t).$$

Das vollständige Integral der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung werde mit

$$\text{(d)} \qquad k = Q\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t \\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} & \end{array} \right\}$$

bezeichnet. Diese Function genügt wesentlich denselben Bedingungen, die in der Abhandlung über die *Gauss*'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Definition der P-Function ausgesprochen sind[1]. Sie weicht von der P-Function darin ab, dass die Summe der Exponenten -1 ist, nicht $+1$ wie bei P.

Man kann die Function Q mit Hülfe einer Function P und ihrer ersten Derivirten ausdrücken. Zunächst ist nämlich

$$k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} Q \left\{ \begin{matrix} 0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma & \end{matrix} \right\}.$$

Setzt man nun

$$\sigma = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma & \end{matrix} \right\},$$

so lassen sich die Constanten a, b, c so bestimmen, dass

$$\text{(e)} \qquad k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \left((a+bt)\sigma + ct(1-t)\frac{d\sigma}{dt} \right)$$

wird. In der That hat man nur diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (c) einzusetzen und die Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ zu beachten, um zu der Gleichung zu gelangen

$$\varphi(t) = t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right) F(t),$$

$$\begin{aligned} F(t) \quad = \quad & a(a+c\alpha)(1-t) + (a+b)(a+b-c\gamma)t \\ & -t(1-t)\left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}c \right) \left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2}c \right). \end{aligned}$$

Vermöge der Eigenschaften der Function σ kann man setzen

$$t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right) = 1,$$

und folglich muss $F(t) = \varphi(t)$ sein. Hieraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen für a, b, c, die eine sehr einfache Form annehmen, wenn man

$$a + \frac{\alpha}{2}c = p, \quad b - \frac{\alpha+\gamma-1}{2}c = q, \quad a + b - \frac{\gamma}{2}c = -r$$

[1] Beiträge zur Theorie der durch die *Gauss*'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

setzt. Die Bedingungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} pp - \alpha\alpha(p+q+r)^2 &= \frac{A\alpha}{2\pi}, \\ qq - \beta\beta(p+q+r)^2 &= \frac{B\beta}{2\pi}, \\ rr - \gamma\gamma(p+q+r)^2 &= \frac{C\gamma}{2\pi}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Function

$$\lambda = P\left\{\begin{matrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} & \end{matrix}\right\},$$

deren Zweige λ_1 und λ_2 der Differentialgleichung genügen

$$\lambda_1 \frac{d\lambda_2}{d\log t} - \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{d\log t} = 1,$$

kann man k noch einfacher ausdrücken, nämlich

(f) $$k = t^{\frac{1}{2}}\left((p+qt)\lambda + ct(1-t)\frac{d\lambda}{dt}\right).$$

Es würde nicht schwer sein, die einzelnen Zweige der Function k in der Form von bestimmten Integralen herzustellen. Der Weg dazu ist in Art. 7 der Abhandlung über die Function P vorgezeichnet.

In den besondern Falle, dass die drei begrenzenden geraden Linien den Coordinatenaxen parallel laufen, ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Dann erhält man

$$\lambda = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & t \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \end{pmatrix} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} P\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \\ & & & t \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

Der Zweig λ_1 dieser Function ist

$$= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\,\text{const.},$$

und daraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}, \\ k_2 &= -\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser beiden Functionen lassen sich dX, dY, dZ folgendermassen ausdrücken

$$\begin{aligned}
dX &= -ik_1k_2\frac{dt}{t^2(1-t)^2},\\
dY &= -\frac{i}{2}(k_2^2-k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2},\\
dZ &= -\frac{1}{2}(k_2^2+k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{(g)}\qquad \begin{aligned}
iX &= (p+q-r)^2\sqrt{\frac{t}{t-1}}+(-p+q+r)^2\sqrt{\frac{t-1}{t}}\\
&\quad +\tfrac{1}{2}(p+3q+r)(p-q+r)\log\frac{t^{\frac{1}{2}}+(t-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}-(t-1)^{\frac{1}{2}}},\\
iY &= -(p-q+r)^2t^{\frac{1}{2}}-(-p+q+r)^2t^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(p+q+3r)(p+q-r)\log\frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}},\\
iZ &= -(p-q+r)^2(1-t)^{\frac{1}{2}}+(p+q-r)^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad +\tfrac{1}{2}(3p+q+r)(-p+q+r)\log\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}.
\end{aligned}$$

Wenn p, q, r reell sind, so geben die doppelten Coefficienten von i in den drei Grössen rechts die rectwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche.

18.

Die Begrenzung bestehe aus vier sich schneidenden geraden Linien, die man erhält, wenn von den Kanten eines beliebigen Tetraedes zwei nicht zusammenstossende weggelassen werden. Die Abbildung auf der Kugeloberfläche ist ein sphärisches Viereck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ sein mögen. Es ergiebt sich

$$du = \frac{C\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = \frac{C\,dt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

wenn die reellen Werthe $t = a$, b, c, d die Punkte der t-Ebene bezeichnen, in welchen sich die Eckpunkte des Vierecks abbilden.

Soll die in §. 14 entwickelte Methode zur Bestimmung von η angewandt werden, so hat man hier speciell $\varphi(t) = 1$, $\chi(t) = \Delta(t)$, folglich $v = \frac{u}{C}$ und

$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}},\quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}.$$

Die Functionen k_1 und k_2 genügen der Differentialgleichung

$$k_1 \frac{dk_2}{dv} - k_2 \frac{dk_1}{dv} = 1$$

und sind particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{4}{k}\frac{d^2k}{dv^2} \quad = & \quad \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} \\ & + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h. \end{aligned}$$

Die Function $F(t)$ des §. 14 ist hier vom zweiten Grade, aber die Coefficienten von t^2 und von t sind gleich Null, also h eine Constante. In der letzten Gleichung hat man auf der linken Seite t als unabhängige Variable einzuführen und erhält

$$\begin{aligned} \text{(h)}\ \frac{4}{k}\left(\Delta(t)\frac{d^2k}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\Delta'(t)\frac{dk}{dt}\right) \quad = & \quad \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} \\ & + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h \end{aligned}$$

als die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche k Genüge leisten muss.

Sind x, y, z als Functionen von t wirklich ausgedrückt, so treten in der Lösung noch 16 unbestimmte reelle Constanten auf, nämlich die vier Grössen a, b, c, d, von denen wie oben drei beliebig angenommen werden können, die vier Grössen α, β, γ, δ, die Grösse h, ferner 6 reelle Constanten in dem Ausdrucke für η, ein constanter Factor in du und je eine additive Constante in x, y, z. Zur Bestimmung dieser 16 Grössen sich 16 Bedingungsgleichungen vorhanden, nämlich 4 Gleichungen, welche ausdrücken, dass die vier Begrenzungslinien in der Ebene der η sich auf der Kugel in grössten Kreisen abbilden, und 12 Gleichungen, welche aussagen, dass x, y, z in den 4 Eckpunkten gegebene Werthe haben.

In dem speciellen Falle eines regulären Tetraedes ist die Abbildung auf der Kugel ein regelmässiges Viereck, in welchem jeder Winkel $= \frac{2}{3}\pi$. Die Diagonalen halbiren sich und stehen rechtwinklig auf einander. Die den Eckpunkten diametral gegenüberliegenden Punkte der Kugeloberfläche sind die Ecken eines congruenten Vierecks. Zwischen beiden liegen vier dem ursprünglichen ebenfalls congruente Vierecke, die je zwei Eckpunkte mit dem ursprünglichen, zwei mit dem gegenüberliegenden gemein haben. Diese sechs Vierecke füllen die Kugeloberfläche einfach aus. Es wird also $\dfrac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η sein.

Man kann die gesuchte Minimalfläche über ihre ursprüngliche Begrenzung dadurch stetig fortsetzen, dass man die um jede ihrer Grenzlinien als Drehungsaxe um 180° dreht. Längs einer solchen Grenzlinie haben dann die ursprüngliche Fläche und die Fortsetzung gemeinschaftliche Normalen. Wiederholt man die Construction an den neuen Flächenteilen, so lässt sich die ursprüngliche Fläche beliebig weit fortsetzen. Welche Fortsetzung man aber auch betrachte, immer bildet sie sich auf der Kugel in einem der sechs congruenten Vierecke ab. Und zwar haben die Abbildungen zon zwei Flächenteilen eine Seite gemein oder sie liegen einander gegenüber, je nachdem die Flächentheile selbst in einer Grenzlinie an einander stossen oder an gegenüberliegenden Grenzlinien eines mittleren Flächentheils gelegen sind. In dem letzteren Falle können die betreffenden Flächentheile durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Daher muss $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ unverändert bleiben, wenn η mit $-\frac{1}{\eta}$ vertauscht wird.

Legt man den Pol ($\eta = 0$) in den Mittelpunkt eines Vierecks, der Anfangsmeridian durch die Mitte einer Seite, so ist für die Eckpunkte dieses Vierecks

$$\eta = \operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{\pm\frac{\pi i}{4}}, \quad = \operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{\pm\frac{3\pi i}{4}},$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Punkte, deren entgegengesetzte Werthe von η angehören, haben dieselbe x-Coordinate. Es muss also $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ bei der Vertauschung von η mit $-\eta$ unverändert bleiben. Hiernach erhält man

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 = \frac{C_1}{\sqrt{\eta^4+\eta^{-4}+14}}.$$

Die Constante C_1 muss reell sein, damit du^2 in der Begrenzung reelle Werthe besitze.

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege. Die Substitution

$$\left\{\frac{\eta^2+\eta^{-2}-2\sqrt{3}i}{\eta^2+\eta^{-2}+2\sqrt{3}i}\right\}^3 = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2$$

liefert auf der t-Ebene eine Abbildung, die von einer geschlossenen überall stetig gekrümmten Linie begrenzt wird. Die Rechnung zeigt, dass $d\log t$ in der Begrenzung rein imaginär ist. Folglich ist die Abbildung der Begrenzung in der t-Ebene ein Kreis um den Mittelpunkt $t = 0$. Der Radius dieses Kreises ist $= 1$. Den Eckpunkten

$$\eta = \pm \operatorname{tg} \frac{c}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

entspricht $t = \pm 1$, den Eckpunkten

$$\eta = \pm \operatorname{tg} \frac{c}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

entspricht $t = \pm i$. Geht man an irgend einer dieser vier Stellen durch das Innere der Minimalfläche von einer Grenzlinie zur folgenden, so ändert sich dabei der Arcus von dt um π. Daher kann man, wie in §. 13, auch hier setzen

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_2}{\sqrt{(t^2-1)(t^2+1)}},$$

und es muss C_2^2 rein imaginär sein, damit du^2 in der Begrenzung reell ausfalle. Es findet sich $C_1 = 3\sqrt{3} C_2^2 i$.

Dieser Ausdruck stimmt mit der vorher aufgestellten für $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$. Zur weitern Vereinfachung nehme man

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \omega^3, \quad \eta^2 + \eta^{-2} = 2\lambda$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\lambda}{d\log\eta}\, d\lambda.$$

Dann ergiebt eine sehr einfache Rechnung

$$\begin{aligned}
X &= -i\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = C\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\varrho\omega)(1-\varrho^2\omega)}},\\
Y &= -\frac{i}{2}\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta\\
\text{(i)} \qquad &= C\varrho^2 \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho^2\omega)}},\\
Z &= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta\\
&= C\varrho \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho\omega)}},
\end{aligned}$$

wenn $\varrho = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Die reelle Constante $C = \frac{1}{8}C_1$ bestimmt sich aus der gegebenen Länge der Tetraederkanten.

19.

Endlich soll noch die Aufgabe der Minimalfläche für den Fall behandelt werden, dass die Begrenzung aus zwei beliebigen Kreisen besteht, die in parallelen Ebenen liegen. Dann kennt man die Richtung der Normalen in der Begrenzung nicht. Daher lässt sich diese auch nicht auf der Kugel abbilden. Man gelangt aber zur Lösung der Aufgabe durch die Annahme, dass alle zu den Ebenen der Grenzkreise parallel gelegten ebenen Schnitte Kreise seien. Und es wird sich zeigen, dass unter dieser Annahme der Minimalbedingung Genüge geleistet werden kann.

Legt man die x-Axe rechtwinklig gegen die Ebenen der Grenzkreise, so ist die Gleichung der Schnittcurve in einer parallelen Ebene

$$F = y^2 + z^2 + 2\alpha y + 2\beta z + \gamma = 0, \tag{k}$$

und α, β, γ sind als Functionen von x zu bestimmen. Zur Abkürzung werde

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

gesetzt, so dass

$$\cos r = n\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \sin r \, \cos\varphi = n\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \sin r \, \sin\varphi = n\frac{\partial F}{\partial z}$$

ist. Dann lässt sich die Bedingung des Minimum in die Form bringen

$$\frac{\partial\left(n\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(n\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(n\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiation

$$\begin{aligned}4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) + 4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - 4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma)& \\ +4 \cdot 2(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) &= 0.\end{aligned}$$

Schreibt man $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = -q$ und beachtet, dass $F = 0$ ist, so geht die letzte Gleichung über in

$$q\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + 2q = 0 \tag{l}$$

und giebt nach einmaliger Integration

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\int \frac{dx}{q} + \text{const.} = 0.$$

Die Integrationsconstante ist von x unabhängig. Nimmt man andererseits $\int \frac{dx}{q}$ unabhängig von y und z, so muss die Integrationsconstante eine lineäre Function von y und z sein, weil $\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}$ eine solche ist. Man hat also

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\int \frac{dx}{q} + 2ay + 2bz + \text{const.} = 0.$$

Vergleich man damit das Resultat der directen Differentiation von F, nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y\frac{d\alpha}{dx} + 2z\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dx},$$

so ergiebt sich

$$\frac{d\alpha}{dx} = -aq, \quad \frac{d\beta}{dx} = -bq,$$

und wenn man $\int q\,dx = m$ setzt:

$$\alpha = -am + d, \quad \beta = -bm + e.$$

Hiernach hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -2aqy - 2bqz + \frac{d\gamma}{dx}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -2ay\frac{dq}{dx} - 2bz\frac{dq}{dx} + \frac{d^2\gamma}{dx^2}, \end{aligned}$$

und diese Ausdrücke sind in die Gleichung (1) einzuführen. Nach gehöriger Hebung erhält man

$$q\frac{d^2\gamma}{dx^2} - \frac{dq}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + 2q = 0,$$

eine Gleichung, die sich weiter vereinfacht, wenn man beachtet, dass

$$\gamma = q + \alpha^2 + \beta^2 = q + f(m) = \frac{dm}{dx} + f(m),$$

$$f(m) = (a^2 + b^2)m^2 - 2(ad + be)m + d^2 + e^2.$$

Nimmt man hieraus $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, so geht die Differentialgleichung, welche die Bedingung des Minimum ausdrückt, über in folgende

$$q\frac{d^2q}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + 2q + 2(a^2+b^2)q^3 = 0. \tag{m}$$

Zur Ausführung der Integration setze man $\frac{dq}{dx} = p$ und betrachte q als unabhängige Variable. Dadurch erhält man für p^2 als Function von q eine lineäre Differentialgleichung erster Ordung, nämlich

$$\frac{1}{2}q\frac{d(p^2)}{dq} - p^2 + 2q + 2(a^2+b^2)q^3 = 0$$

oder

$$\frac{q^2d(p^2) - p^2d(q^2)}{q^4} = -\left(\frac{4}{q^2} + 4(a^2+b^2)\right)dq.$$

Das Integral lautet

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{4}{q} - 4(a^2+b^2)q + 8c. \tag{n}$$

Darin ist für p wieder $\frac{dq}{dx}$ zu setzen, wodurch man erhält

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)q^3}}, \\ dm &= \frac{q\,dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)q^3}}. \end{aligned}$$

Also ergiebt sich

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)q^3}}, \\ m &= \int \frac{q\,dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)q^3}}, \\ y &= am - d + \sqrt{-q}\cos\psi, \\ z &= bm - e + \sqrt{-q}\sin\psi. \end{aligned} \tag{o}$$

Man hat demnach x, y, z als Functionen von zwei reellen Variabeln q und ψ ausgedrückt. Die Ausdrücke sind, abgesehen von algebraischen Gleidern, elliptische Integrale mit der obern Grenze q. Nach der oben entwickelten allgemeinen Methode hätte man x, y, z erhalten als Summen von zwei conjugirten Functionen zweier conjugierter complexer Variabeln. Danach liegt die Vermuthung nahe, dass diese complexen Ausdrücke mit Hülfe der Additionstheoreme der elliptischen Functionen sich je in einen einzigen Integralausdruck mit der Variabeln q zusammenziehen lassen.

Und dies ist leicht zu bestätigen. Man hat nämlich aus den Formeln für die Richtungscoordinaten r und φ der Normalen

$$\frac{\eta}{\eta'} = e^{2\varphi i} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} i}{\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial z} i} = \frac{y + zi + \alpha + \beta i}{y - zi + \alpha - \beta i} = e^{2\psi i}.$$

Verbindet man damit die Definitionsgleichung von q, nämlich

$$(y + zi + \alpha + \beta i)(y - zi + \alpha - \beta i) = -q,$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} (y + zi) + (\alpha + \beta i) &= (-q)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} \eta'^{-\frac{1}{2}}, \\ (y - zi) + (\alpha - \beta i) &= (-q)^{\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{2}} \eta'^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ferner hat man

$$\operatorname{cotg} r = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{-q}} \{p - 2aq(y + \alpha) - 2bq(z + \beta)\}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}} - \sqrt{\eta\eta'} = \frac{\cos\dfrac{r^2}{2} - \sin\dfrac{r^2}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}\cos\dfrac{r}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \{p - 2aq(y + \alpha) - 2bq(z + \beta)\}.$$

Auf der rechten Seite sind für $y + \alpha$ und $z + \beta$ die eben gefundenen Ausdrücke in η und η' einzuführen. Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$\frac{p}{q} = (-q)^{\frac{1}{2}} \left[(a + bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + (a - bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + (-q)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\eta\eta'} - \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right).$$

Quadrirt man beide Seiten dieser Gleichung und setzt für $\frac{p^2}{q^2}$ seinen Werth aus (n), so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$\text{(p)} \qquad (-q)\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{(-q)}\left[\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right]^2$$
$$= \ 8c - 2(a+bi)\left(\eta' - \frac{1}{\eta}\right) - 2(a-bi)\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right).$$

Die so gefundene Gleichung, welche die Zusammenhang von q, η, η' angiebt, kann man als Integral einer Differentialgleichung für η und η' ansehen und q als Integrationsconstante auffassen. Die Differentialgleichung ergiebt sich durch unmittelbare Differentiation in folgender Form

$$\begin{aligned} 0 \ = \ & \frac{d\eta}{\eta}\Big[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) \\ & \qquad -\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Big] \\ & + \frac{d\eta'}{\eta'}\Big[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) \\ & \qquad +\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der primitiven Gleichung (p) lassen sich aber die Factoren von $\frac{d\eta}{\eta}$ und $\frac{d\eta'}{\eta'}$ anders ausdrücken. Man braucht nur die linke Seite von (p) in zweifacher Weise zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen, indem man das fehlende doppelte Product das eine mal positiv, das andere mal negativ hinzufügt. Dadurch erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) + \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a+bi)\frac{1}{\eta} - (a-bi)\eta\right]},$$
$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) - \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a-bi)\frac{1}{\eta'} - (a+bi)\eta'\right]}.$$

Nimmt man die Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen, so geht die Differentialgleichung über in

$$
\text{(q)} \qquad 0 = \frac{d\eta}{2\eta\sqrt{2c+(a+bi)\dfrac{1}{\eta}-(a-bi)\eta}} + \frac{d\eta'}{2\eta'\sqrt{2c+(a-bi)\dfrac{1}{\eta'}-(a+bi)\eta'}}.
$$

Ihr Integral in algebraischer Form ist in der Gleichung (p) ausgesprochen oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den beiden Gleichungen

$$
\text{(r)} \qquad \begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-q}}(1+\eta\eta') &= \sqrt{\eta'[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]} \\
&\quad + \sqrt{\eta[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}, \\
\sqrt{-q}\,((a+bi)\eta'-(a-bi)\eta) &= \sqrt{\eta'[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]} \\
&\quad - \sqrt{\eta[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}.
\end{aligned}
$$

In transcendenter Form lautet das Integral

$$
\text{(s)} \qquad \text{const.} = \int \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]}} + \int \frac{d\eta'}{2\sqrt{\eta'[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}},
$$

und die Integrationsconstante lässt sich ausdrücken

$$
\text{const.} = \int \frac{dq}{2\sqrt{q[1+2cq-(a^2+b^2)q^2]}},
$$

was aus der Gleichung (r) leicht hervorgeht, wenn man η oder η' constant und zwar $= 0$ nimmt. Man erkennt darin das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung.